

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2009

Interseção de segmentos

Uma coleção de segmentos do plano é dada por dois vetores $e[1..n], d[1..n]$ de pontos.

Interseção de segmentos

Uma coleção de segmentos do plano é dada por dois vetores $e[1..n], d[1..n]$ de pontos.

A coordenada do ponto $e[i]$ é $(e_X[i], e_Y[i])$.

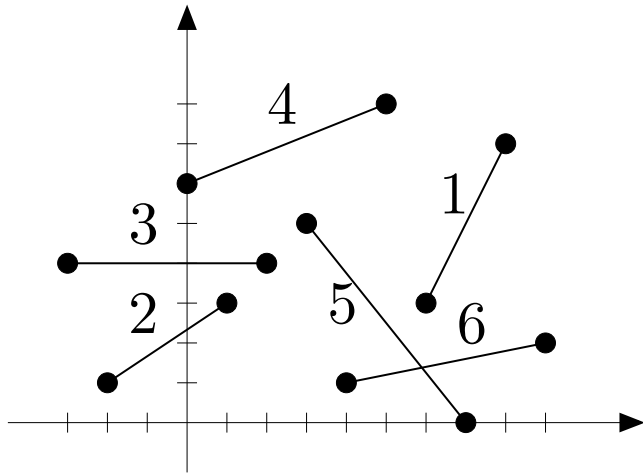
A coordenada do ponto $d[i]$ é $(d_X[i], d_Y[i])$.

Interseção de segmentos

Uma coleção de segmentos do plano é dada por dois vetores $e[1..n], d[1..n]$ de pontos.

A coordenada do ponto $e[i]$ é $(e_X[i], e_Y[i])$.

A coordenada do ponto $d[i]$ é $(d_X[i], d_Y[i])$.

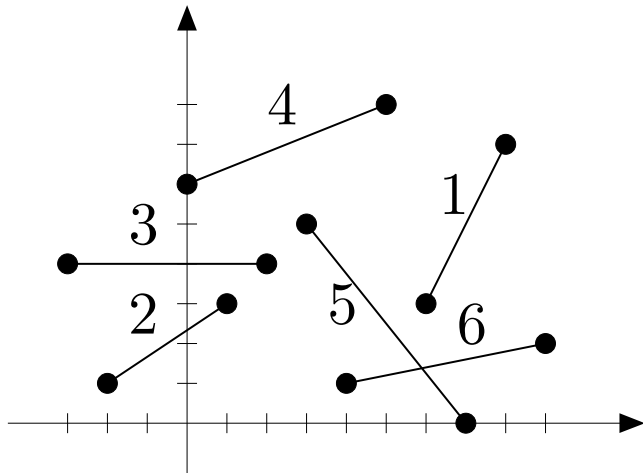


| | | | | | | |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| e_X | 6 | -2 | -3 | 0 | 3 | 4 |
| e_Y | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| d_X | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| d_Y | 7 | 3 | 4 | 8 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Interseção de segmentos

Problema: Dada uma coleção de segmentos no plano, decidir se existem dois segmentos na coleção que se intersectam.

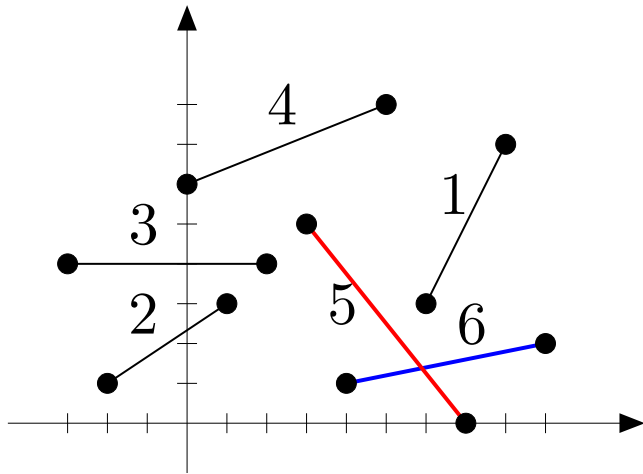


| | | | | | | |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| e_X | 6 | -2 | -3 | 0 | 3 | 4 |
| e_Y | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| d_X | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| d_Y | 7 | 3 | 4 | 8 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Interseção de segmentos

Problema: Dada uma coleção de segmentos no plano, decidir se existem dois segmentos na coleção que se intersectam.

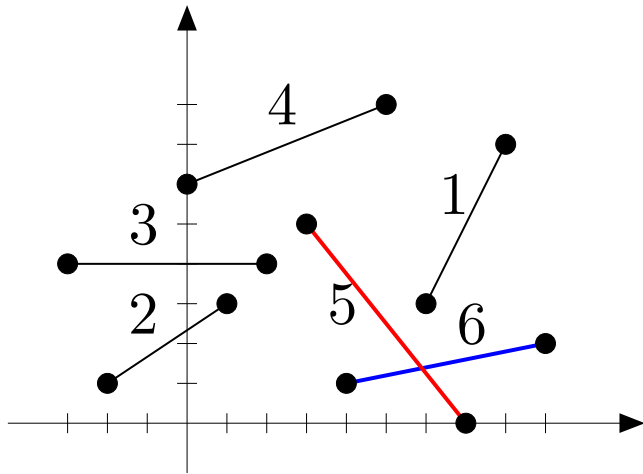


| | | | | | | |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| e_X | 6 | -2 | -3 | 0 | 3 | 4 |
| e_Y | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| d_X | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| d_Y | 7 | 3 | 4 | 8 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Interseção de segmentos

Problema: Dada uma coleção de segmentos no plano, decidir se existem dois segmentos na coleção que se intersectam.



| | | | | | | |
|-------|---|----|----|---|---|---|
| e_X | 6 | -2 | -3 | 0 | 3 | 4 |
| e_Y | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| d_X | 8 | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 |
| d_Y | 7 | 3 | 4 | 8 | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Resposta: sim, existem dois segmentos com interseção.

Interseção de dois segmentos

Das aulas passadas...

Interseção entre ab e cd

INTERSECTA(a, b, c, d)

- 1 se **IntersectaProp**(a, b, c, d)
- 2 então devolva VERDADE
- 3 devolva **Entre**(a, b, c) ou **Entre**(a, b, d)
ou **Entre**(c, d, a) ou **Entre**(c, d, b)

Interseção de dois segmentos

Das aulas passadas...

Interseção entre ab e cd

INTERSECTA(a, b, c, d)

- 1 se **IntersectaProp**(a, b, c, d)
- 2 então devolva VERDADE
- 3 devolva **Entre**(a, b, c) ou **Entre**(a, b, d)
ou **Entre**(c, d, a) ou **Entre**(c, d, b)

Abreviatura:

INTER(e, d, i, j)

- 1 devolva INTERSECTA($e[i], d[i], e[j], d[j]$)

Interseção de segmentos

Solução quadrática:

IntersectaQuad(e, d, n)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até $n-1$ faça
- 2 para $j \leftarrow i+1$ até n faça
- 3 se INTER (e, d, i, j)
- 4 então devolva VERDADE
- 5 devolva FALSO

Interseção de segmentos

Solução quadrática:

IntersectaQuad(e, d, n)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até $n-1$ faça
- 2 para $j \leftarrow i+1$ até n faça
- 3 se INTER (e, d, i, j)
- 4 então devolva VERDADE
- 5 devolva FALSO

Consumo de tempo: $\Theta(n^2)$.

Interseção de segmentos

Solução quadrática:

IntersectaQuad(e, d, n)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até $n-1$ faça
- 2 para $j \leftarrow i+1$ até n faça
- 3 se INTER (e, d, i, j)
- 4 então devolva VERDADE
- 5 devolva FALSO

Consumo de tempo: $\Theta(n^2)$.

Conseguimos fazer melhor que isso?

Interseção de intervalos

Este é o caso **na reta**.

Interseção de intervalos

Este é o caso **na reta**.

Um segmento na reta é um **intervalo**.

