Introdução

CLRS 2.2 e 3.1
AU 3.3, 3.4 e 3.6

Essas transparências foram adaptadas das transparências do Prof. Paulo Feofiloff e do Prof. José Coelho de Pina.

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1 \mathinner{..} n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Exemplo: número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em p.

Uma inversão é um par (i, j) de índices de p tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Entrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	2	4	1	9	5	3	8	6	7

Saída: 11

Inversões: $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(2, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 6)$, $(4, 7)$, $(4, 8)$, $(7, 8)$, $(4, 9)$ e $(7, 9)$.

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

$c \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
    para $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
        se $p[i] > p[j]$
            então $c \leftarrow c + 1$
devolva c

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

$c \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
    para $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
        se $p[i] > p[j]$
            então $c \leftarrow c + 1$
devolva c

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é ...

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$\sum_{i=2}^{n} i \;=\; (n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
5	$\leq$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
6	$=$	1
total	$\leq$	$(3/2)n^2 + n/2 + 1$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo, o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$\sum_{i=2}^{n} i \;=\; (n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
5	$\leq$	$\sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; n(n-1)/2$
6	$=$	1
total	$\leq$	$(3/2)n^2 + n/2 + 1$

O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome não mais que $(3/2)n^2 + n/2 + 1$ unidades de tempo.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

total $\leq$?

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

$$\text{total} \leq \left(\tfrac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \tfrac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6)$$

$$= c_2 n^2 + c_1 n + c_0,$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome um tempo diferente, o consumo total é:

linha	todas as execuções da linha		
1	$=$	1	$\times t_1$
2	$=$	n	$\times t_2$
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$	$\times t_3$
4	$=$	$n(n-1)/2$	$\times t_4$
5	$\leq$	$n(n-1)/2$	$\times t_5$
6	$=$	1	$\times t_6$

$$\text{total} \leq \left(\frac{t_3+t_4+t_5}{2}\right)n^2 + \left(t_2 + \frac{t_3-t_4-t_5}{2}\right)n + (t_1 - t_3 + t_6)$$
$$= c_2 n^2 + c_1 n + c_0,$$

onde c_2, c_1 e c_0 são constantes que dependem da máquina.

n^2 é para sempre! Está nas entranhas do algoritmo!

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n))$	$\approx$	funções que não crescem mais rápido que $f(n)$
	$\approx$	funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

n^2 $\quad (3/2)n^2 \quad 9999n^2 \quad n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

Notação O

Intuitivamente...

$\mathrm{O}(f(n)) \approx$ funções que não crescem mais rápido que $f(n)$

$\approx$ funções menores ou iguais a um múltiplo de $f(n)$

$n^2 \qquad (3/2)n^2 \qquad 9999n^2 \qquad n^2/1000$ etc.

