Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

`http://www.ime.usp.br/~cris/`

segundo semestre de 2009

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

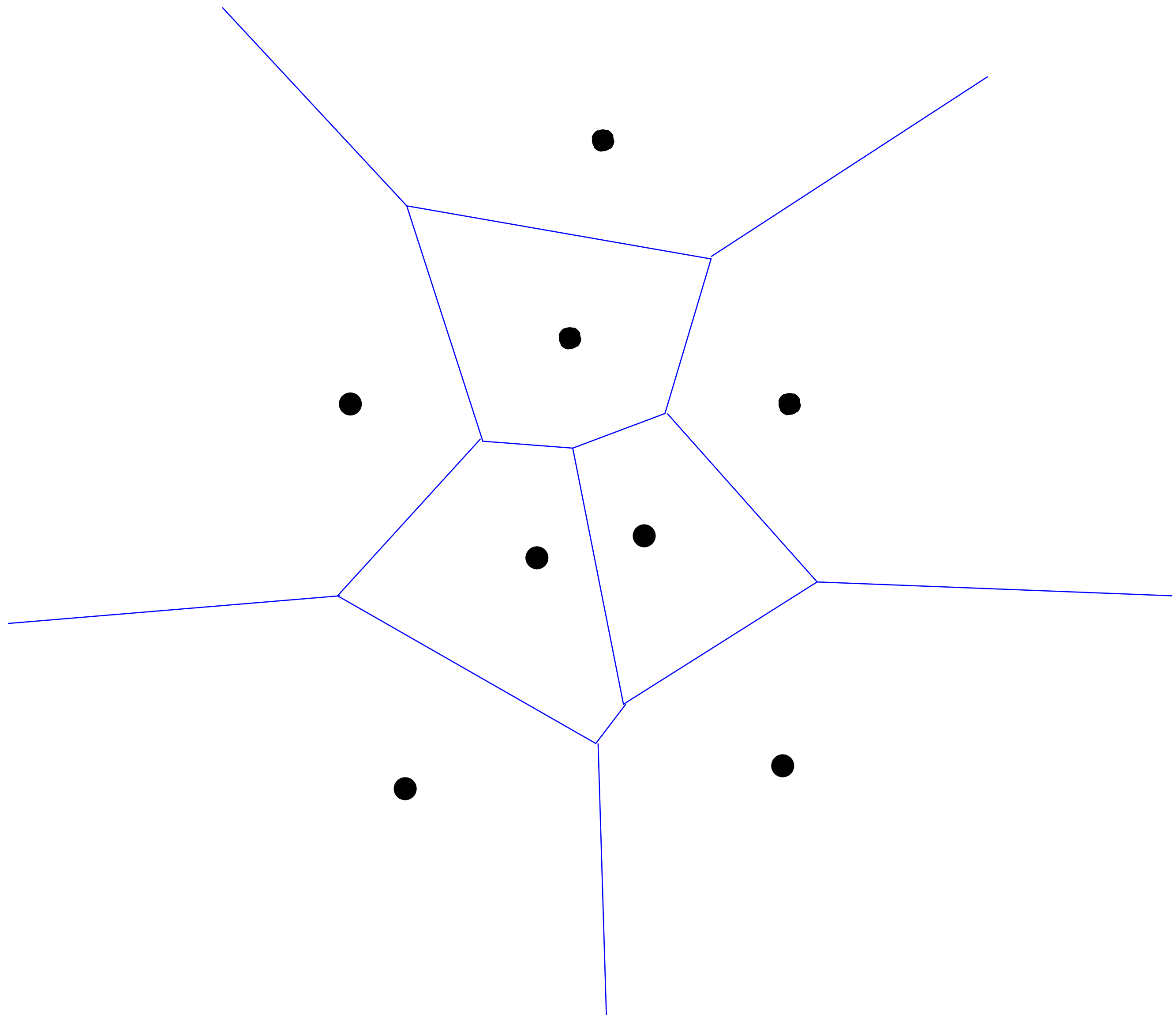
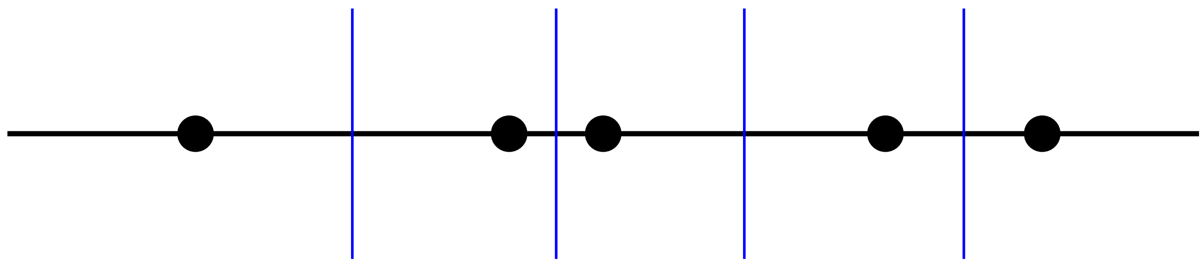


Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:

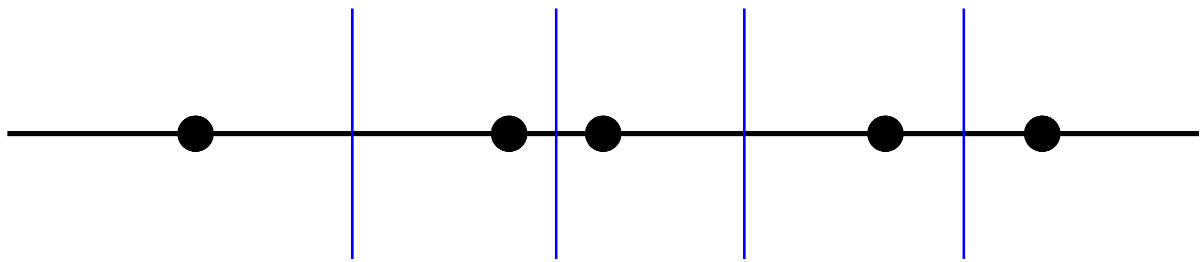


O diagrama são várias linhas paralelas.

Diagrama de Voronoi

Dados endereços de agências de correio, determinar qual é a região da cidade que fica mais próxima de cada agência.

Versão unidimensional:



O diagrama são várias linhas paralelas.

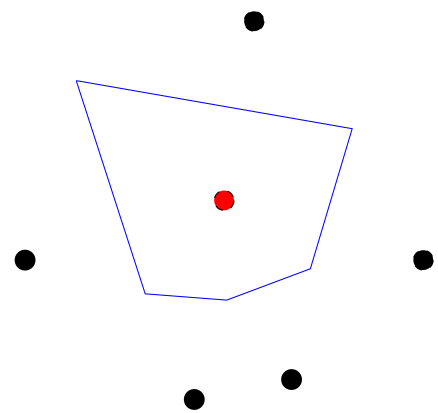
Versão bidimensional:

Pode ser construída em tempo $\mathrm{O}(n \lg n)$,
onde n é o número de pontos dados.

- Divisão e conquista: Shamos e Hoye (complexo)
- Linha de varredura: Fortune (elegante e simples)