Interseção de intervalos

Este é o caso **na reta**.

Um segmento na reta é um **intervalo**.

Os vetores $e_X[1..n]$ e $d_X[1..n]$ representam os intervalos $[e_X[1]..d_X[1]], \dots, [e_X[n]..d_X[n]]$.

Interseção de intervalos

Este é o caso **na reta**.

Um segmento na reta é um **intervalo**.

Os vetores $e_X[1..n]$ e $d_X[1..n]$ representam os intervalos $[e_X[1]..d_X[1]], \dots, [e_X[n]..d_X[n]]$.

Se **ordenarmos os pontos extremos dos intervalos**, é fácil decidir se há interseção ou não, percorrendo os pontos na ordem obtida.

Interseção de intervalos

Este é o caso **na reta**.

Um segmento na reta é um **intervalo**.

Os vetores $e_X[1..n]$ e $d_X[1..n]$ representam os intervalos $[e_X[1]..d_X[1]], \dots, [e_X[n]..d_X[n]]$.

Se **ordenarmos os pontos extremos dos intervalos**, é fácil decidir se há interseção ou não, percorrendo os pontos na ordem obtida.

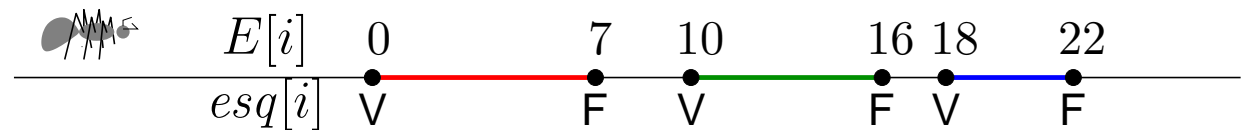
Basta **contar quantos intervalos estão “abertos”**. Se houver mais do que um aberto num momento, há interseção.

Interseção de intervalos

VARREDURA(e, d, n)

- 1 para $i \leftarrow 1$ até n faça ▷ para cada intervalo marca
- 2 $E[i] \leftarrow e_X[i]$ $esq[i] \leftarrow$ VERDADE ▷ extremo esquerdo
- 3 $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$ $esq[i + n] \leftarrow$ FALSO ▷ extremo direito
- 4 MERGESORT($E, esq, 1, 2n$) ▷ ordena os extremos

| | | | |
|-------|----|---|----|
| e_X | 10 | 0 | 18 |
| d_X | 16 | 7 | 22 |
| | 1 | 2 | 3 |



Interseção de intervalos

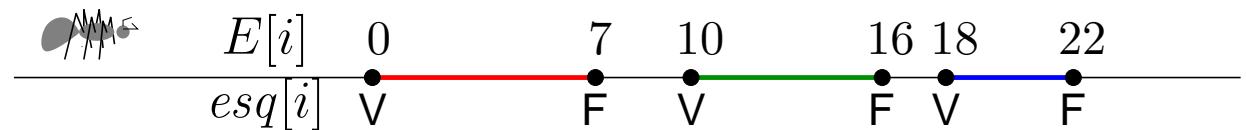
VARREDURA(e, d, n)

```

1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça      ▷ para cada intervalo marca
2     $E[i] \leftarrow e_X[i]$        $esq[i] \leftarrow$  VERDADE  ▷ extremo esquerdo
3     $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$    $esq[i + n] \leftarrow$  FALSO  ▷ extremo direito
4  MERGESORT( $E, esq, 1, 2n$ )  ▷ ordena os extremos
5   $cont \leftarrow 0$     $resp \leftarrow$  FALSO
6  para  $p \leftarrow 1$  até  $2n$  faça  ▷ para cada ponto extremo
7    se  $esq[p]$                     ▷ se extremo esquerdo
8      então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
9          se  $cont = 2$  então  $resp \leftarrow$  VERDADE
10     senão  $cont \leftarrow cont - 1$ 
11 devolva  $resp$ 

```

| | | | |
|-------|----|---|----|
| e_X | 10 | 0 | 18 |
| d_X | 16 | 7 | 22 |
| | 1 | 2 | 3 |



Interseção de intervalos

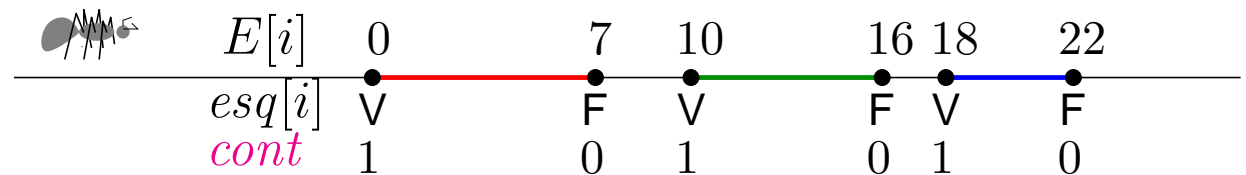
VARREDURA(e, d, n)

```

1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça      ▷ para cada intervalo marca
2     $E[i] \leftarrow e_X[i]$        $esq[i] \leftarrow$  VERDADE   ▷ extremo esquerdo
3     $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$    $esq[i + n] \leftarrow$  FALSO   ▷ extremo direito
4  MERGESORT( $E, esq, 1, 2n$ ) ▷ ordena os extremos
5   $cont \leftarrow 0$     $resp \leftarrow$  FALSO
6  para  $p \leftarrow 1$  até  $2n$  faça   ▷ para cada ponto extremo
7    se  $esq[p]$                        ▷ se extremo esquerdo
8      então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
9          se  $cont = 2$  então  $resp \leftarrow$  VERDADE
10     senão  $cont \leftarrow cont - 1$ 
11 devolva  $resp$ 

```

| | | | |
|-------|----|---|----|
| e_X | 10 | 0 | 18 |
| d_X | 16 | 7 | 22 |
| | 1 | 2 | 3 |



VARREDURA($e_X, d_X, 3$) = FALSO

Interseção de intervalos

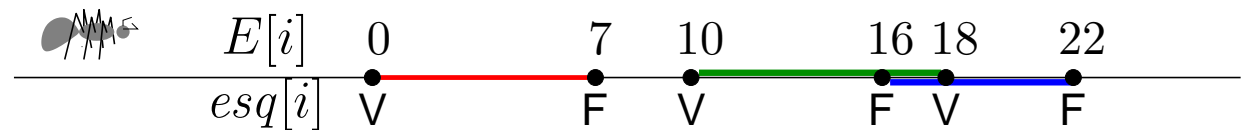
VARREDURA(e, d, n)

```

1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça      ▷ para cada intervalo marca
2     $E[i] \leftarrow e_X[i]$        $esq[i] \leftarrow$  VERDADE   ▷ extremo esquerdo
3     $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$    $esq[i + n] \leftarrow$  FALSO   ▷ extremo direito
4  MERGESORT( $E, esq, 1, 2n$ ) ▷ ordena os extremos
5   $cont \leftarrow 0$     $resp \leftarrow$  FALSO
6  para  $p \leftarrow 1$  até  $2n$  faça   ▷ para cada ponto extremo
7    se  $esq[p]$                        ▷ se extremo esquerdo
8      então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
9          se  $cont = 2$  então  $resp \leftarrow$  VERDADE
10     senão  $cont \leftarrow cont - 1$ 
11 devolva  $resp$ 

```

| | | | |
|-------|----|---|----|
| e_X | 10 | 0 | 18 |
| d_X | 16 | 7 | 22 |
| | 1 | 2 | 3 |