crescem todas com a mesma velocidade

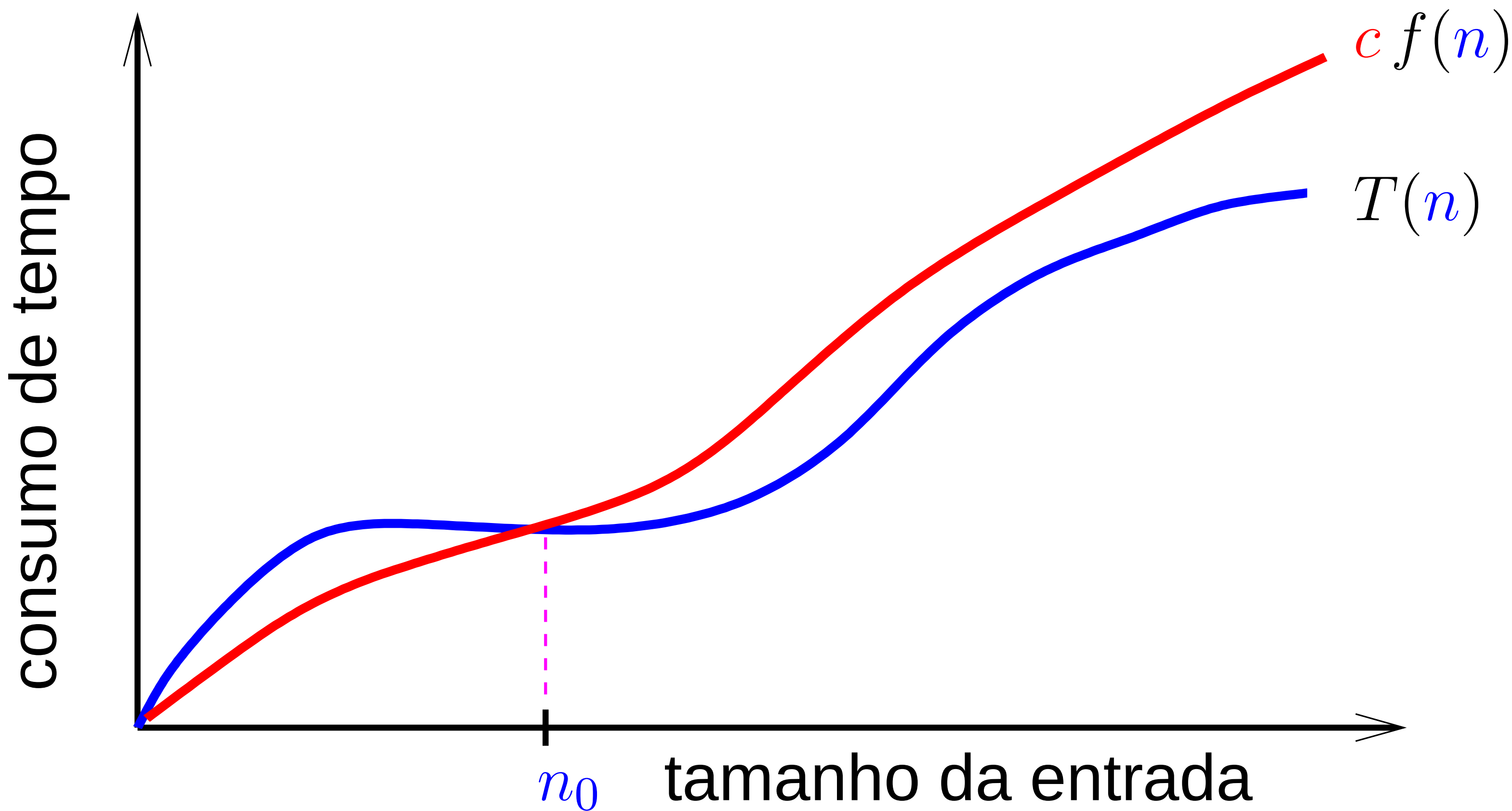
- $n^2 + 99n$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $33n^2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $9n + 2$ é $\mathrm{O}(n^2)$
- $0{,}00001n^3 - 200n^2$ não é $\mathrm{O}(n^2)$

Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros nos reais. Dizemos que $T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \le c\, f(n)$$

para todo $n \ge n_0$.

