

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2009

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

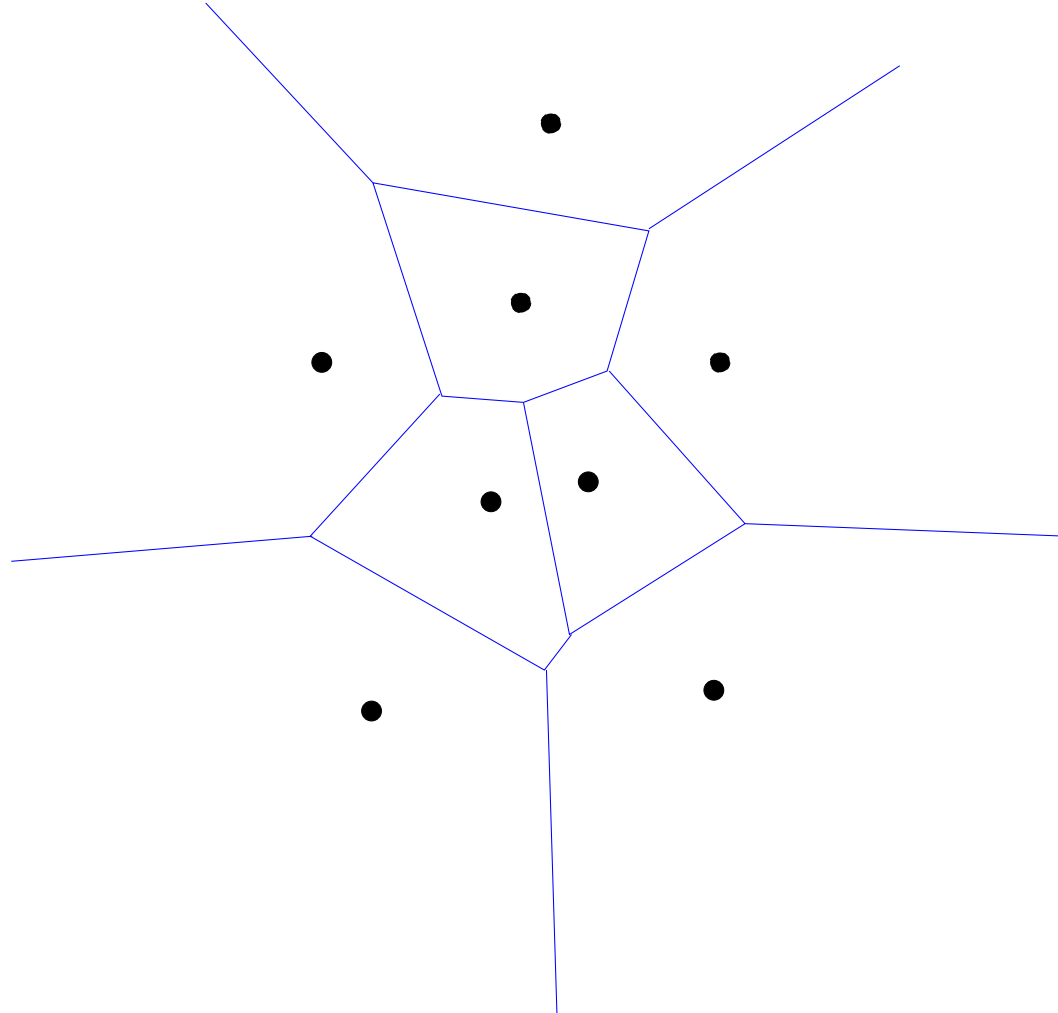


Diagrama de Voronoi

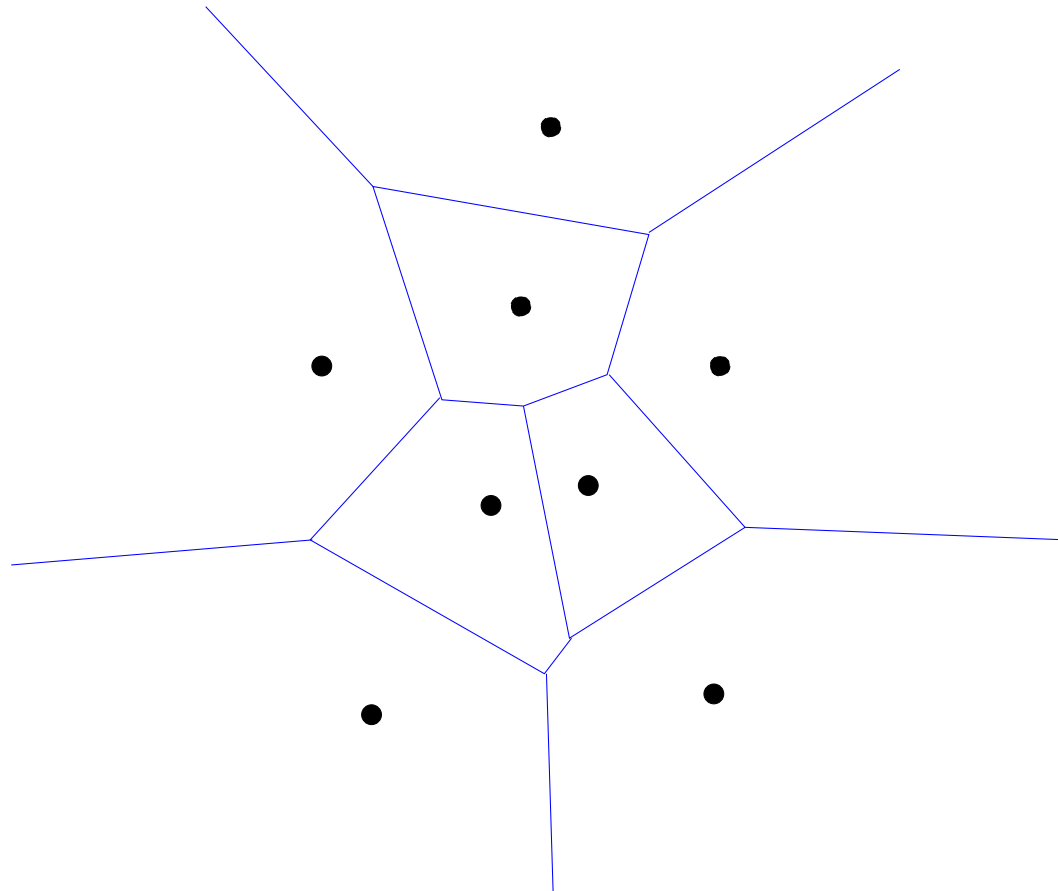
$$P := \{p_1, \dots, p_n\}$$

Célula de p_i :

$$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$$

Diagrama de Voronoi de P : $\text{Vor}(P)$

subdivisão do plano nas células $\mathcal{V}(p_1), \dots, \mathcal{V}(p_n)$.