Interseção de intervalos

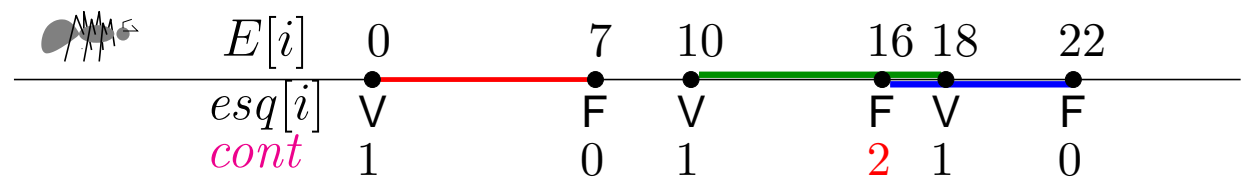
VARREDURA(e, d, n)

```

1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça      ▷ para cada intervalo marca
2     $E[i] \leftarrow e_X[i]$        $esq[i] \leftarrow$  VERDADE   ▷ extremo esquerdo
3     $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$    $esq[i + n] \leftarrow$  FALSO   ▷ extremo direito
4  MERGESORT( $E, esq, 1, 2n$ ) ▷ ordena os extremos
5   $cont \leftarrow 0$     $resp \leftarrow$  FALSO
6  para  $p \leftarrow 1$  até  $2n$  faça   ▷ para cada ponto extremo
7    se  $esq[p]$                        ▷ se extremo esquerdo
8      então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
9          se  $cont = 2$  então  $resp \leftarrow$  VERDADE
10     senão  $cont \leftarrow cont - 1$ 
11 devolva  $resp$ 

```

| | | | |
|-------|----|---|----|
| e_X | 10 | 0 | 18 |
| d_X | 16 | 7 | 22 |
| | 1 | 2 | 3 |



VARREDURA($e_X, d_X, 3$) = VERDADE

Interseção de intervalos

VARREDURA(e, d, n)

```
1  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça           ▷ para cada intervalo marca
2     $E[i] \leftarrow e_X[i]$        $esq[i] \leftarrow$  VERDADE   ▷ extremo esquerdo
3     $E[i + n] \leftarrow d_X[i]$   $esq[i + n] \leftarrow$  FALSO ▷ extremo direito
4  MERGESORT( $E, esq, 1, 2n$ ) ▷ ordena os extremos
5   $cont \leftarrow 0$     $resp \leftarrow$  FALSO
6  para  $p \leftarrow 1$  até  $2n$  faça       ▷ para cada ponto extremo
7    se  $esq[p]$                              ▷ se extremo esquerdo
8      então  $cont \leftarrow cont + 1$ 
9          se  $cont = 2$  então  $resp \leftarrow$  VERDADE
10     senão  $cont \leftarrow cont - 1$ 
11  devolva  $resp$ 
```

Consumo de tempo: $\Theta(n \lg n)$.

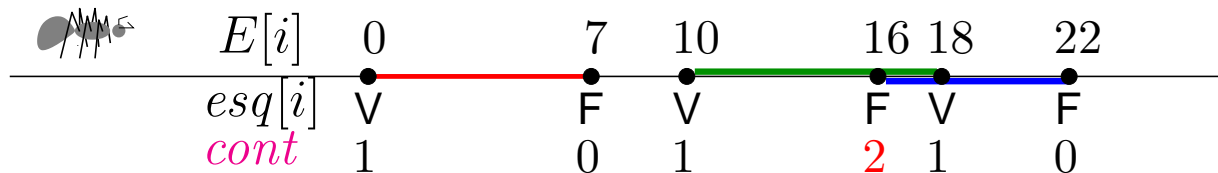
Método da linha de varredura

Ideia: reduzir um problema estático bidimensional a um problema dinâmico unidimensional

Método da linha de varredura

Ideia: reduzir um problema estático bidimensional a um problema dinâmico unidimensional

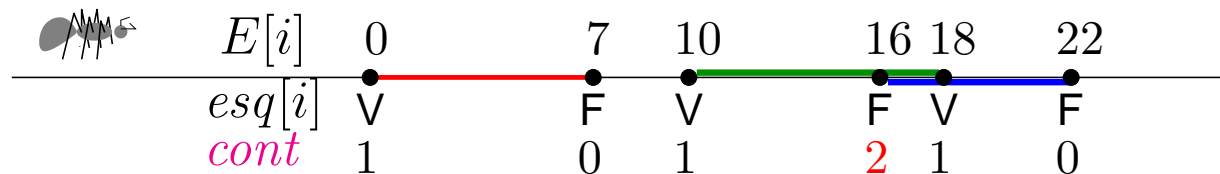
Uma **linha imaginária** move-se da esquerda para a direita.



Método da linha de varredura

Ideia: reduzir um problema estático bidimensional a um problema dinâmico unidimensional

Uma **linha imaginária** move-se da esquerda para a direita.

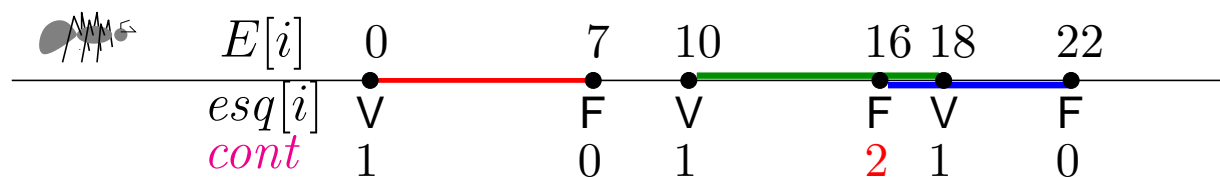


À medida que ela move,
o problema restrito à esquerda dela é resolvido.

Método da linha de varredura

Ideia: reduzir um problema estático bidimensional a um problema dinâmico unidimensional

Uma **linha imaginária** move-se da esquerda para a direita.



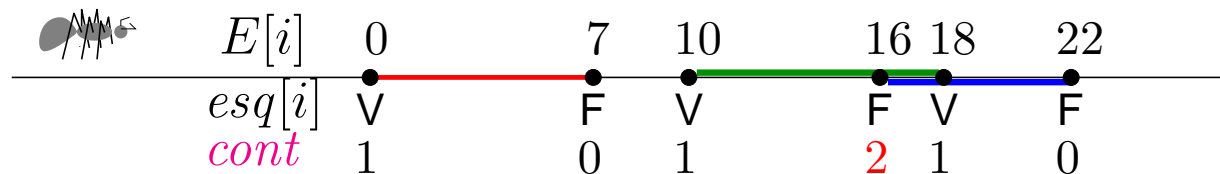
À medida que ela move,
o **problema restrito à esquerda dela é resolvido.**

Informação necessária para estender a solução parcial é mantida numa **descrição combinatória da linha.**

Método da linha de varredura

Ideia: reduzir um problema estático bidimensional a um problema dinâmico unidimensional

Uma **linha imaginária** move-se da esquerda para a direita.



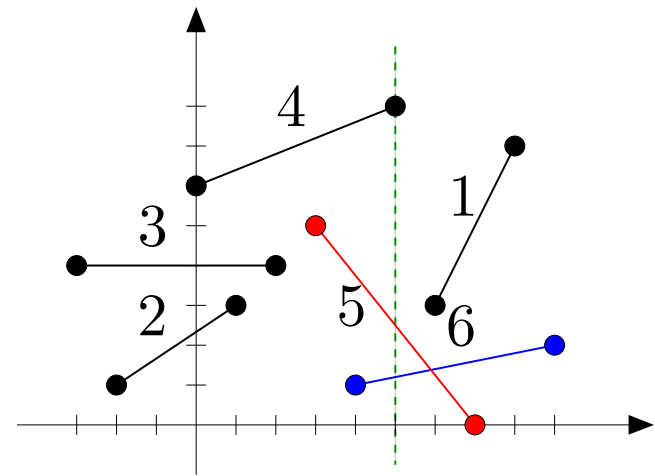
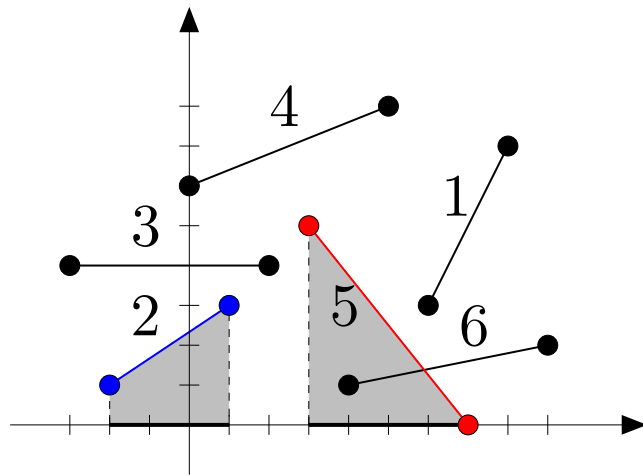
À medida que ela move,
o **problema restrito à esquerda dela é resolvido.**