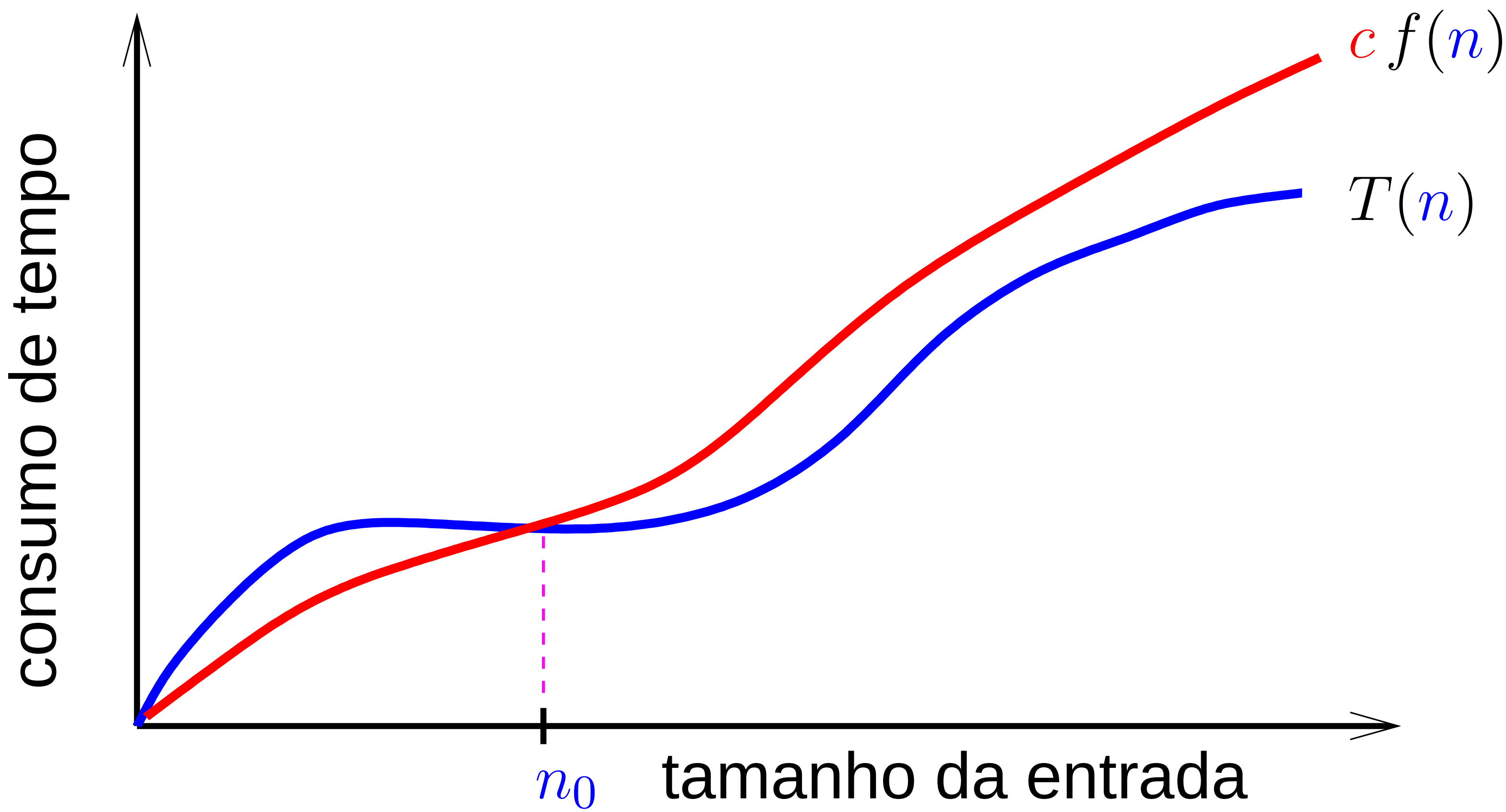


Mais informal

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$T(n) \ \leq \ c\, f(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\,n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\,n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\,n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Exemplos

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ lê-se "$T(n)$ é O de $f(n)$" ou
"$T(n)$ é da ordem de $f(n)$"

Exemplo 1

$10n^2$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 0$, temos que $0 \leq 10n^2 \leq 10\, n^3$.

Outra prova: Para $n \geq 10$, temos $0 \leq 10n^2 \leq n \times n^2 = 1\, n^3$.

Exemplo 2

$\lg n$ é $\mathrm{O}(n)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que $\lg n \leq 1\, n$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n\log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n\lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\,n^3.$$

Mais exemplos

Exemplo 3

$20n^3 + 10n \log n + 5$ é $\mathrm{O}(n^3)$.

Prova: Para $n \geq 1$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + 10n^3 + 5n^3 = 35\, n^3.$$

Outra prova: Para $n \geq 10$, tem-se que

$$20n^3 + 10n \lg n + 5 \leq 20n^3 + n\, n \lg n + n \leq 20n^3 + n^3 + n^3 = 22\, n^3.$$

Uso da notação O

$\mathrm{O}(f(n)) = \{T(n)$: existem c e n_0 tq $T(n) \le cf(n), n \ge n_0\}$

"$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) = \mathrm{O}(f(n))$" deve ser entendido como "$T(n) \in \mathrm{O}(f(n))$".

"$T(n) \le \mathrm{O}(f(n))$" é feio.

"$T(n) \ge \mathrm{O}(f(n))$" não faz sentido!

"$T(n)$ é $g(n) + \mathrm{O}(f(n))$" significa que existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$T(n) \le g(n) + c\,f(n)$$

para todo $n \ge n_0$.

Nomes de classes O

classe	nome
$\mathrm{O}(1)$	constante
$\mathrm{O}(\lg n)$	logarítmica
$\mathrm{O}(n)$	linear
$\mathrm{O}(n \lg n)$	$n \log n$
$\mathrm{O}(n^2)$	quadrática
$\mathrm{O}(n^3)$	cúbica
$\mathrm{O}(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\mathrm{O}(2^n)$	exponencial
$\mathrm{O}(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

$c \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
  para $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
    se $p[i] > p[j]$
      então $c \leftarrow c + 1$
devolva c

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

```
1  c ← 0
2  para i ← 1 até n − 1 faça
3      para j ← i + 1 até n faça
4          se p[i] > p[j]
5              então c ← c + 1
6  devolva c
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?
6	?
total	?

Número de inversões

CONTA-INVERSÕES (p, n)