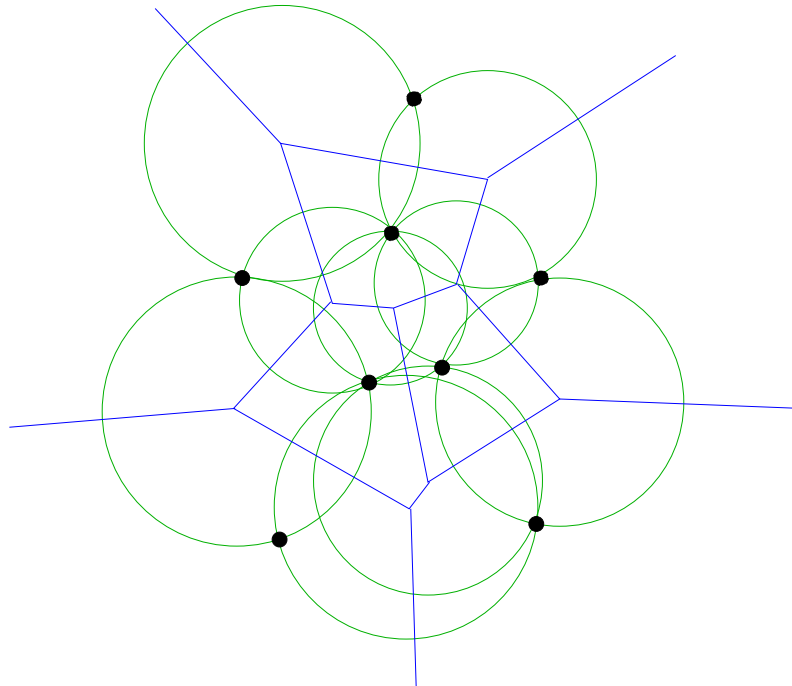
Arestas e vértices de $Vor(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:

(i) Ponto q é vértice de $Vor(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).

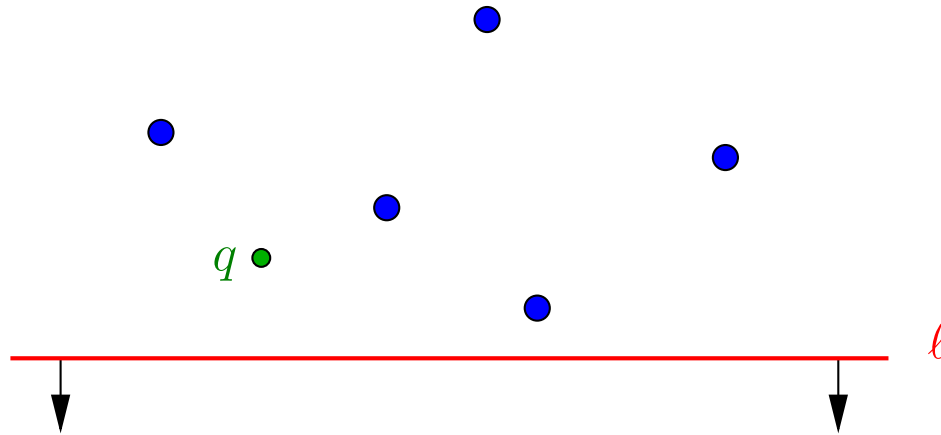
(ii) A reta bissetora entre os pontos p_i e p_j define uma aresta de $Vor(P)$ sse existe um ponto q nela tq $C_P(q)$ contém p_i e p_j (em sua fronteira).



Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

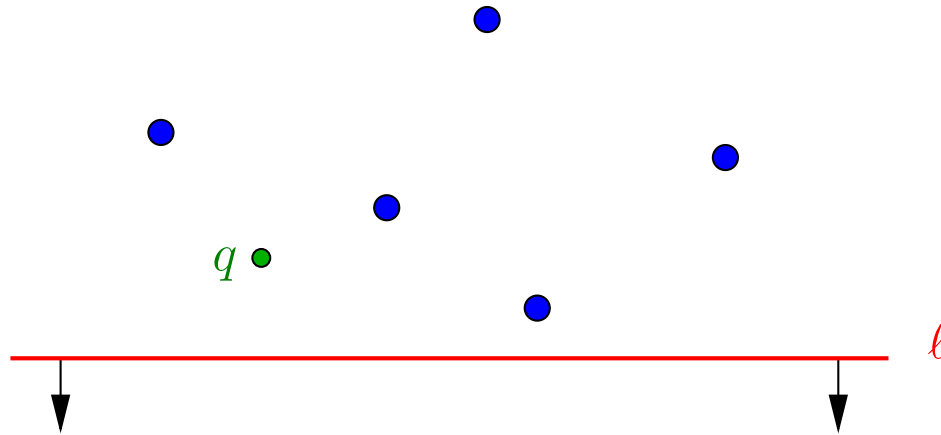
Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?



Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?

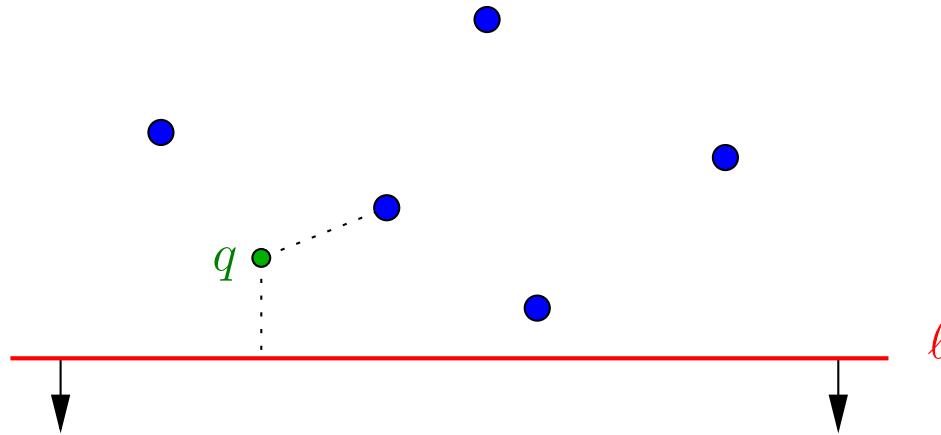


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ .

Algoritmo de Fortune

ℓ^+ : semiplano acima da linha de varredura ℓ

Para quais pontos q em ℓ^+
já conhecemos o ponto de P mais próximo a q ?

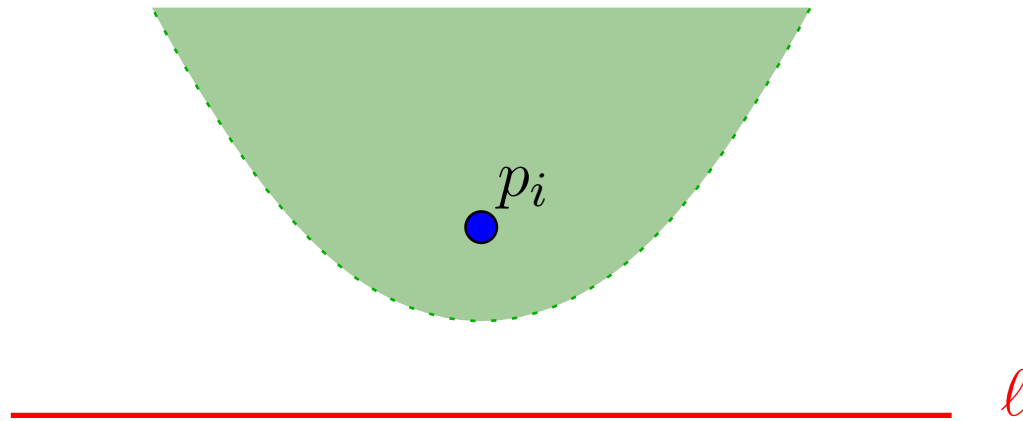


A distância de q a qualquer ponto abaixo de ℓ
é pelo menos a distância de q a ℓ .

Se q está mais próximo de um p_i acima de ℓ do que de ℓ ,
então q está em $\mathcal{V}(p_i)$.