Informação necessária para estender a solução parcial é mantida numa **descrição combinatória da linha.**

Muda apenas em posições chaves: os **pontos eventos.**

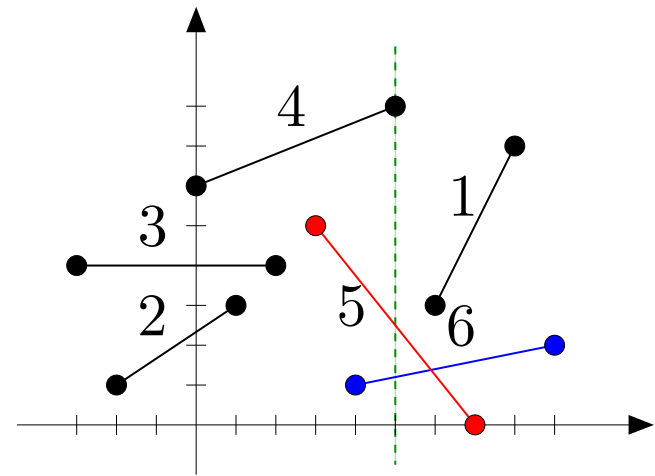
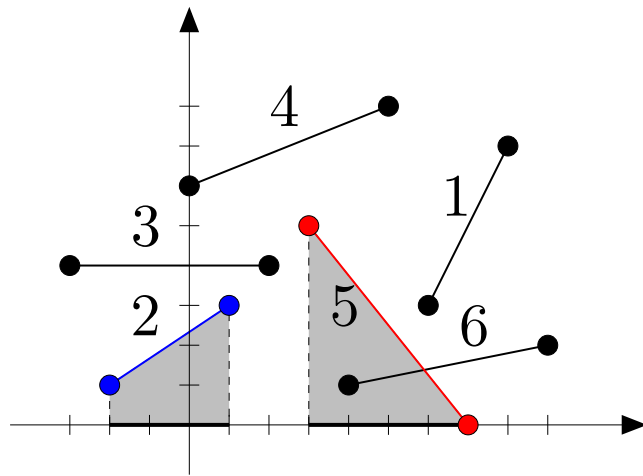
Algoritmo de Shamos e Hoey

Ideia: Dois segmentos cuja projeção no eixo X sejam disjuntas não se intersectam.



Algoritmo de Shamos e Hoey

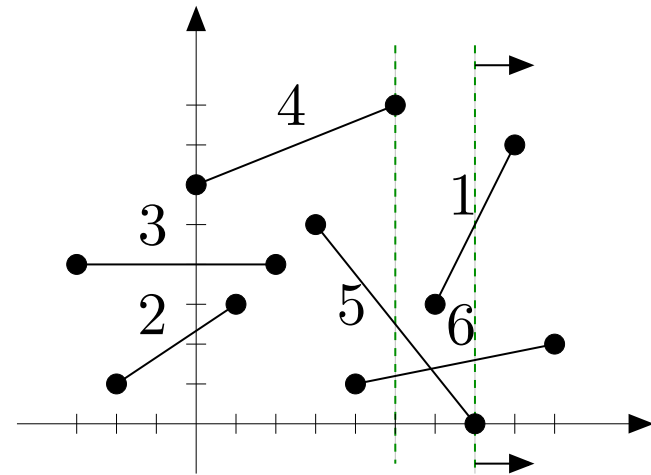
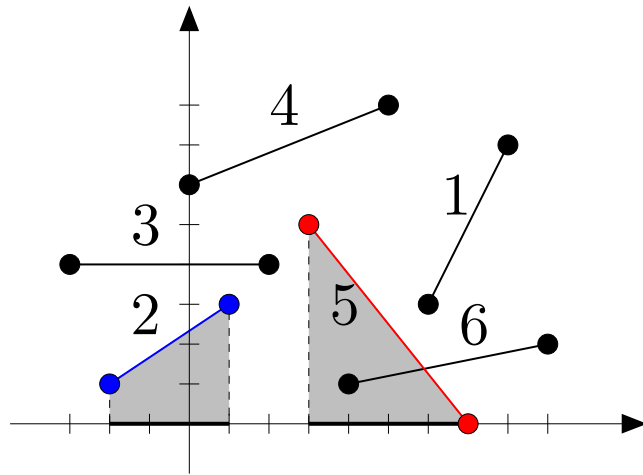
Ideia: Dois segmentos cuja projeção no eixo X sejam disjuntas não se intersectam.



Se a projeção no eixo X de dois segmentos tem interseção, então há uma **linha vertical** que intersecta ambos.

Algoritmo de Shamos e Hoey

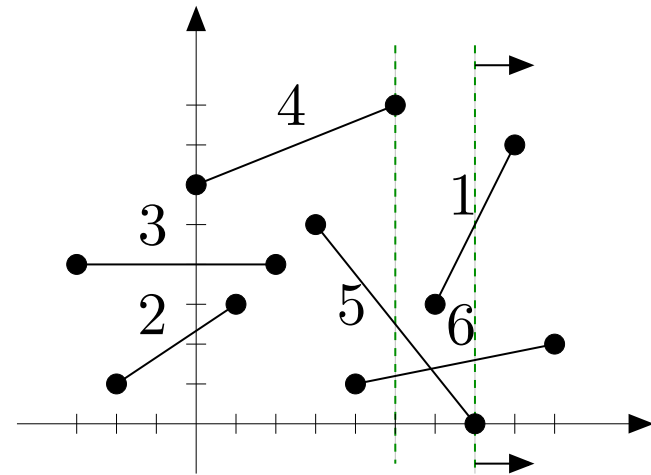
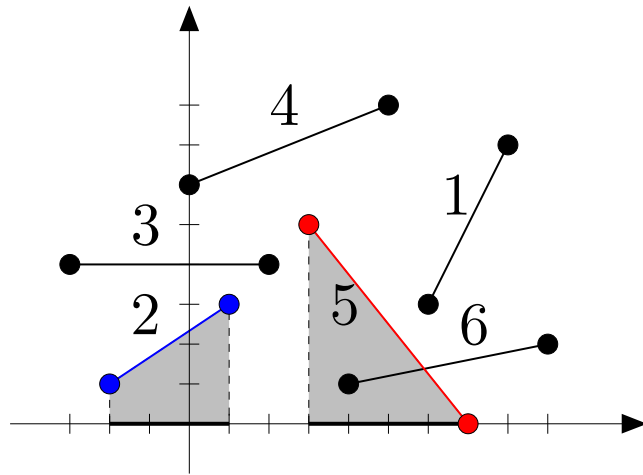
Ideia: Dois segmentos cuja projeção no eixo X sejam disjuntas não se intersectam.



Imagine esta **linha vertical** varrendo o plano da esquerda para a direita...

