

Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2009

Ponto q está no polígono?

P convexo

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

Algo mais rápido?

Ponto q está no polígono?

P convexo

Algoritmo trivial:

verifique se q está à esquerda de todas as arestas de P

Complexidade: linear

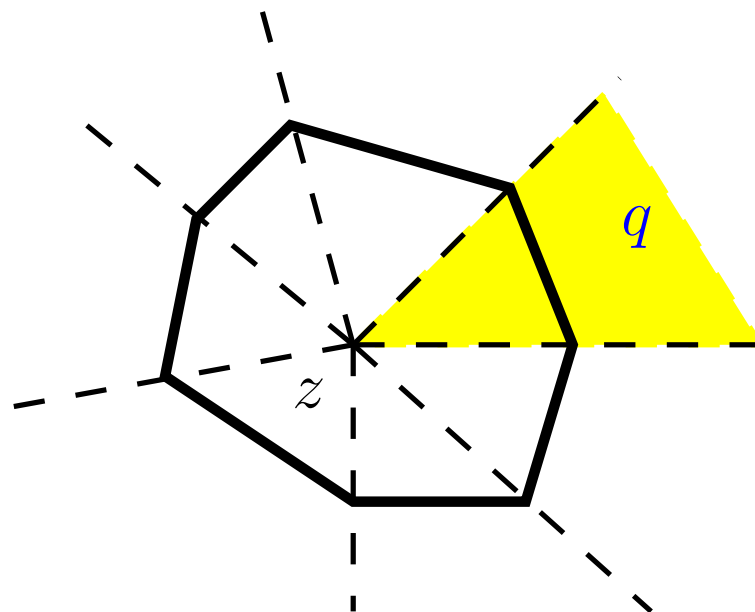
Algo mais rápido?

Várias *queries*:

pré-processamento linear e *queries* usando busca binária!

Procure a fatia onde q está.

q está à esquerda ou à direita da aresta na fatia?



Ponto q está no polígono?

E se P não for **convexo**?

Ponto q está no polígono?

E se P não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

Ponto q está no polígono?

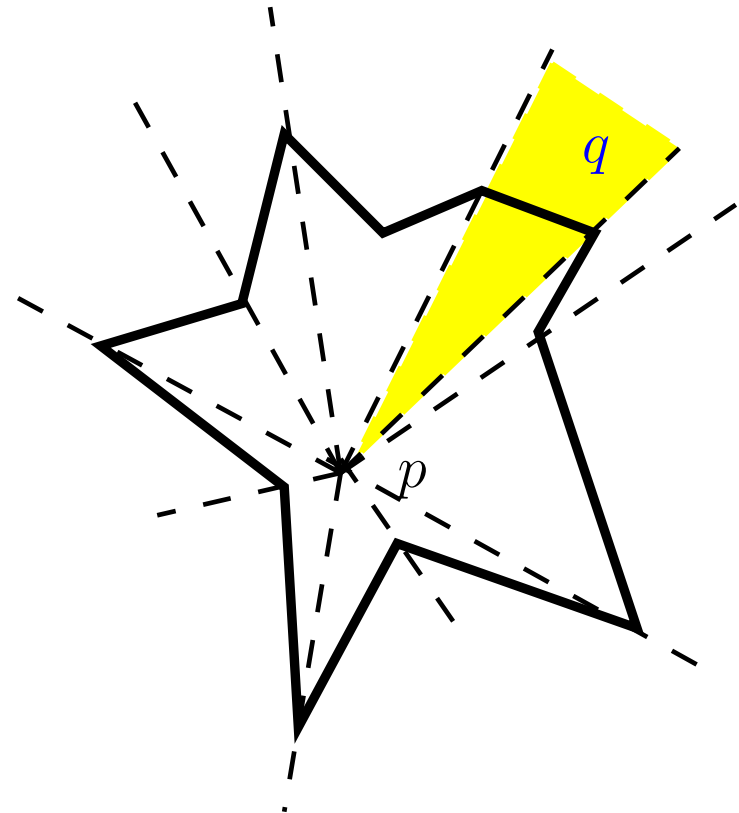
E se P não for **convexo**?

Os dois algoritmos anteriores funcionam para alguns polígonos não convexos.

Quais?

Polígonos estrela
(star polygon)

P tem um ponto p que enxerga todos os outros pontos de P .



Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Dois algoritmos **lineares**:

- número de voltas (**winding number**)
- cruzamentos de um raio (**ray crossings**)

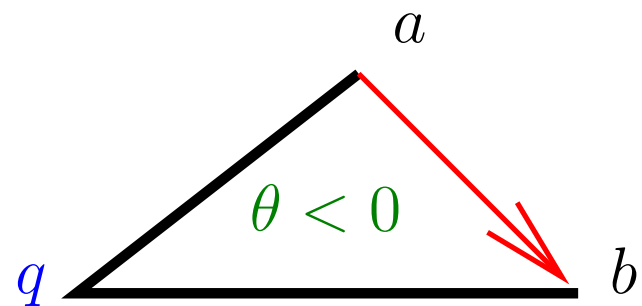
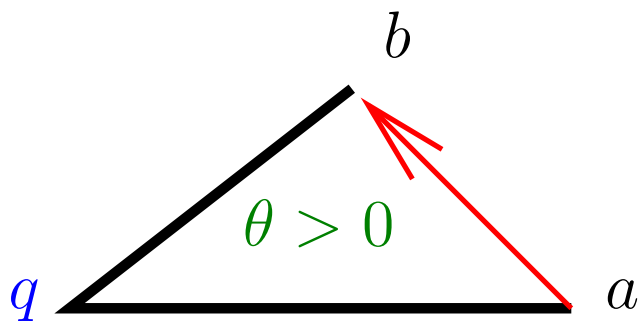
Polígonos arbitrários

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Dois algoritmos **lineares**:

- número de voltas (**winding number**)
- cruzamentos de um raio (**ray crossings**)

Ângulo **com sinal** de \vec{ab} em relação a q :



Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de δP em relação a q .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number: essa soma dividida por 2π

Winding number

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Calcule a soma dos ângulos com sinal de cada aresta de δP em relação a q .

Esse número é ou zero ou 2π .

Winding number: essa soma dividida por 2π

Se o winding number é zero, q não está em P .
Senão q está em P .

Ray crossings

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

Ray crossings

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes que R cruza δP ?

Ray crossings

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes que R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

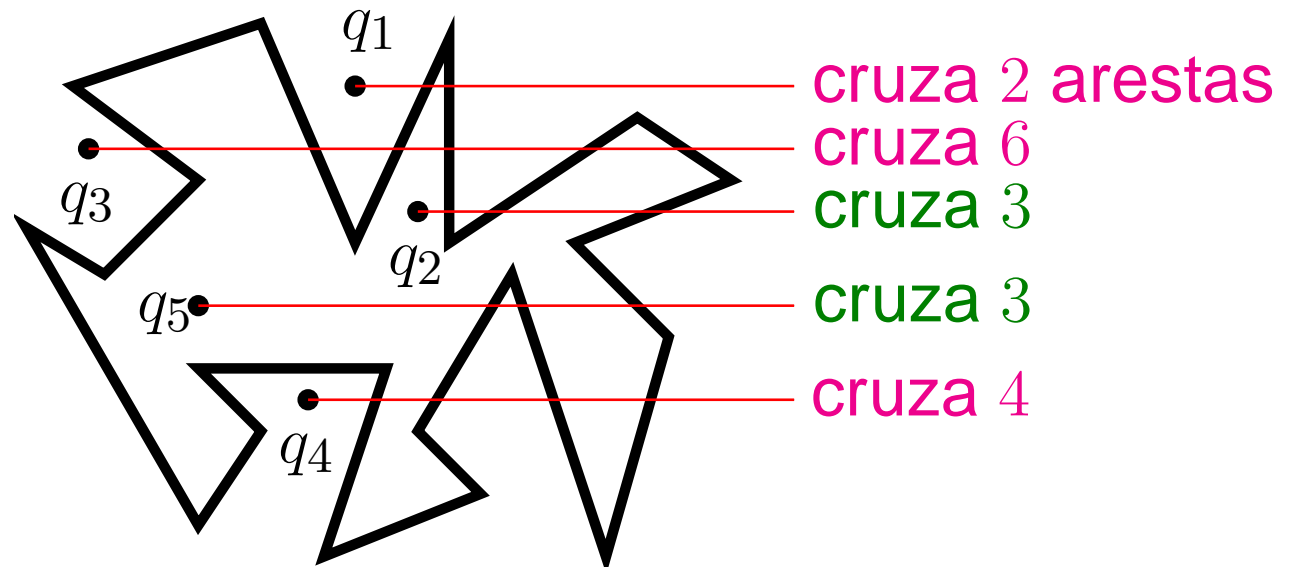
Ray crossings

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes que R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