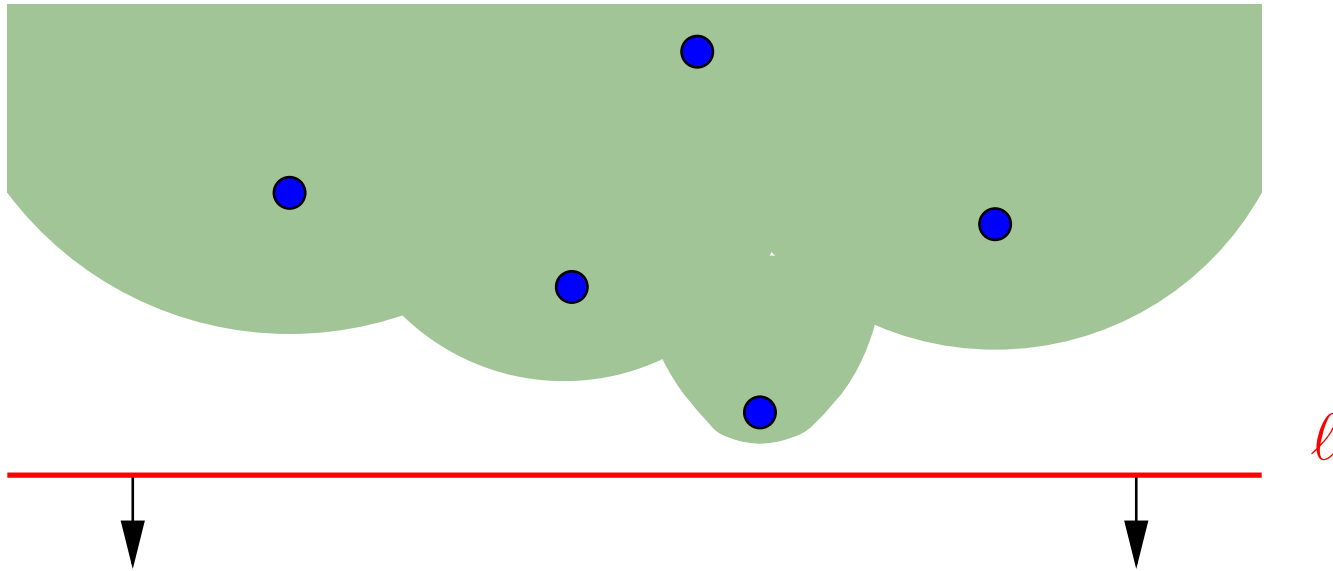
Algoritmo de Fortune

O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Algoritmo de Fortune

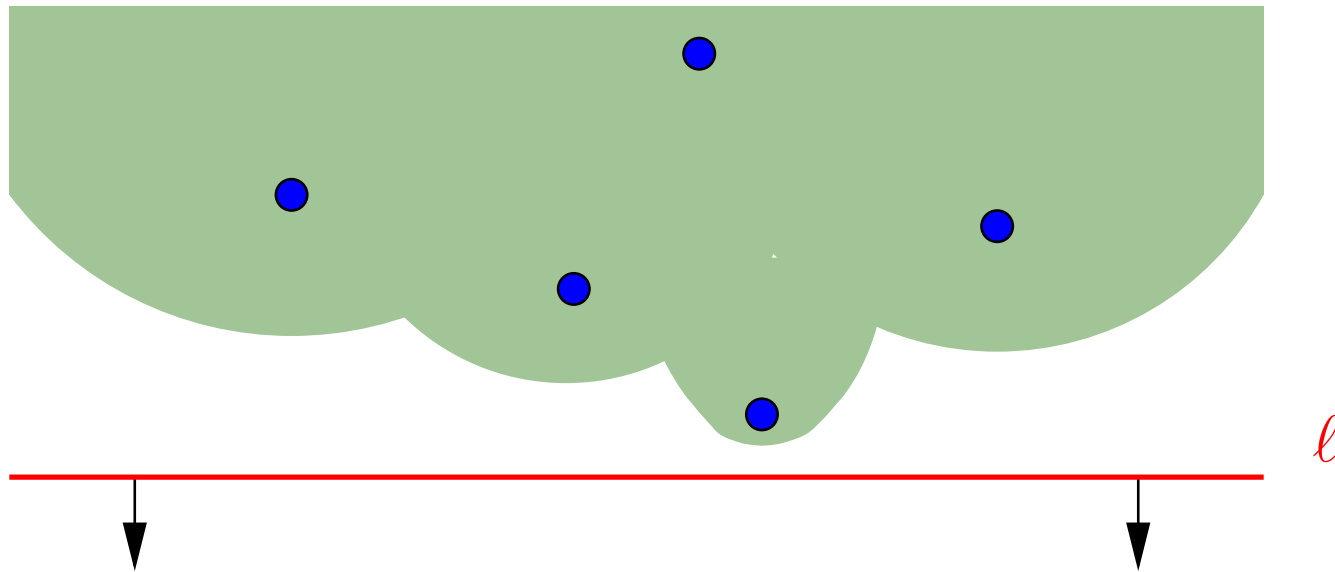
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\text{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**,

Algoritmo de Fortune

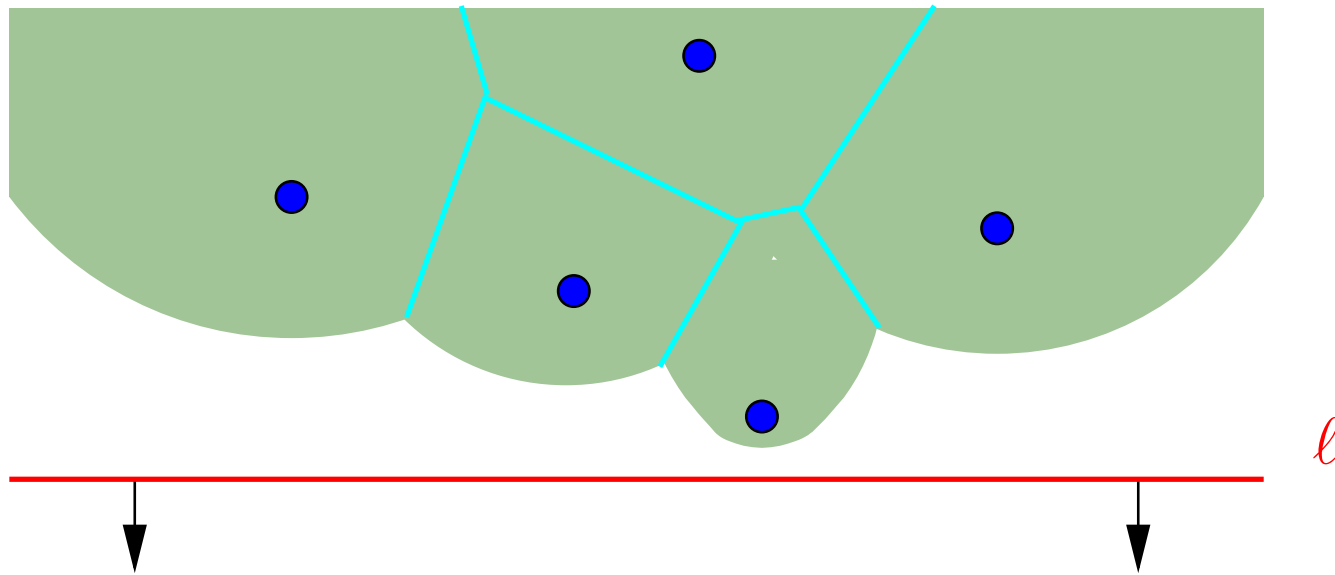
O conjunto dos pontos mais próximos a p_i do que ℓ é delimitado por uma **parábola**.



Assim, a região de ℓ^+ onde $\text{Vor}(P)$ é conhecido é delimitada por um **conjunto de parábolas**, ou **arcos parabolóides**, que definem a chamada **linha da praia**.

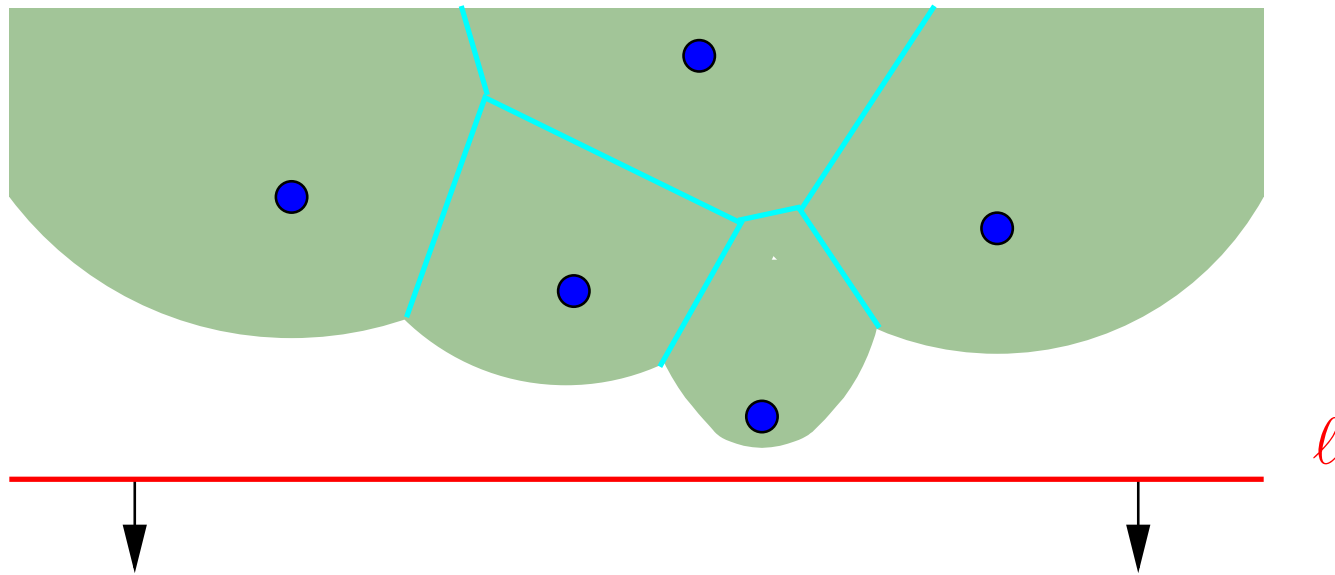
Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\text{Vor}(P)$.