Algoritmo de Shamos e Hoey

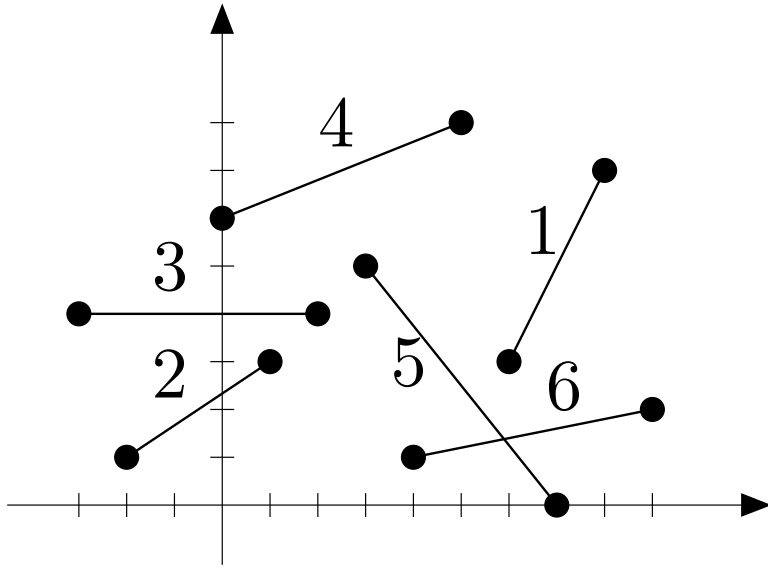
Ideia: Dois segmentos cuja projeção no eixo X sejam disjuntas não se intersectam.



Imagine esta **linha vertical** varrendo o plano da esquerda para a direita...

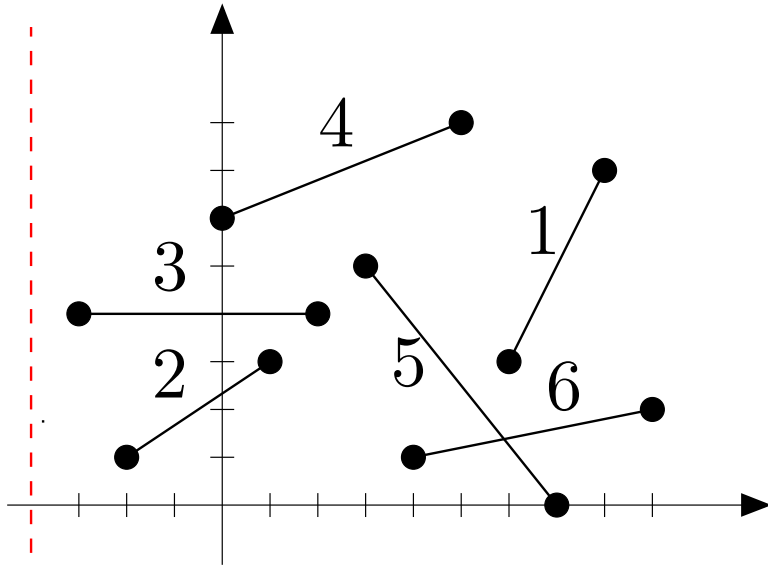
Enquanto a **linha** varre o plano, mantemos os segmentos intersectados por ela na **descrição combinatória da linha**.

Descrição combinatória da linha



| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

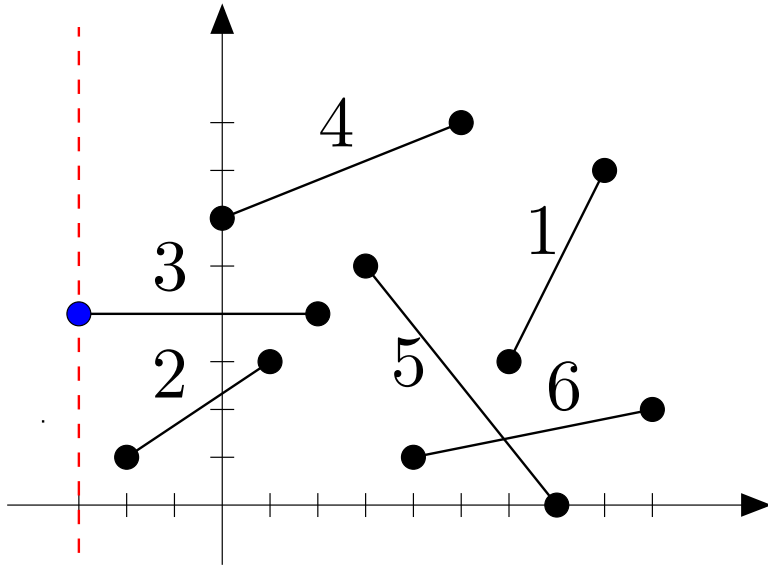
Descrição combinatória da linha



Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

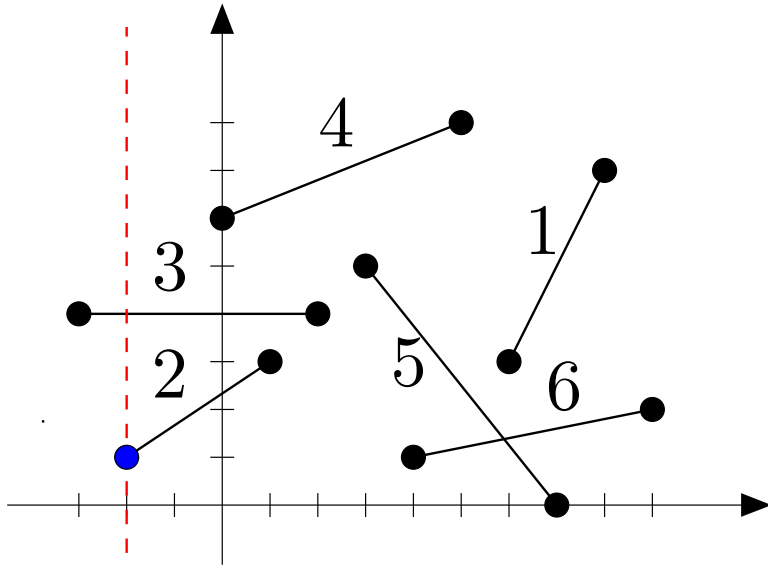


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

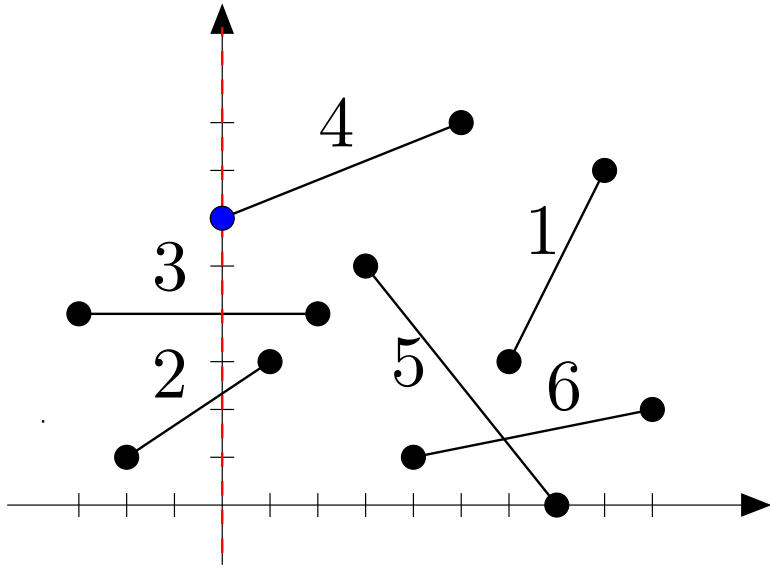


| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Alterações ocorrem nos **extremos dos segmentos**.

Estes são os **pontos eventos**.