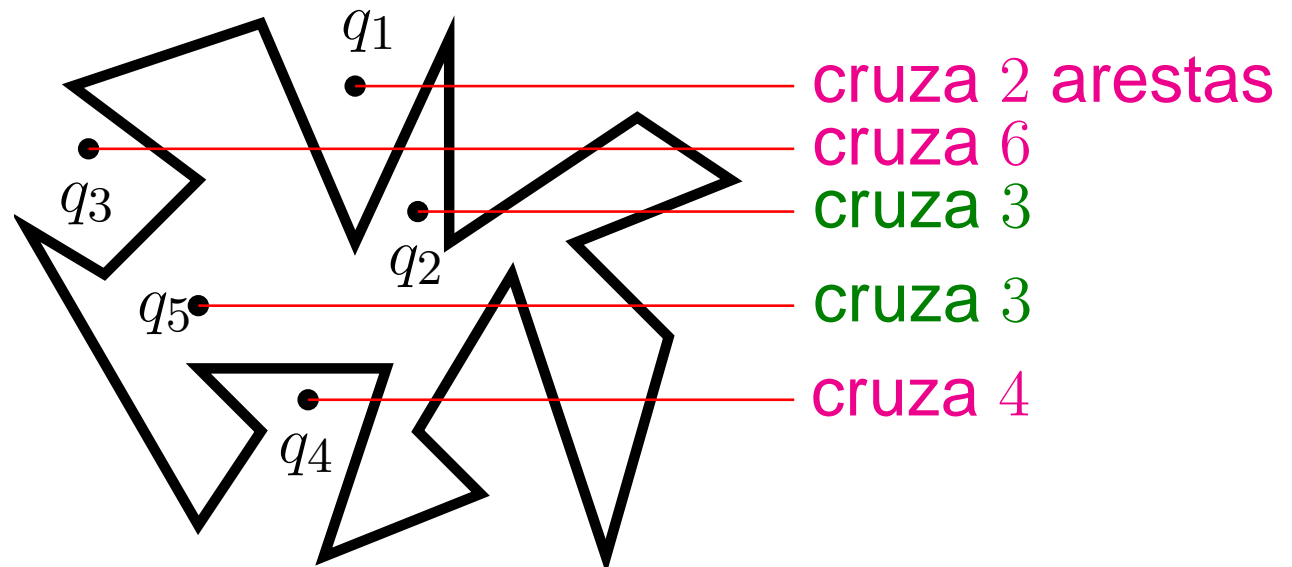
Ray crossings

Problema: Dados P e q , decidir se q está ou não em P .

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas vezes que R cruza δP ?

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Se cruza um número **par** de arestas, q **não está em P** .

Senão q **está em P** .