Algoritmo de Fortune

Pontos de encontro entre duas parábolas na linha da praia estão sempre sobre alguma aresta de $\text{Vor}(P)$.



Esses pontos de encontro desenham $\text{Vor}(P)$.
Vejam a animação do algoritmo.

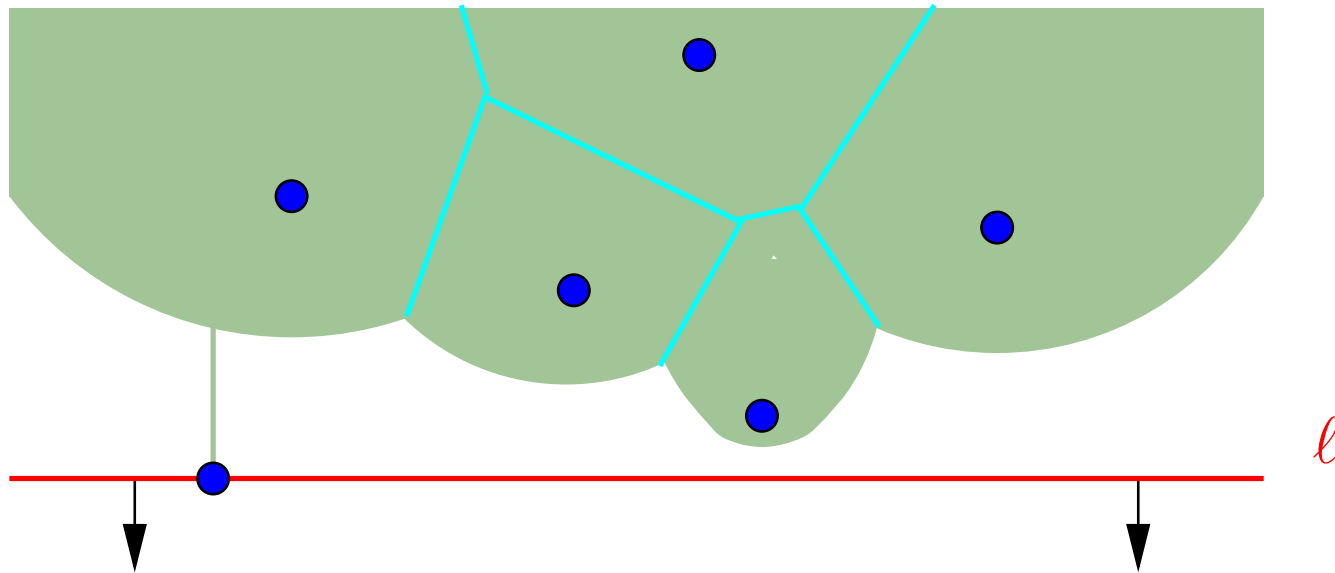
Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

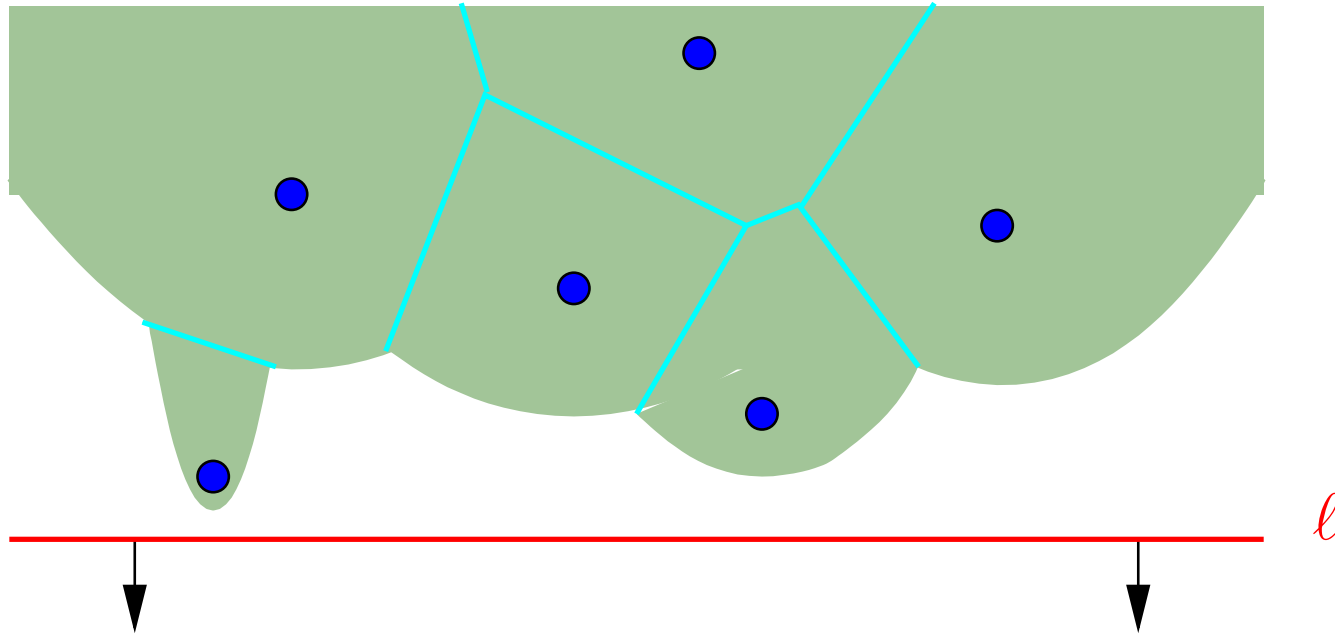
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