```
1  c ← 0
2  para i ← 1 até n − 1 faça
3      para j ← i + 1 até n faça
4          se p[i] > p[j]
5              então c ← c + 1
6  devolva c
```

linha	consumo de todas as execuções da linha
1	$\mathrm{O}(1)$
2	$\mathrm{O}(n)$
3	$\mathrm{O}(n^2)$
4	$\mathrm{O}(n^2)$
5	$\mathrm{O}(n^2)$
6	$\mathrm{O}(1)$
total	$\mathrm{O}(3n^2 + n + 2) = \mathrm{O}(n^2)$

Conclusão

O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome $O(n^2)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

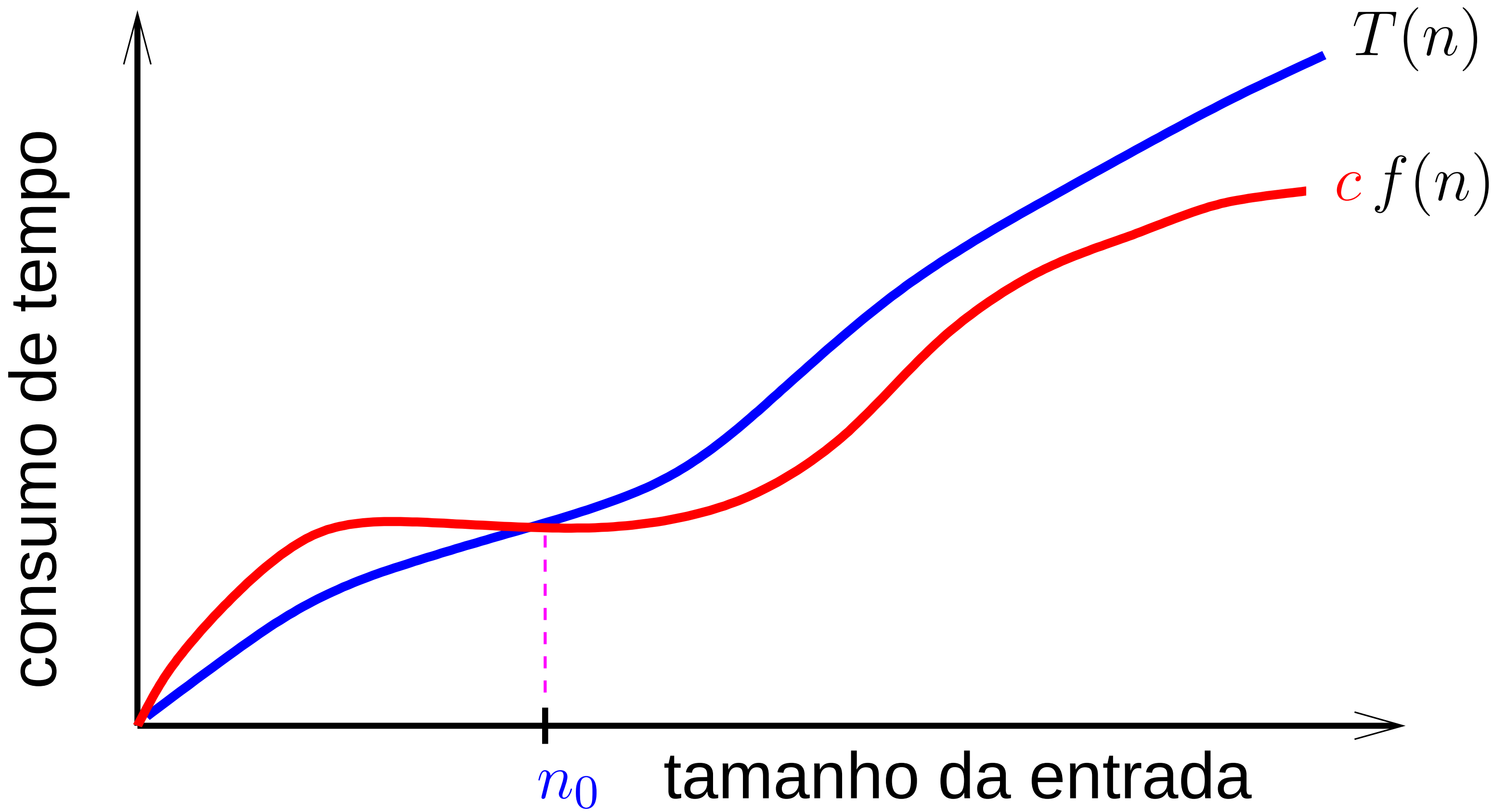
O algoritmo CONTA-INVERSÕES consome tempo $O(n^2)$.

Notação Omega

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$c\, f(n) \;\leq\; T(n)$$

para todo $n \geq n_0$.

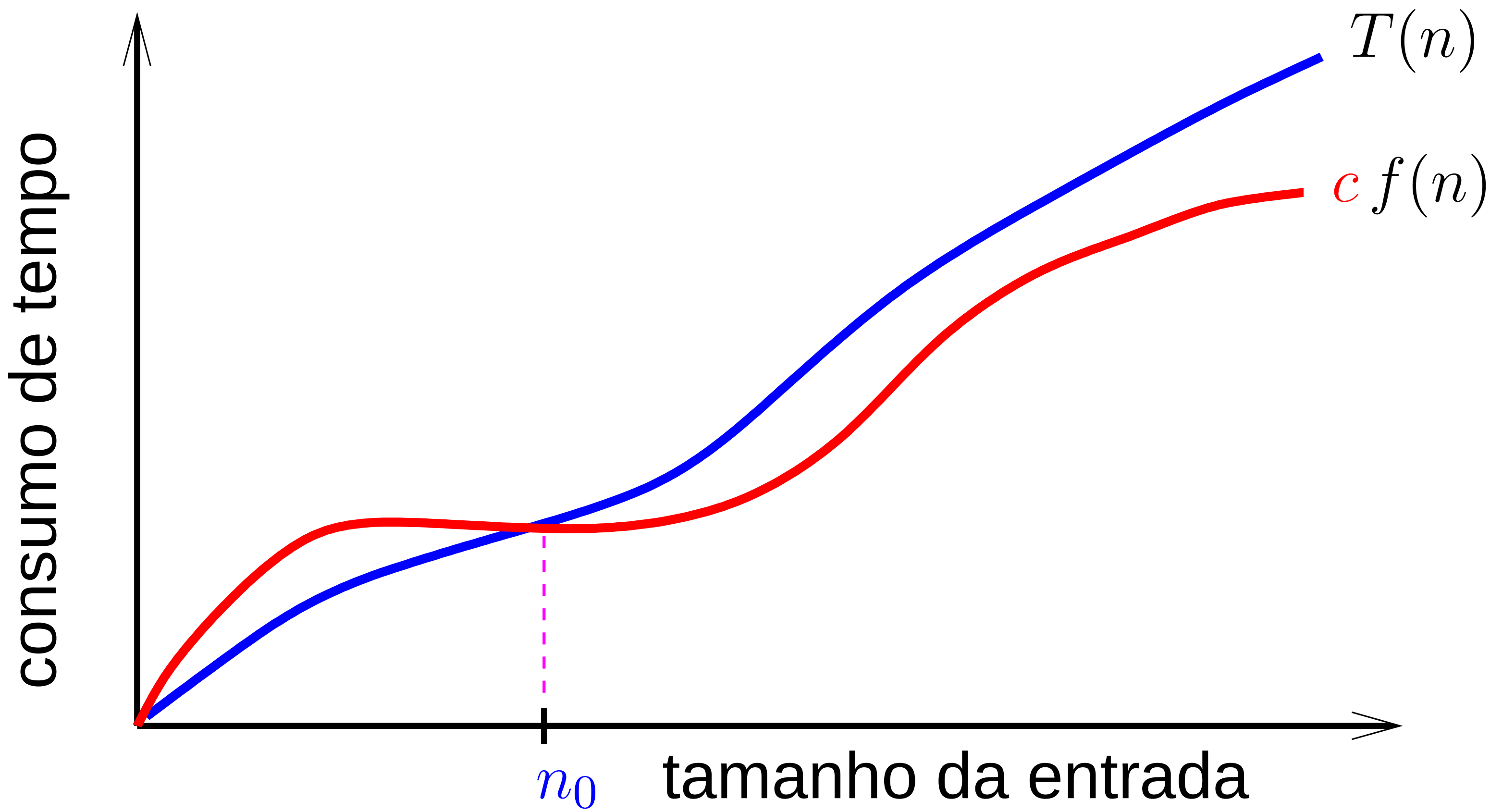


Mais informal

$T(n) = \Omega(f(n))$ se existe $c > 0$ tal que

$$c\, f(n) \leq T(n)$$

para todo n suficientemente GRANDE.



Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Exemplos

Exemplo 1

Se $T(n) \geq 0.001n^2$ para todo $n \geq 8$, então $T(n)$ é $\Omega(n^2)$.

Prova: Aplique a definição com $c = 0.001$ e $n_0 = 8$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

Exemplo 2

O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

CONTA-INVERSÕES (p, n)

$c \leftarrow 0$
para $i \leftarrow 1$ **até** $n - 1$ **faça**
  para $j \leftarrow i + 1$ **até** n **faça**
    se $p[i] > p[j]$
      então $c \leftarrow c + 1$
devolva c