Descrição combinatória da linha

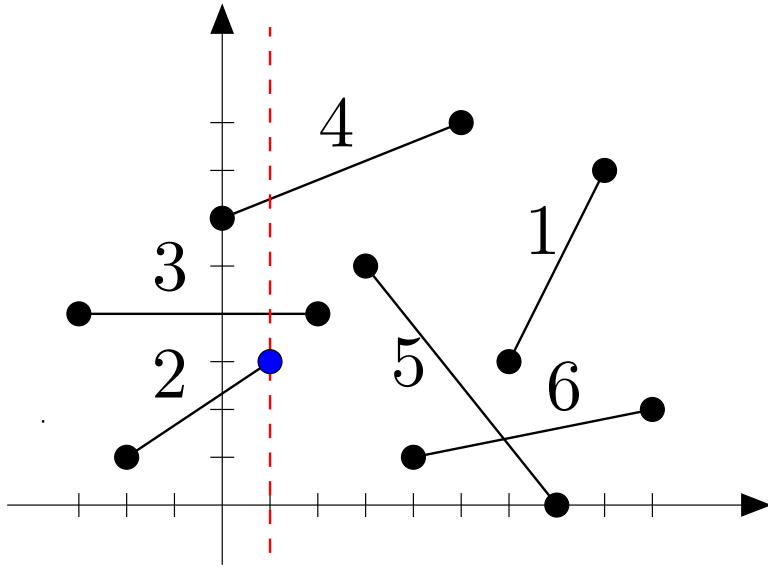


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

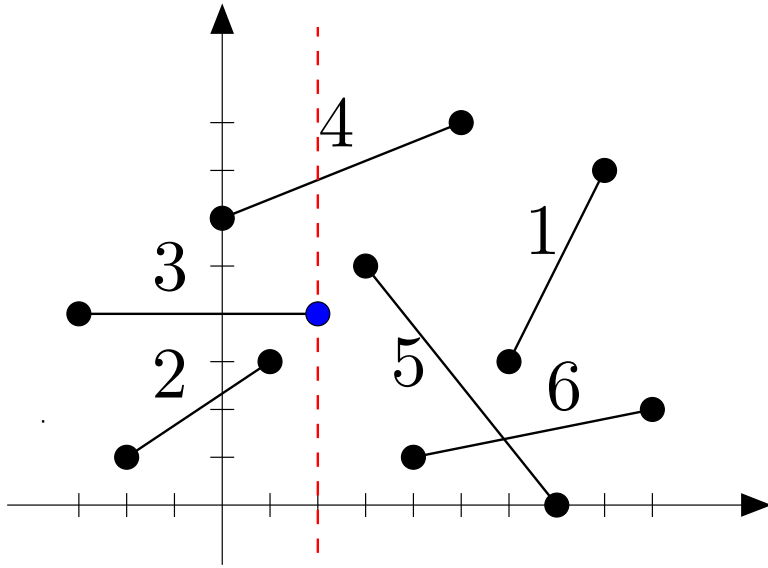


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

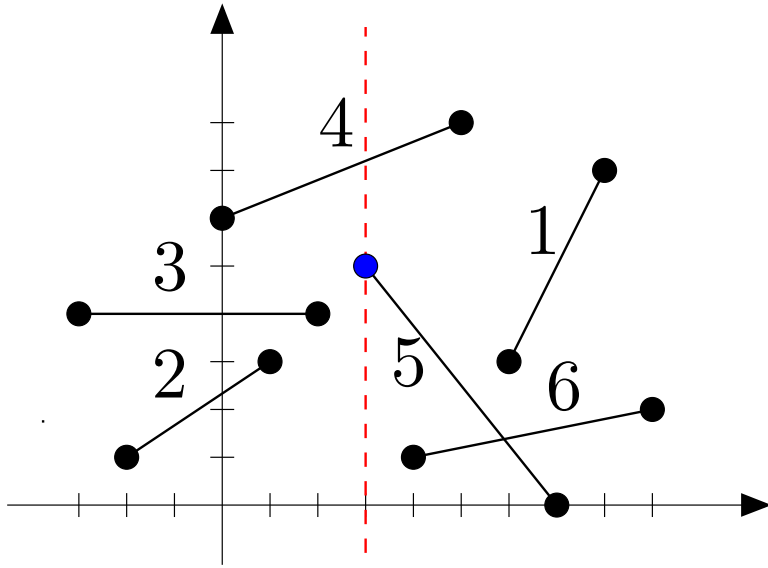


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

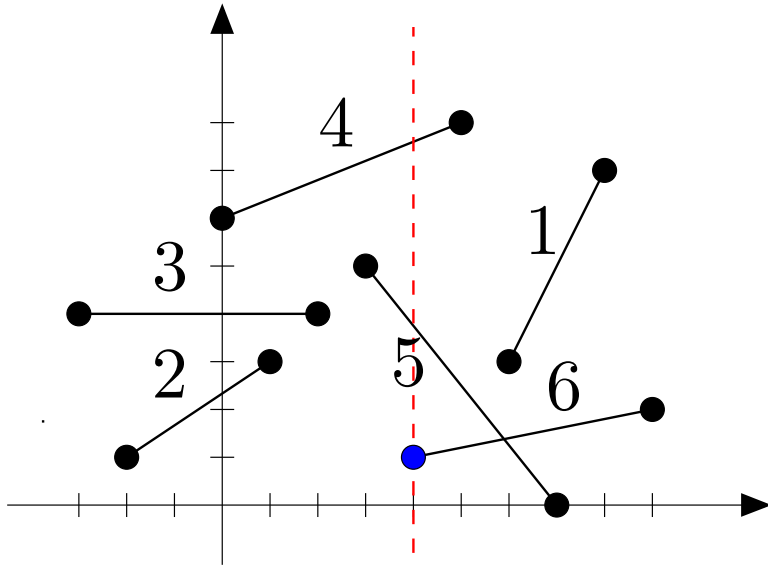


| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

Descrição combinatória da linha

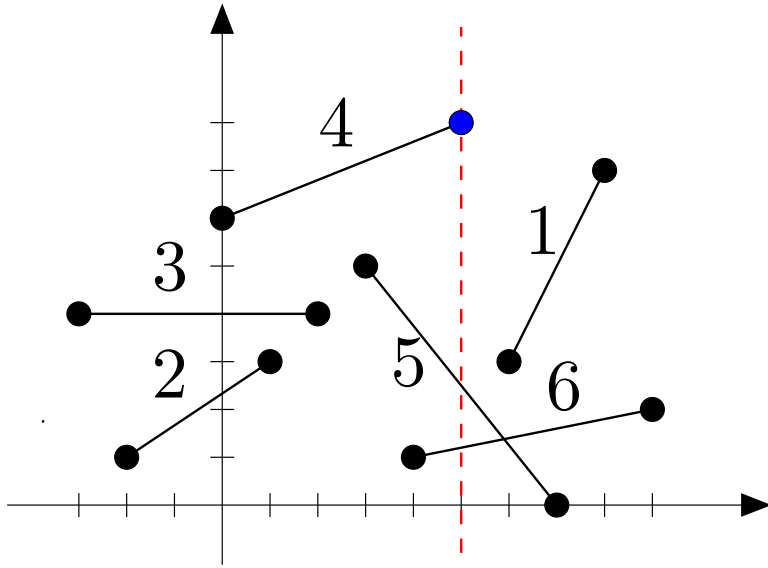


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

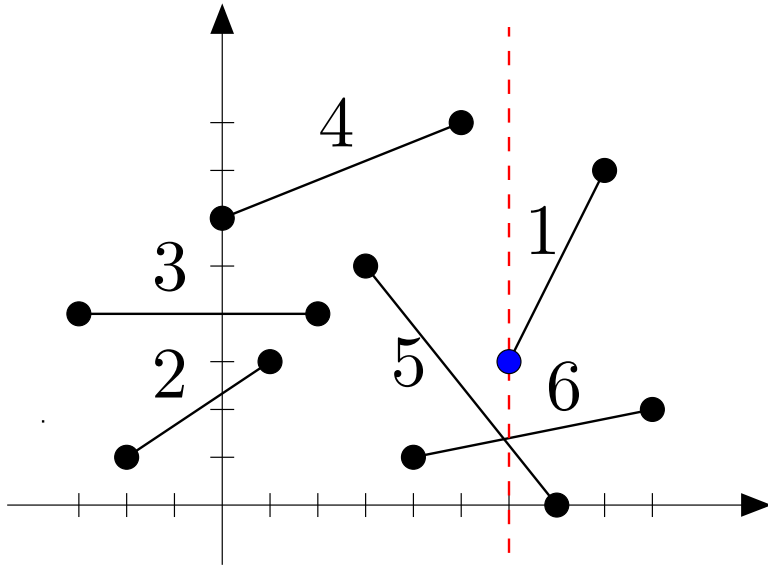


Alterações ocorrem
nos extremos dos segmentos.