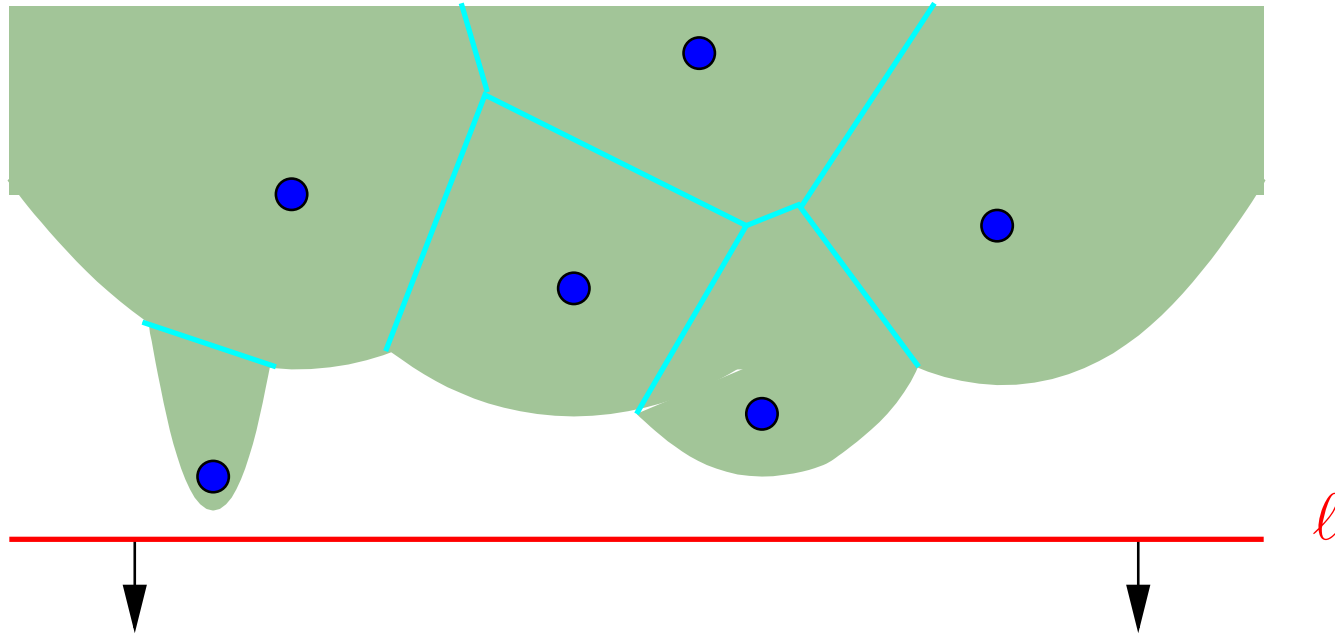
Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .

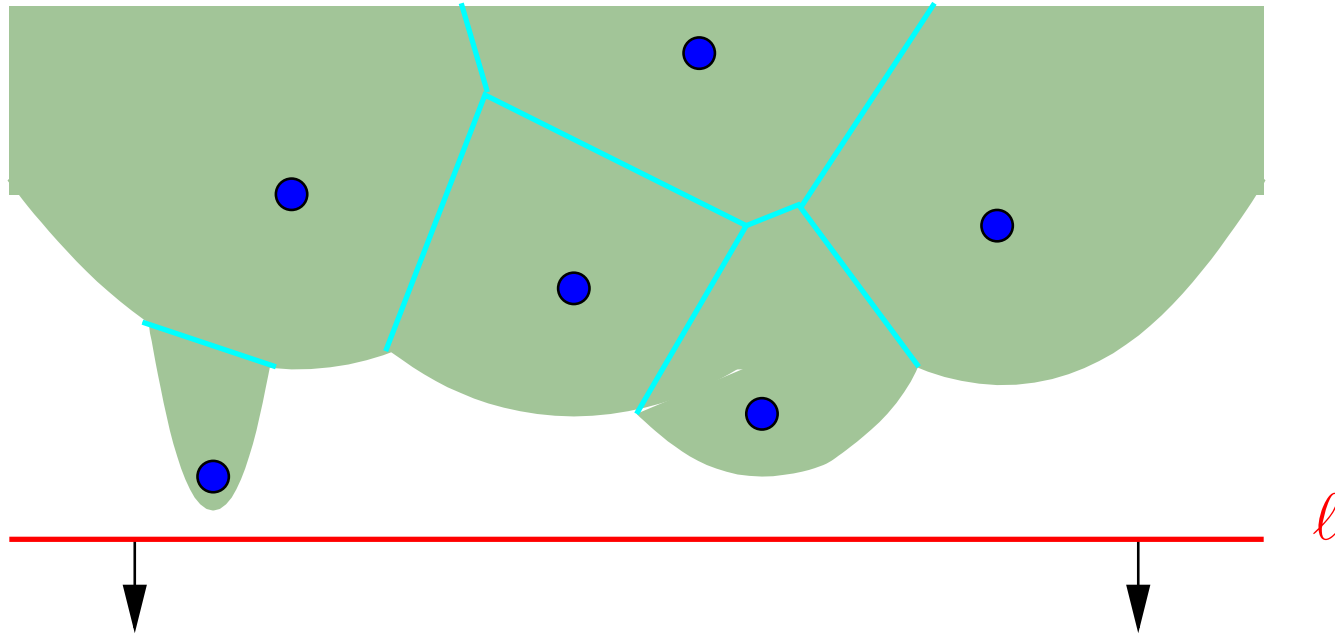


Note que o mesmo arco aparece mais de uma vez na linha.

Algoritmo de Fortune

Como a **linha da praia** se altera com o mover de ℓ ?

Um arco novo aparece na linha quando ℓ passa por um ponto de P .



Pontos de P são **pontos eventos**.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quantos arcos há na linha?

Lema. O único jeito de surgir um novo arco na linha da praia é a linha de varredura passar por um ponto de P .

Um tal ponto evento é chamado de **evento-ponto**.

Então há no máximo $2n - 1$ arcos na linha:
cada novo arco pode quebrar um velho em dois.

E quando um arco sai da linha de praia?

Quando dois pontos de quebra entre arcos se encontram!
Veja a animação.

Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

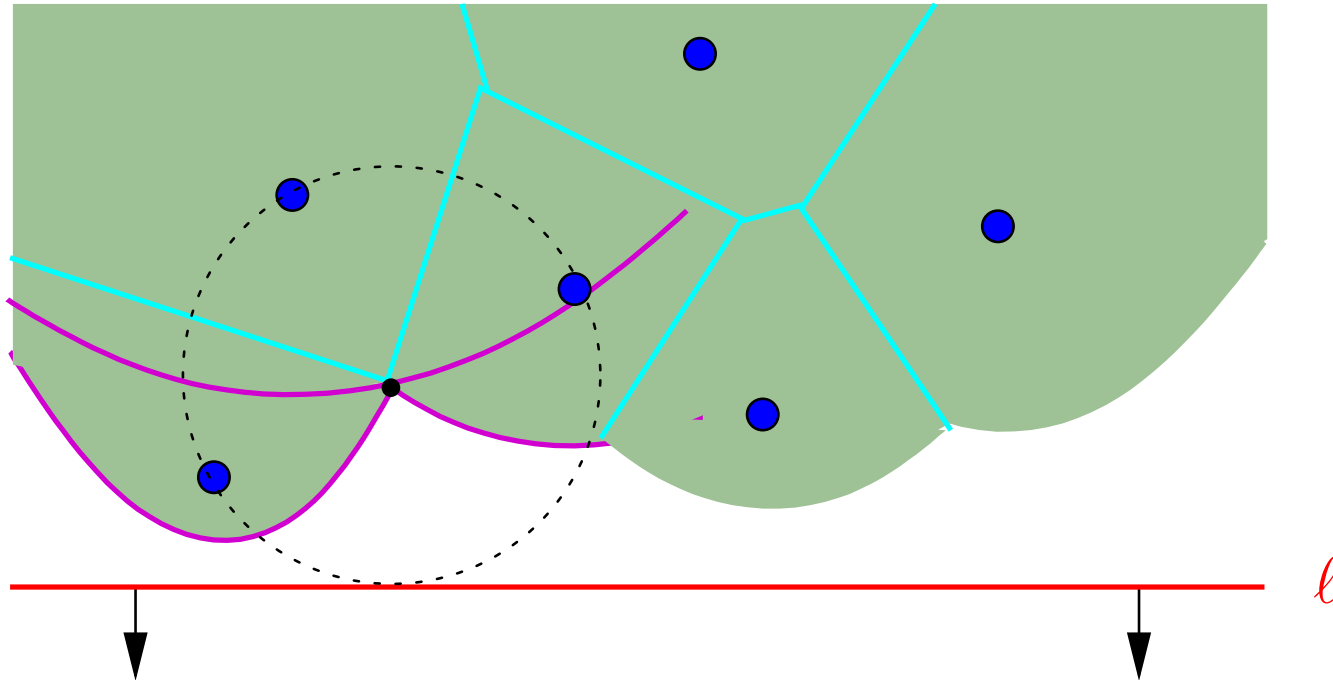
Quando isso ocorre?

Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.

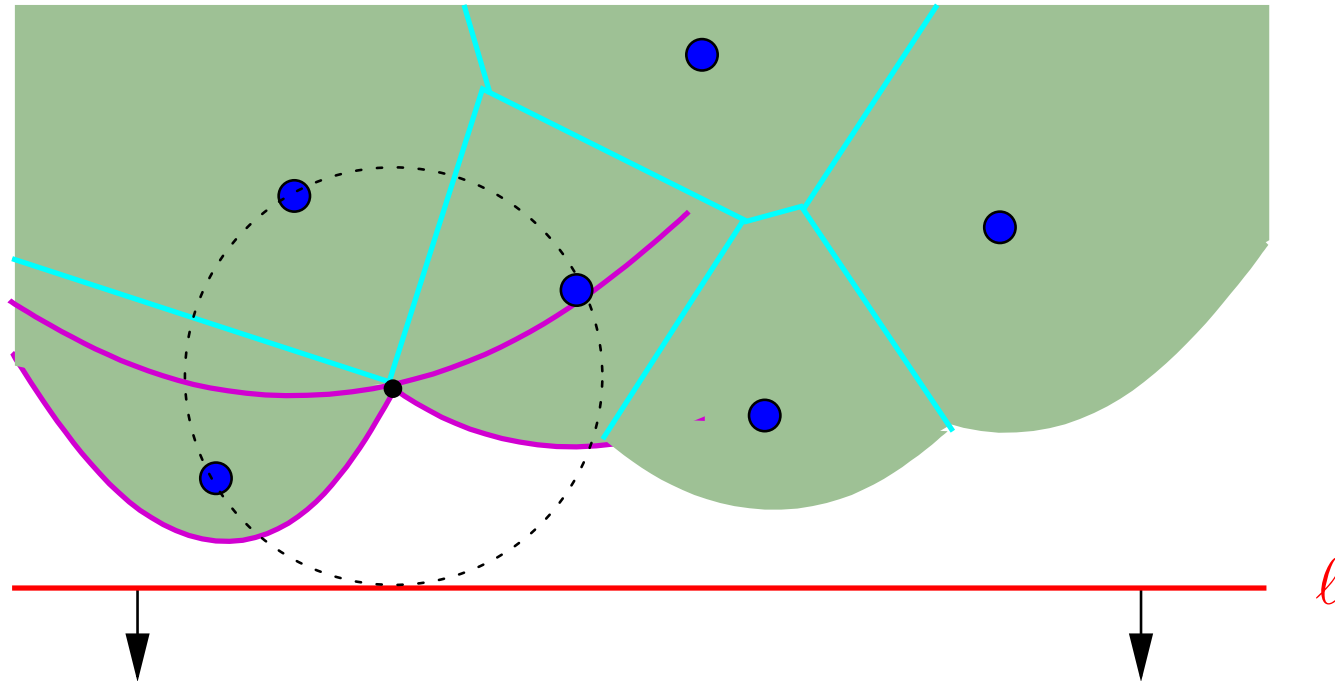


Segundo tipo de ponto evento

Tal ponto evento indica o momento em que um arco desaparece da **linha da praia**.

Quando isso ocorre?