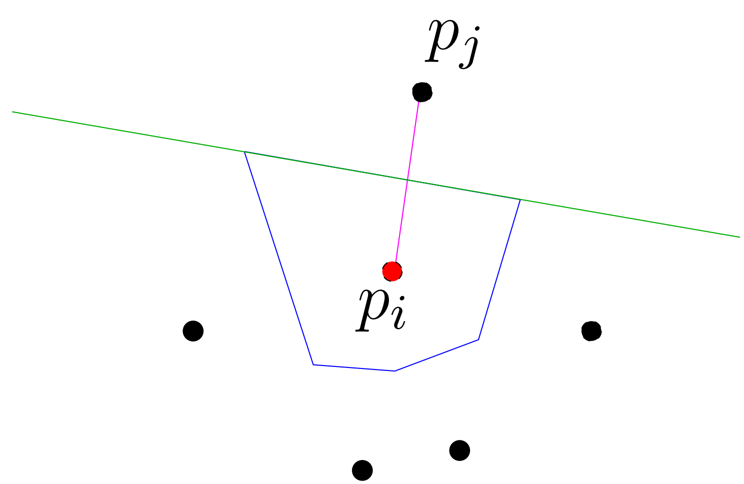
Notação

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$



Notação

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$

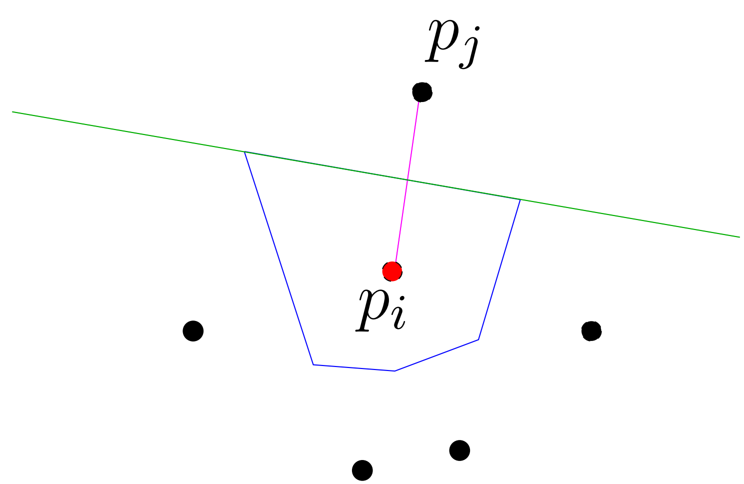


$h(p, q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p.

$\mathcal{V}(p_i) = \cap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$

Notação

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \textsc{Dist}(q, p_i) < \textsc{Dist}(q, p_j)$ para todo $j \neq i\}$



$h(p, q)$: semiplano determinado pela reta bissetora entre p e q que contém o ponto p.

$\mathcal{V}(p_i) = \cap_{j \neq i} h(p_i, p_j)$

Logo $\mathcal{V}(p_i)$ é convexo (interseção de $n-1$ semiplanos), com no máximo $n-1$ arestas e vértices.

Diagrama de Voronoi

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$

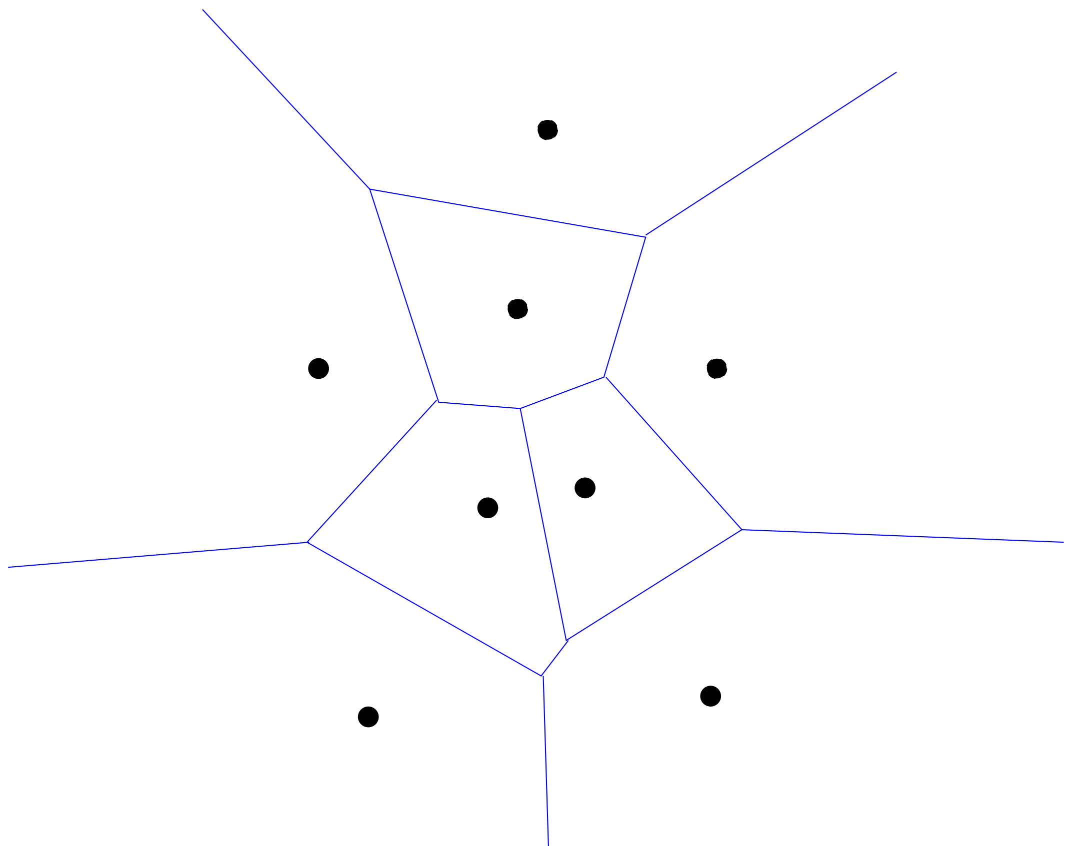
Célula de p_i:
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$