Casos especiais

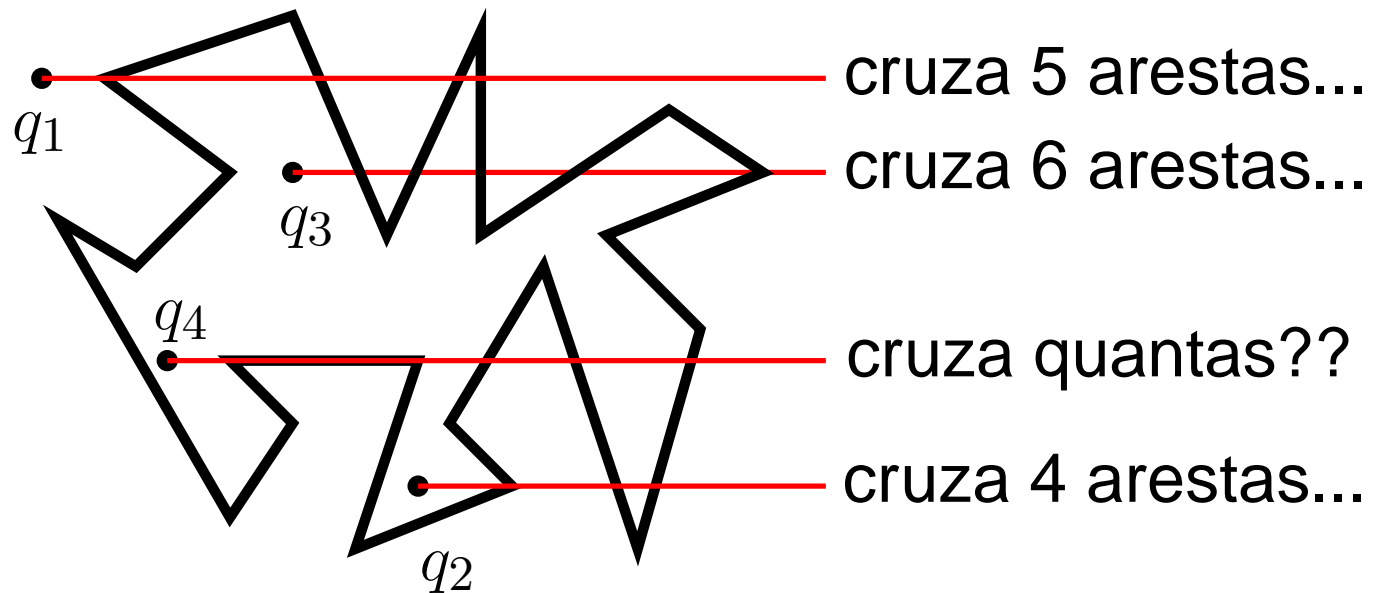
R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

Casos especiais

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

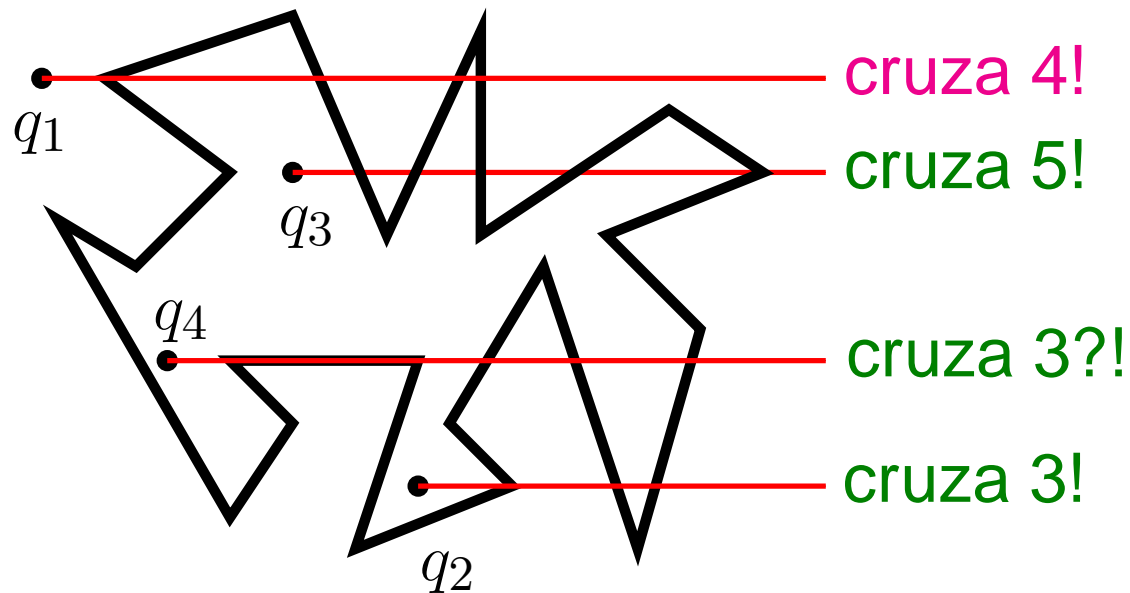


Como tratar destes casos?

Casos especiais

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Considere cada aresta
fechada no extremo inferior e aberta no superior!

Cruza: um extremo estritamente acima, outro abaixo.