Estes são
os pontos eventos.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

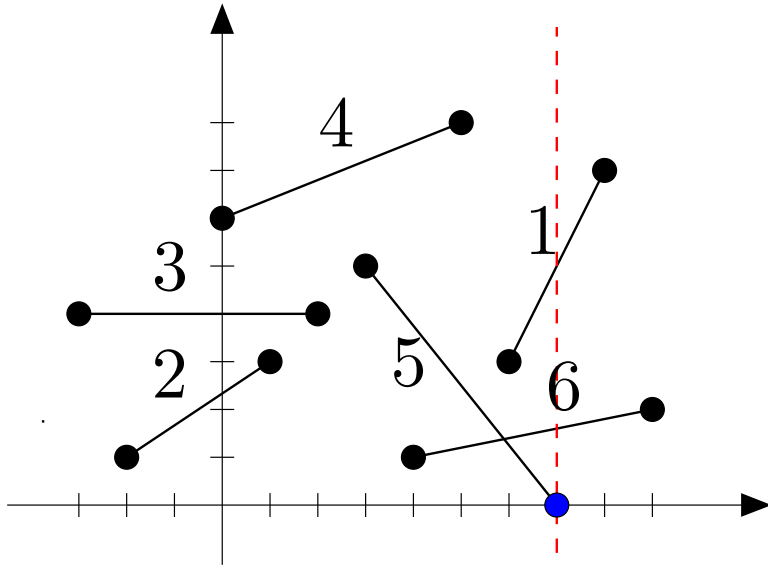


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

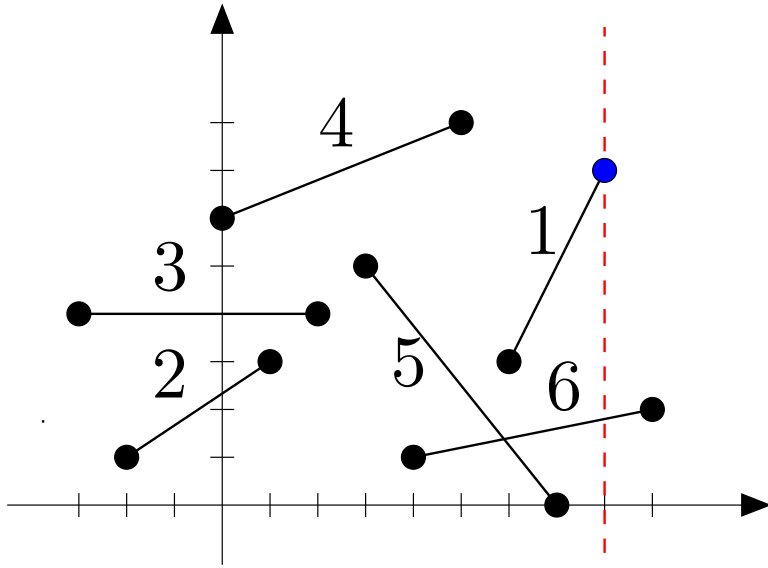


Alterações ocorrem
nos extremos dos segmentos.

Estes são
os pontos eventos.

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

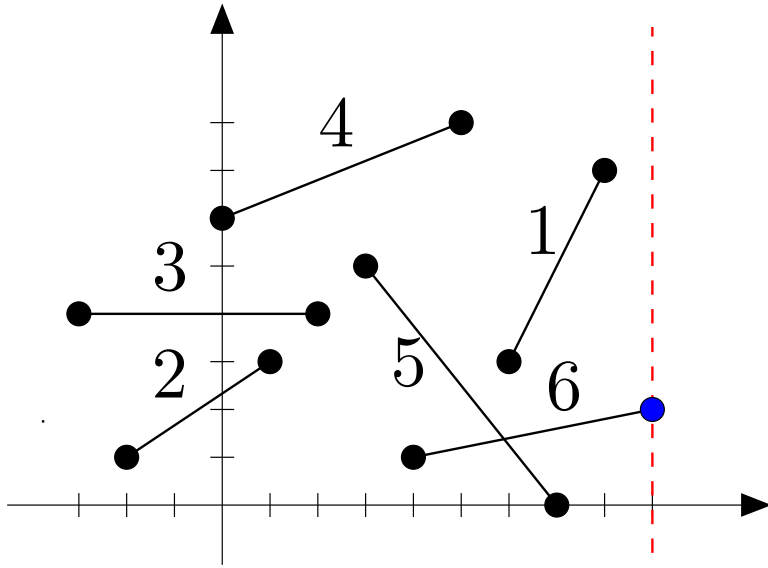


Alterações ocorrem
nos **extremos dos segmentos**.

Estes são
os **pontos eventos**.

| | |
|-------------------------------------|---------------------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

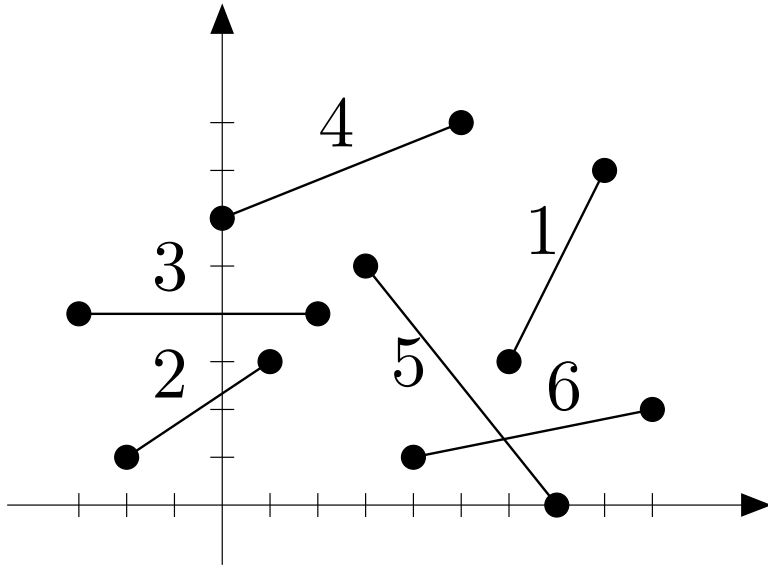


| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Alterações ocorrem nos **extremos dos segmentos**.

Estes são os **pontos eventos**.

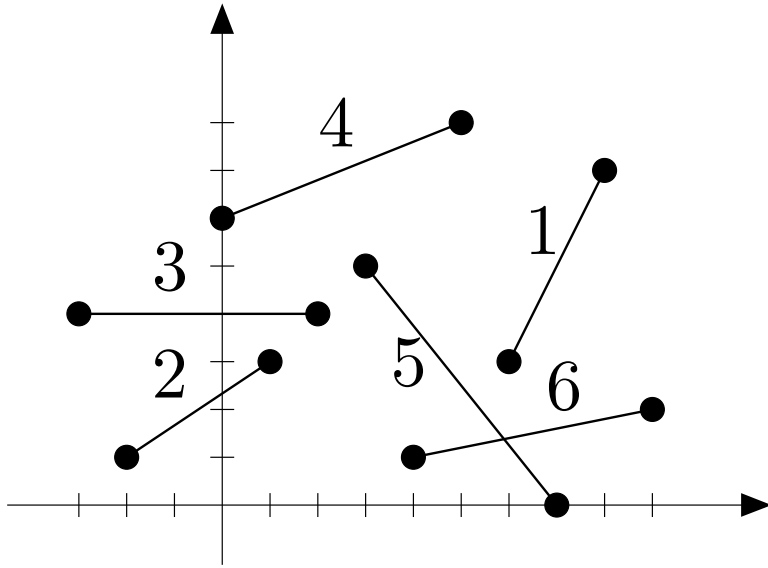
Descrição combinatória da linha



Como guardar
um destes conjuntos?