Exemplo 2

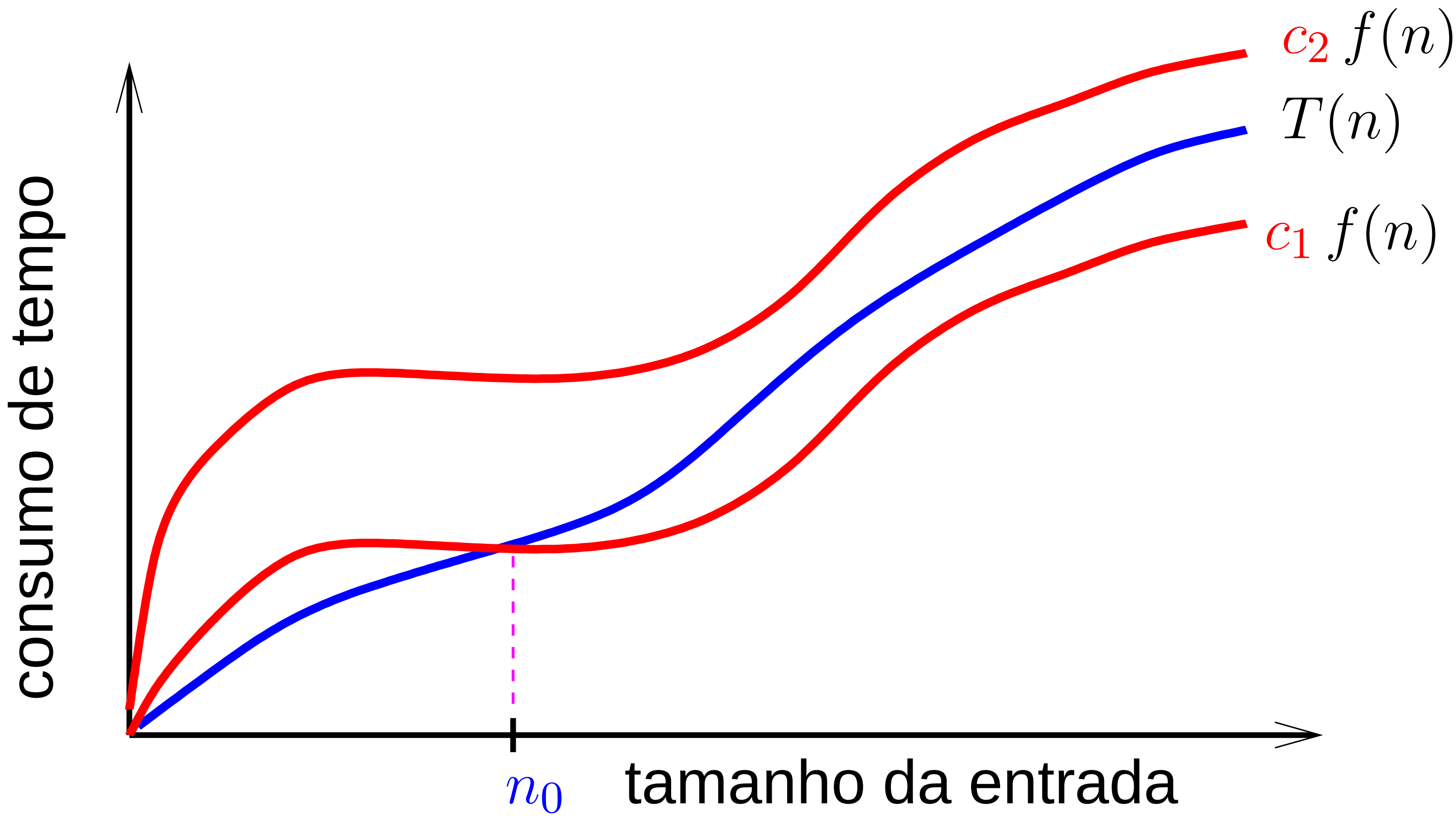
O consumo de tempo do CONTA-INVERSÕES é $\mathrm{O}(n^2)$ e também $\Omega(n^2)$.

linha	todas as execuções da linha	
1	$=$	1
2	$=$	n
3	$=$	$(n+2)(n-1)/2$
4	$=$	$n(n-1)/2$
5	$\geq$	0
6	$=$	1
total	$\geq$	$n^2 + n \;=\; \Omega(n^2)$

Notação Theta

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$ e $T(n)$ é $\Omega(f(n))$.

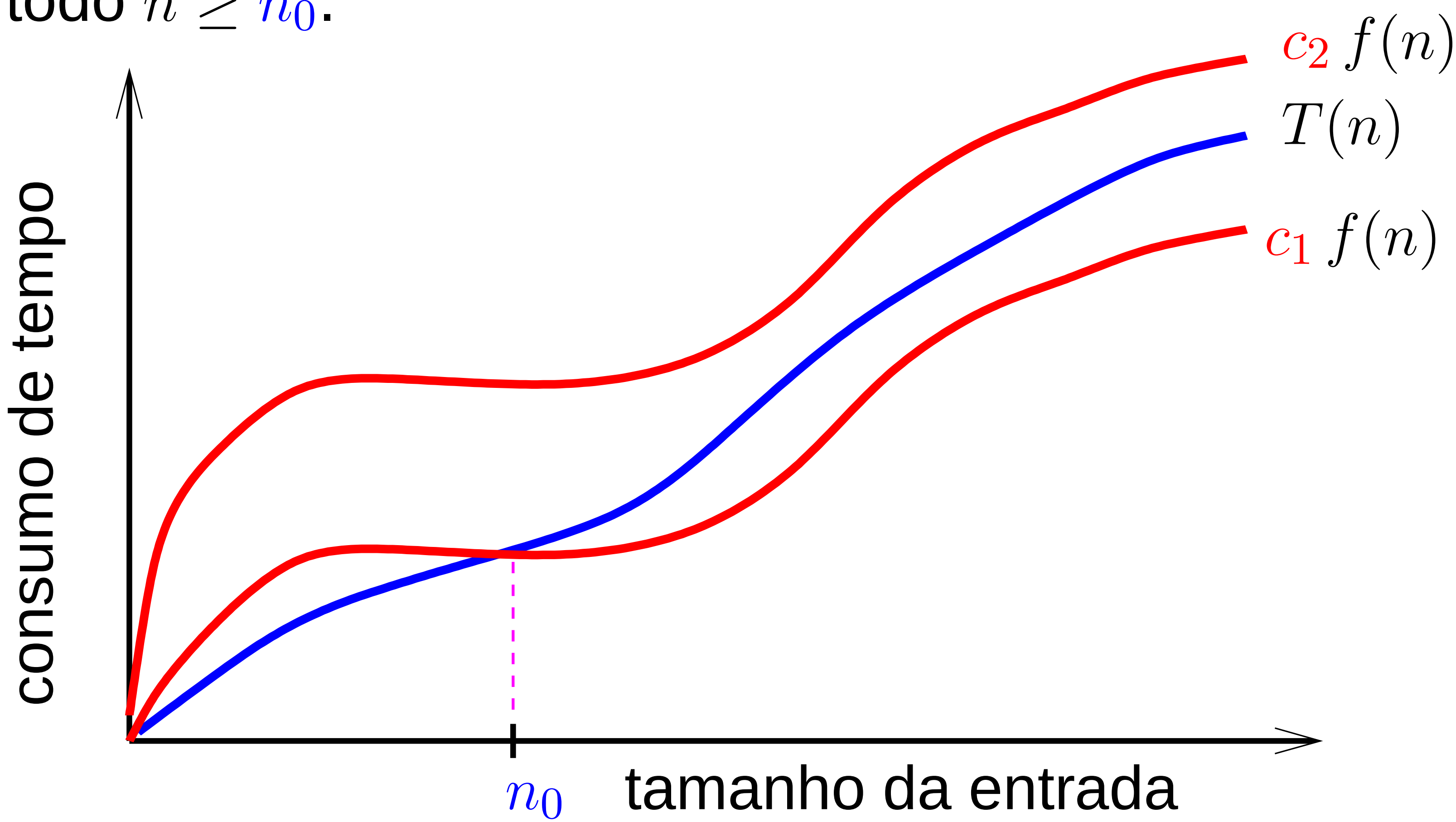


Notação Theta

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1\, f(n) \;\leq\; T(n) \;\leq\; c_2\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Intuitivamente

Comparação assintótica, ou seja, para n ENORME.

comparação	comparação assintótica
$T(n) \leq f(n)$	$T(n)$ é $\mathrm{O}(f(n))$
$T(n) \geq f(n)$	$T(n)$ é $\Omega(f(n))$
$T(n) = f(n)$	$T(n)$ é $\Theta(f(n))$

Tamanho máximo de problemas

Suponha que cada operação consome 1 microsegundo ($1\mu s$).

consumo de tempo (μs)	Tamanho máximo de problemas (n)		
	1 segundo	1 minuto	1 hora
$400n$	2500	150000	9000000
$20\,n\,\lceil \lg n \rceil$	4096	166666	7826087
$2n^2$	707	5477	42426
n^4	31	88	244
2^n	19	25	31

Michael T. Goodrich e Roberto Tamassia, *Projeto de Algoritmos*, Bookman.

Crescimento de algumas funções

n	$\lg n$	$\sqrt{n}$	$n \lg n$	n^2	n^3	2^n
2	1	1,4	2	4	8	4
4	2	2	8	16	64	16
8	3	2,8	24	64	512	256
16	4	4	64	256	4096	65536
32	5	5,7	160	1024	32768	4294967296
64	6	8	384	4096	262144	1,8 10^{19}