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se ( $P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0$ )
      ou ( $P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0$ )
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
               $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ intersecção c/ eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7              então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9      então devolva DENTRO
10     senão devolva FORA
```

Primeira versão do algoritmo

Suponha que q é a origem.

Em-Polígono-v0(P, n)

```
1   $c \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$  ▷ vértice  $i - 1$ 
4    se ( $P[i][Y] > 0$  e  $P[j][Y] \leq 0$ )
      ou ( $P[j][Y] > 0$  e  $P[i][Y] \leq 0$ )
5      então  $x \leftarrow (P[i][X] * P[j][Y] - P[j][X] * P[i][Y])$ 
               $/(P[j][Y] - P[i][Y])$  ▷ intersecção c/ eixo  $x$ 
6          se  $x > 0$ 
7              então  $c \leftarrow c + 1$ 
8  se  $c$  é ímpar
9      então devolva DENTRO
10     senão devolva FORA
```

Nem sempre funciona quando q está na fronteira de P ...

Pontos na fronteira

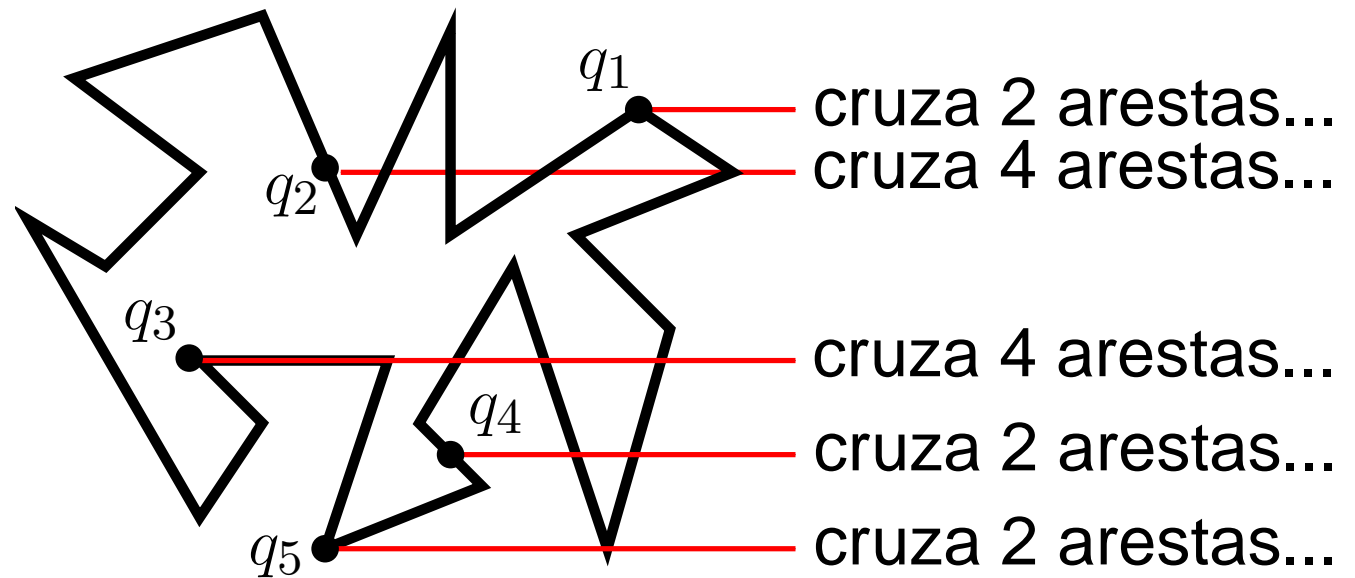
R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?

Pontos na fronteira

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

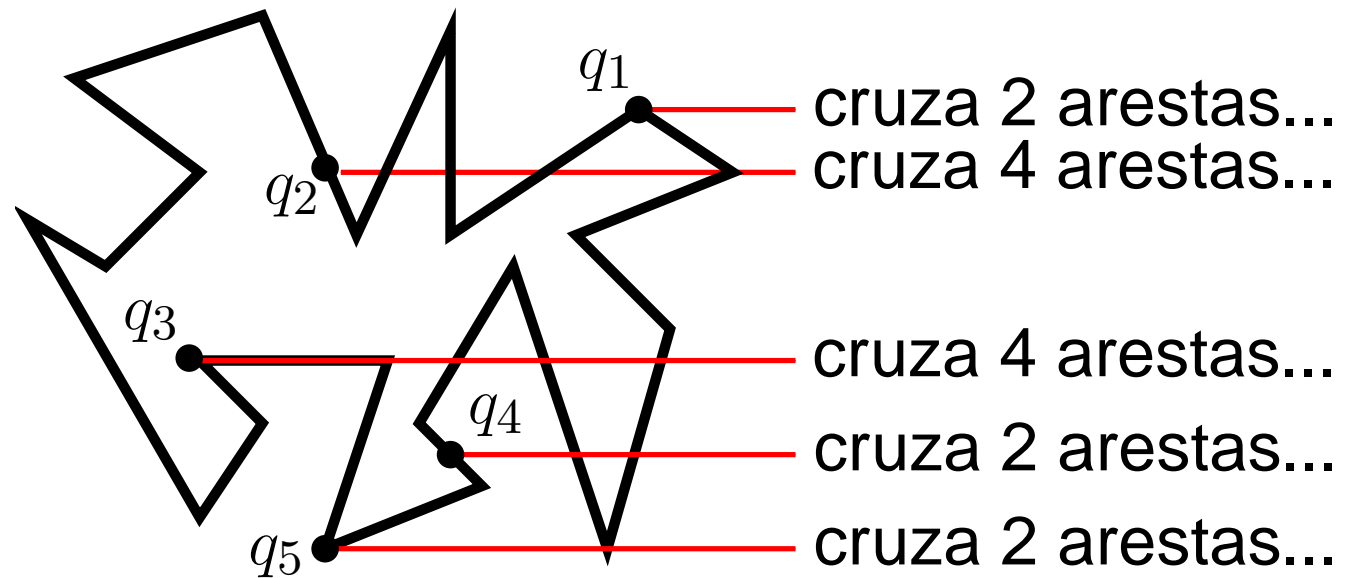
Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Pontos na fronteira

R : raio horizontal saindo de q para $x = +\infty$

Quantas arestas de δP o raio R cruza?



Erra em alguns pontos da fronteira,
concluindo que eles estão fora de P ...

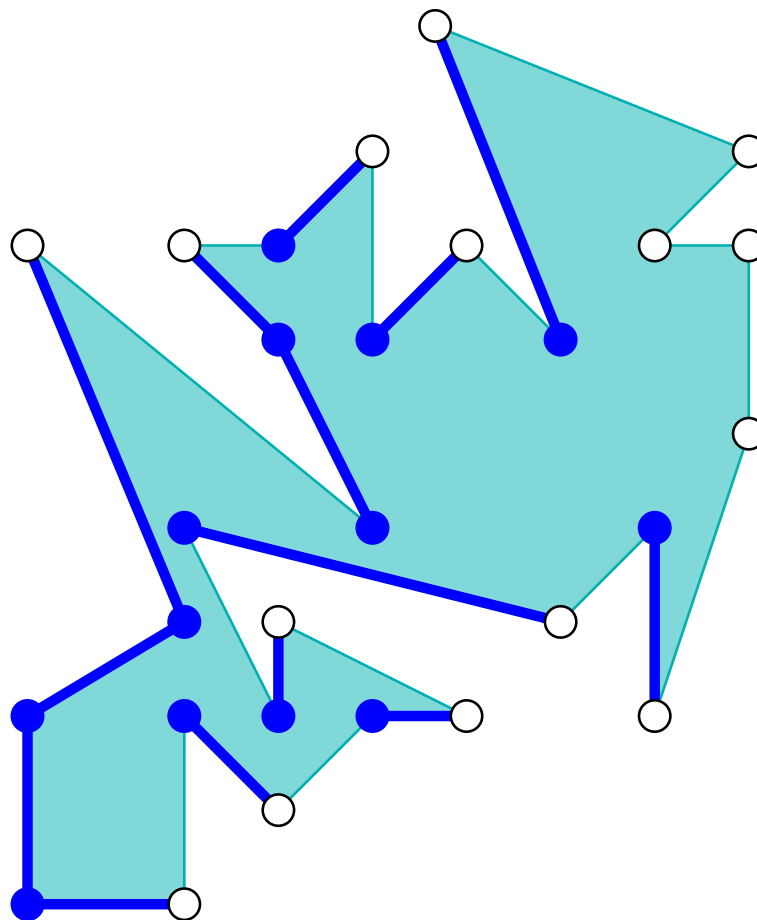
Casos especiais

Se aresta é
fechada no extremo inferior e aberta no superior.

Casos especiais

Se aresta é
fechada no extremo inferior e aberta no superior.

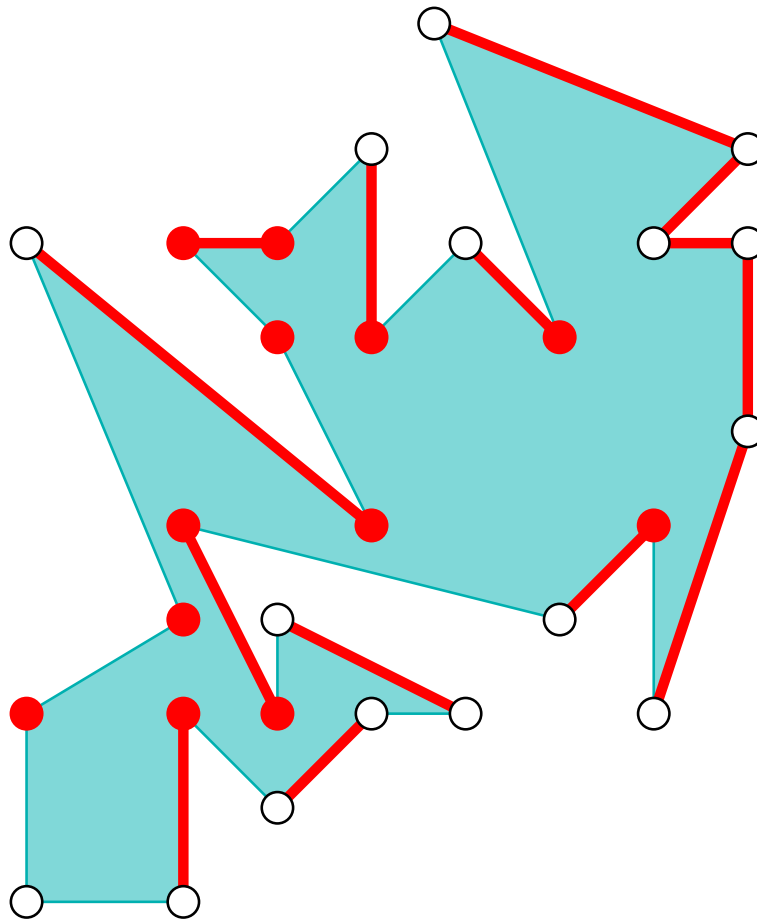
Pontos “em P ”:



Casos especiais

Agora considere ao contrário: que uma aresta é **fechada no extremo superior e aberta no inferior** e que R vai para $x = -\infty$.

Pontos “em P ”:



Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando q é um dos vértices de P ,
a resposta pode ainda estar errada...

Casos especiais

Primeira maneira:

acerta no interior das arestas da esquerda e de baixo.

Segunda maneira:

acerta no interior das arestas da direita e de cima.

Interpretando das duas maneiras,
acertamos a resposta no interior de todas as arestas!

Restam os vértices...

Quando q é um dos vértices de P ,
a resposta pode ainda estar errada...

Faça um teste em separado
para ver se q não é um dos vértices de P .

Segunda versão do algoritmo

```
Em-Polígono( $P, n$ )    ▷ para facilitar,  $q$  é a origem
1   $c \leftarrow 0$             $d \leftarrow 0$ 
2  para  $i \leftarrow 0$  até  $n - 1$  faça
3    se  $P[i][X] = 0$  e  $P[i][Y] = 0$  então devolva VÉRTICE
4     $j \leftarrow (i + n - 1) \bmod n$            ▷ vértice  $i - 1$ 
5     $teste_c \leftarrow (P[i][Y] > 0) \neq (P[j][Y] > 0)$ 
6     $teste_d \leftarrow (P[i][Y] < 0) \neq (P[j][Y] < 0)$ 
7    se  $teste_c$  ou  $teste_d$ 
8      então  $x \leftarrow$  intersecção com eixo  $x$ 
9          se  $teste_c$  e  $x > 0$  então  $c \leftarrow c + 1$ 
10         se  $teste_d$  e  $x < 0$  então  $d \leftarrow d + 1$ 
11 se  $c$  e  $d$  têm paridade distinta
12   então devolva EM ARESTA
13 se  $c$  é ímpar
14   então devolva DENTRO
15   senão devolva FORA
```