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha



Como guardar
um destes conjuntos?

Que operações ele sofre?

| | |
|-------------------|---------------|
| $x < -3$ | \emptyset |
| $-3 \leq x < -2$ | $\{3\}$ |
| $-2 \leq x < 0$ | $\{2, 3\}$ |
| $0 \leq x < 1$ | $\{2, 3, 4\}$ |
| $1 \leq x \leq 2$ | $\{3, 4\}$ |
| $2 < x < 3$ | $\{4\}$ |
| $3 \leq x < 4$ | $\{4, 5\}$ |
| $4 \leq x \leq 5$ | $\{4, 5, 6\}$ |
| $5 < x < 6$ | $\{5, 6\}$ |
| $6 \leq x \leq 7$ | $\{1, 5, 6\}$ |
| $7 < x \leq 8$ | $\{1, 6\}$ |
| $8 < x \leq 9$ | $\{6\}$ |
| $9 < x$ | \emptyset |

Descrição combinatória da linha

O conjunto dos segmentos na linha sofre **inserções** e **remoções**.

Descrição combinatória da linha

O conjunto dos segmentos na linha sofre **inserções** e **remoções**.

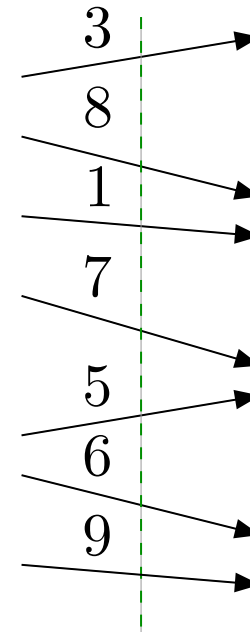
Como a linha vai nos ajudar a detectar interseção?

Descrição combinatória da linha

O conjunto dos segmentos na linha sofre **inserções** e **remoções**.

Como a linha vai nos ajudar a detectar interseção?

Ideia: testar interseção apenas entre segmentos “vizinhos na linha”.



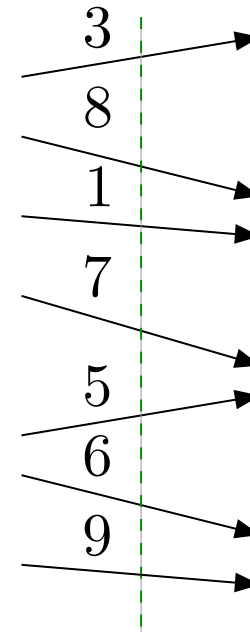
Descrição combinatória da linha

O conjunto dos segmentos na linha sofre **inserções** e **remoções**.

Como a linha vai nos ajudar a detectar interseção?

Ideia: testar interseção apenas entre segmentos “vizinhos na linha”.

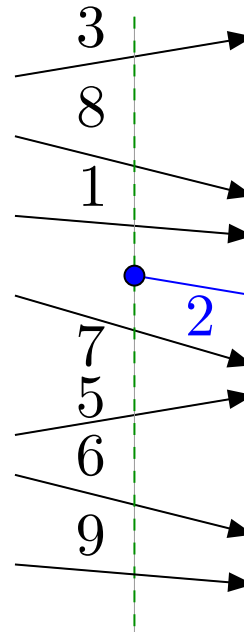
Para isso, mantemos os segmentos na linha **ordenados**.



Descrição combinatória da linha

Os segmentos ficam na ordem em que intersectam a **linha**.

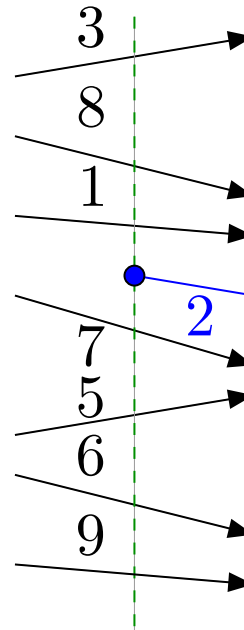
3 < 8 < 1 < 2 < 7 < 5 < 6 < 9



Descrição combinatória da linha

Os segmentos ficam na ordem em que intersectam a **linha**.

3 < 8 < 1 < 2 < 7 < 5 < 6 < 9

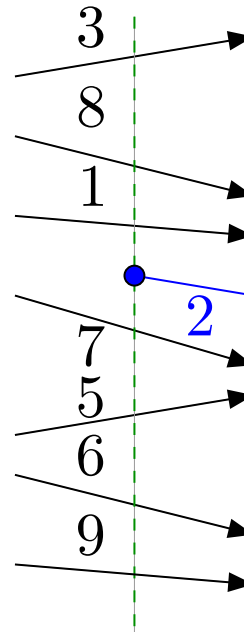


Ao **inserir** um segmento, testamos a interseção dele com seu **predecessor** e com seu **sucessor** na ordem.

Descrição combinatória da linha

Os segmentos ficam na ordem em que intersectam a **linha**.

3 < 8 < 1 < 2 < 7 < 5 < 6 < 9



Ao **removermos** um segmento, testamos a interseção de seu **predecessor** e com seu **sucessor** na ordem.

Descrição combinatória da linha

Que **estrutura de dados** podemos usar para armazenar a descrição combinatória da linha?

Que operações fazemos sobre ela?

Descrição combinatória da linha

Que **estrutura de dados** podemos usar para armazenar a descrição combinatória da linha?

Que **operações** fazemos sobre ela?

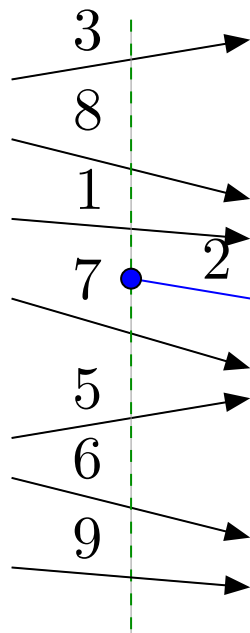
Inserção, remoção, predecessor e sucessor.

Descrição combinatória da linha

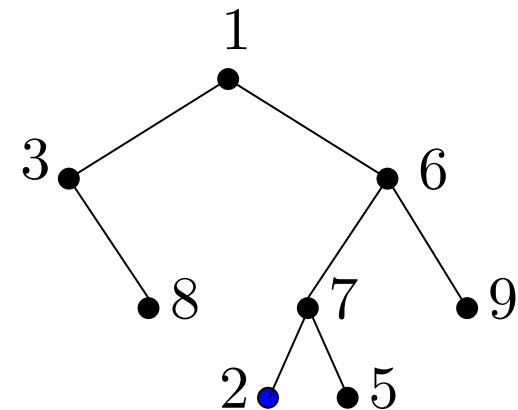
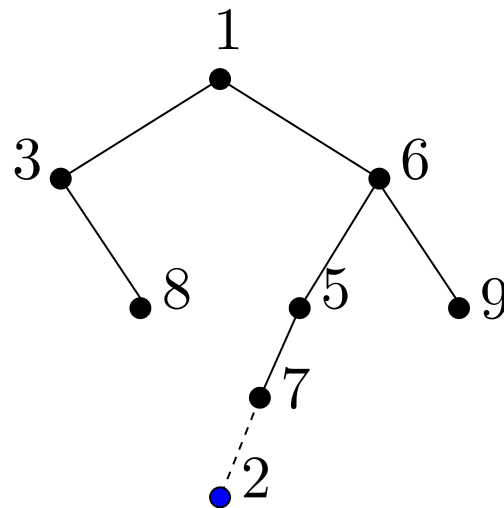
Que **estrutura de dados** podemos usar para armazenar a descrição combinatória da linha?

Que operações fazemos sobre ela?

Inserção, remoção, predecessor e sucessor.



$3 \prec 8 \prec 1 \prec 2 \prec 7 \prec 5 \prec 6 \prec 9$



Podemos usar uma ABBB por exemplo.
(Uma outra boa possibilidade é uma skip list.)