128	7	11	896	16384	2097152	3,4 10^{38}
256	8	16	1048	65536	16777216	1,1 10^{77}
512	9	23	4608	262144	134217728	1,3 10^{154}
1024	10	32	10240	1048576	1,1 10^{9}	1,7 10^{308}

Nomes de classes Θ

classe	nome
$\Theta(1)$	constante
$\Theta(\log n)$	logarítmica
$\Theta(n)$	linear
$\Theta(n \log n)$	$n \log n$
$\Theta(n^2)$	quadrática
$\Theta(n^3)$	cúbica
$\Theta(n^k)$ com $k \geq 1$	polinomial
$\Theta(2^n)$	exponencial
$\Theta(a^n)$ com $a > 1$	exponencial

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

Palavras de Cautela

Suponha que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são algoritmos para um mesmo problema. Suponha que o consumo de tempo de $\mathcal{A}$ é "essencialmente" $100\,n$ e que o consumo de tempo de $\mathcal{B}$ é "essencialmente" $n \log_{10} n$.

$100\,n$ é $\Theta(n)$ e $n \log_{10} n$ é $\Theta(n \lg n)$.
Logo, $\mathcal{A}$ é assintoticamente mais eficiente que $\mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$ é mais eficiente que $\mathcal{B}$ para $n \geq 10^{100}$.

10^{100} $=$ um *googol*
$\approx$ número de átomos no universo observável
$=$ número ENORME

Palavras de Cautela

Conclusão:

Lembre das constantes e termos de baixa ordem que estão “escondidos” na notação assintótica.

Em geral um algoritmo que consome tempo $\Theta(n \lg n)$, e com fatores constantes razoáveis, é bem eficiente.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(n^2)$ pode, algumas vezes, ser satisfatório.