Diagrama de Voronoi

$P := \{p_1, \ldots, p_n\}$

Célula de p_i:
$\mathcal{V}(p_i) := \{q : \text{DIST}(q, p_i) < \text{DIST}(q, p_j) \text{ para todo } j \neq i\}$

Diagrama de Voronoi de P: $\text{Vor}(P)$
subdivisão do plano nas células $\mathcal{V}(p_1), \ldots, \mathcal{V}(p_n)$.



Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

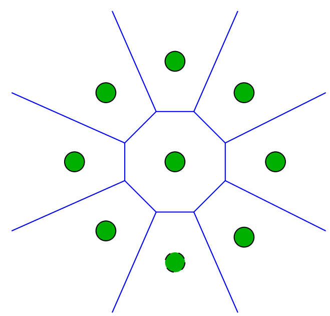
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

Cada célula tem $\mathrm{O}(n)$ arestas.

Algumas podem pode ter $\Theta(n)$ arestas.



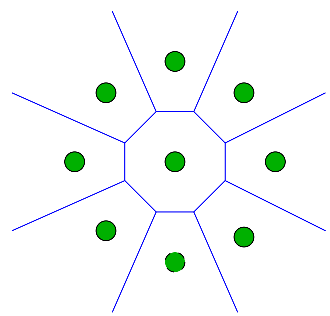
Complexidade do Diagrama de Voronoi

O diagrama tem vértices e arestas.

Qual pode ser o seu tamanho máximo em função de n?

Cada célula tem $\mathrm{O}(n)$ arestas.

Algumas podem pode ter $\Theta(n)$ arestas.



Teorema:
Para $n \geq 3$, o número de vértices no diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos no plano é no máximo $2n - 5$, e o número de arestas é no máximo $3n - 6$.

Arestas e vértices de $Vor(P)$

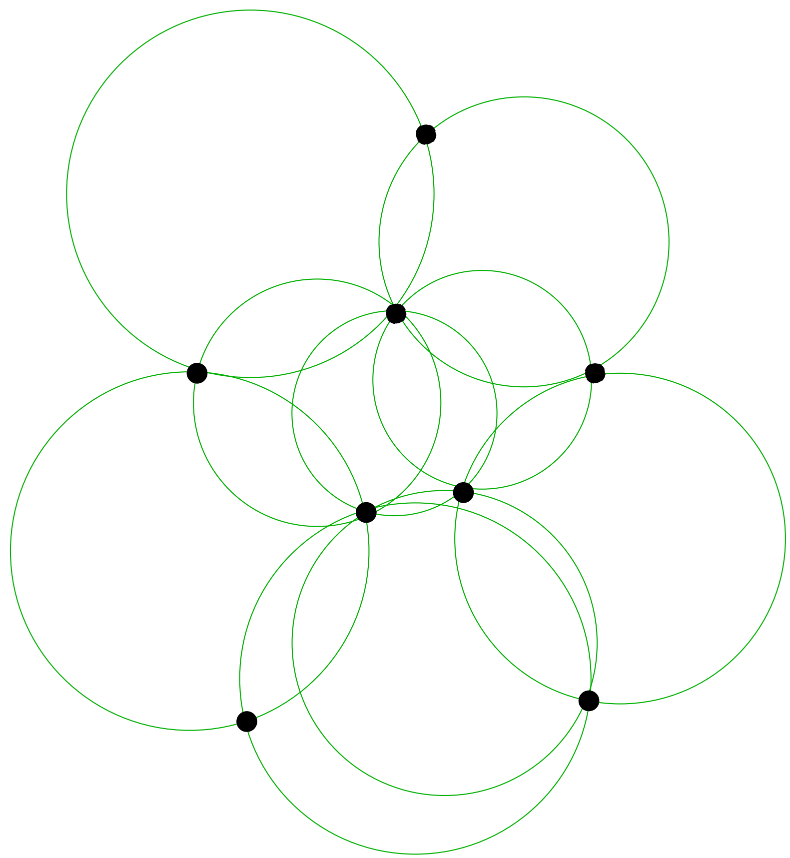
$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Arestas e vértices de $Vor(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:

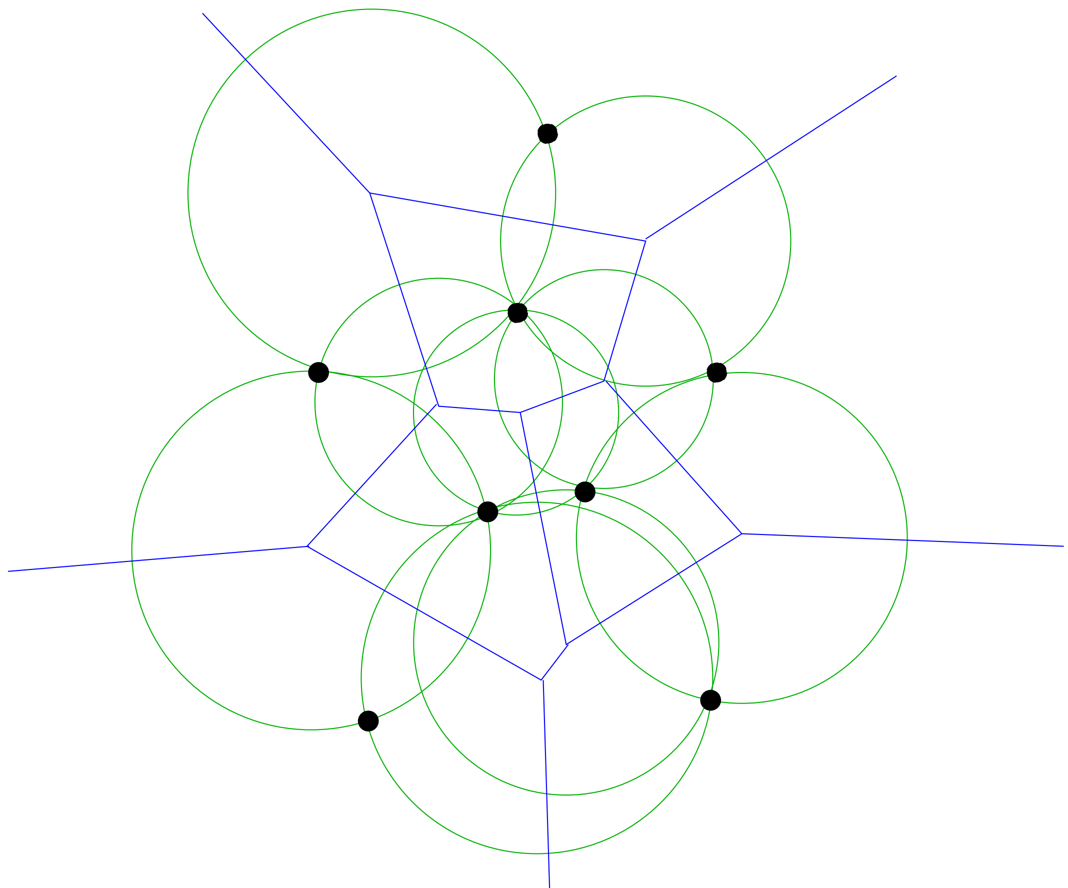
(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).



Arestas e vértices de $Vor(P)$

$C_P(q)$: círculo centrado em q o maior possível que não contenha pontos de P no seu interior.

Teorema:
(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).



Arestas e vértices de $\mathrm{Vor}(P)$

Teorema:
(i) Ponto q é vértice de $\mathrm{Vor}(P)$ sse $C_P(q)$ contém três ou mais pontos de P (em sua fronteira).
(ii) A reta bissetora entre os pontos p_i e p_j define uma aresta de $\mathrm{Vor}(P)$ sse existe um ponto q nela tq $C_P(q)$ contém p_i e p_j (em sua fronteira).