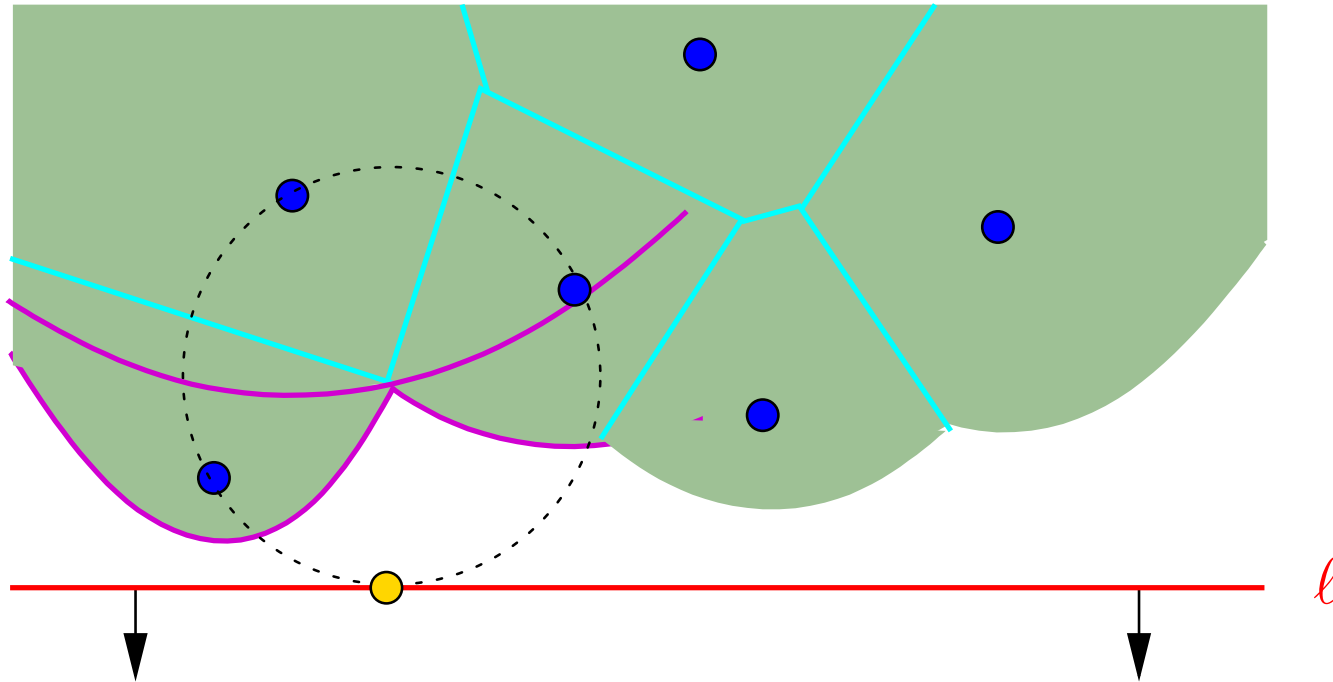
Quando três parábolas passam por um mesmo ponto.



Esse ponto está equidistante de três pontos de P e é um vértice de $\text{Vor}(P)$.

Segundo tipo de ponto evento

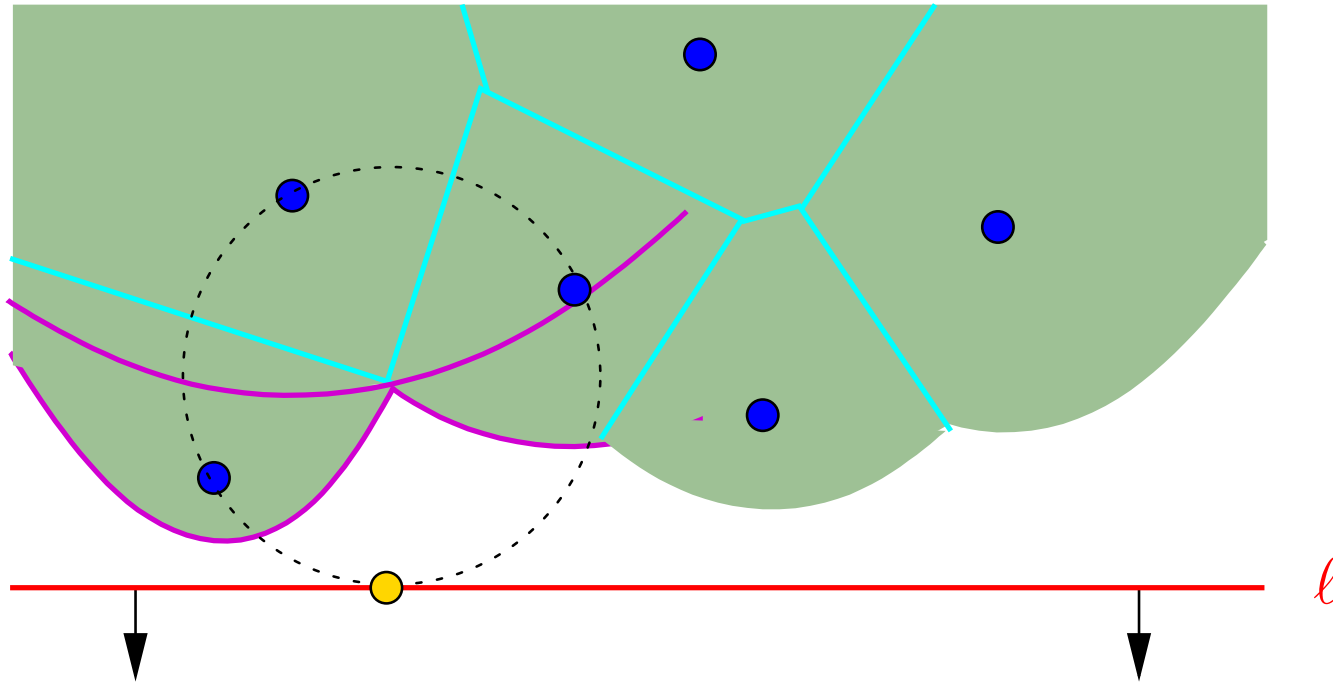
Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

Segundo tipo de ponto evento

Quando três parábolas consecutivas da linha da praia passam por um mesmo ponto.



O ponto mais baixo do círculo que passa pelos três pontos, é um ponto evento chamado de **evento-círculo**.

Lema. O único jeito de um arco desaparecer da linha de praia é por meio de um evento-círculo.