Um algoritmo que consome tempo $\Theta(2^n)$ é dificilmente aceitável.

Do ponto de vista de AA, eficiente $=$ polinomial.

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo visto hoje.
Temos que ser mais espertos...

Exercícios

Exercício 1.A

Prove que $n^2 + 10n + 20 \ = \ \mathrm{O}(n^2)$

Exercício 1.B

Prove que $300 \ = \ \mathrm{O}(1)$

Exercício 1.C

Prove que $\lceil n/3 \rceil \ = \ \mathrm{O}(n)$
É verdade que $n = \mathrm{O}(\lfloor n/3 \rfloor)$?

Exercício 1.D

Prove que $\lg n \ = \ \mathrm{O}(\log_{10} n)$

Exercício 1.E

Prove que $n = \mathrm{O}(2^n)$

Exercício 1.F

Prove que $\lg n = \mathrm{O}(n)$

Exercício 1.G

Prove que $n/1000$ não é $\mathrm{O}(1)$

Exercício 1.H

Prove que $\frac{1}{2}\, n^2$ não é $\mathrm{O}(n)$

Mais exercícios

Exercício 1.I

Suponha T definida para $n = 0, 1, \ldots$

Se $T(n) = \mathrm{O}(1)$, mostre que existe c' tal que $T(n) \leq c'$ para todo $n \geq 0$.

Se $T(n) = \mathrm{O}(n)$, mostre que existe c' tal que $T(n) \leq c'n$ para todo $n \geq 1$.

Exercício 1.J

Prove que $n^2 + 999n + 9999 = \mathrm{O}(n^2)$.

Exercício 1.K

Prove que $\frac{1}{2}n(n+1) \;=\; \mathrm{O}(n^2)$.

Exercício 1.L

É verdade que $\frac{1}{100}n^2 - 999n - 9999 = \mathrm{O}(n)$? Justifique.

Exercício 1.M

Suponha que $f(n) = n^2$ quando n é par e $f(n) = n^3$ quando n é ímpar.

É verdade que $f(n) = \mathrm{O}(n^2)$?

É verdade que $f(n) = \mathrm{O}(n^3)$?

É verdade que $n^2 = \mathrm{O}(f(n))$?

É verdade que $n^3 = \mathrm{O}(f(n))$?

Mais exercícios ainda

Exercício 1.N
É verdade que $n^2 = \mathrm{O}(2^n)$?

Exercício 1.O
É verdade que $\lg n = \mathrm{O}(\sqrt{n})$?

Exercício 1.P
Suponha $f(n) = 64n \lg n$ e $g(n) = 8n^2$, com n inteiro positivo.
Para que valores de n temos $f(n) \leq g(n)$?

Exercício 1.Q (bom!)
Suponha T e f definidas para $n = 1, 2, \ldots$ Mostre que se $T(n) = \mathrm{O}(f(n))$ e $f(n) > 0$ para $n \geq 1$ então existe c' tal que $T(n) \leq c' f(n)$ para todo $n \geq 1$.

Exercício 1.R (bom!)
Faz sentido dizer "$T(n) = \mathrm{O}(n^2)$ para $n \geq 3$"?

Mais exercícios ainda ainda

Exercício 1.S

É verdade que $2^n = \mathrm{O}(n)$?
É verdade que $n = \mathrm{O}(\lg n)$?
Justifique.

Exercício 1.T

É verdade que $n + \sqrt{n}$ é $\mathrm{O}(n)$?
É verdade que n é $\mathrm{O}(\sqrt{n})$?
É verdade que $n^{2/3}$ é $\mathrm{O}(\sqrt{n})$?
É verdade que $\sqrt{n} + 1000$ é $\mathrm{O}(n)$?

Exercício 1.U

É verdade que $\lg n = \mathrm{O}(n^{1/2})$?
É verdade que $\sqrt{n} = \mathrm{O}(\lg n)$?
É verdade que $\lg n = \mathrm{O}(n^{1/3})$?
Justifique. (Sugestão: prove, por indução, que $\lg x \leq x$ para todo número real $x \geq 1$.)

Exercício 1.V

É verdade que $\lceil \lg n \rceil = \mathrm{O}(\lg n)$?