

# Geometria Computacional

**Cristina G. Fernandes**

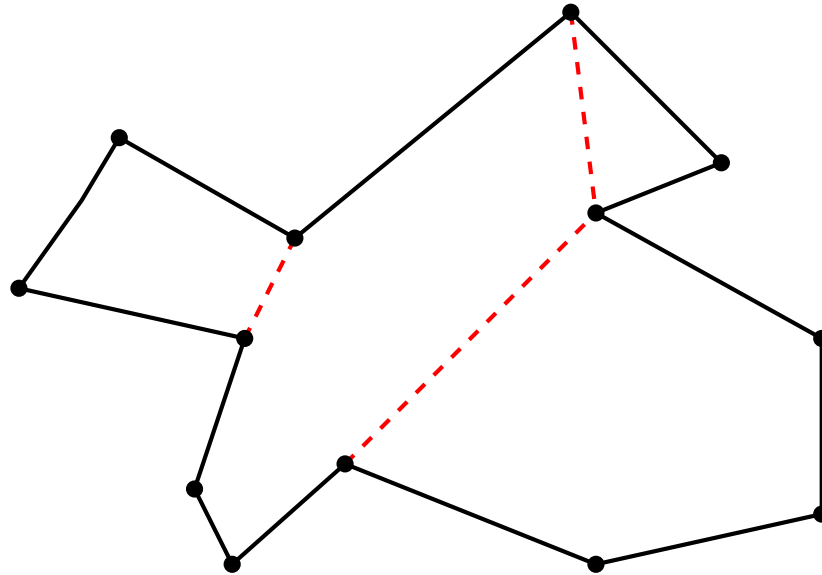
Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

<http://www.ime.usp.br/~cris/>

segundo semestre de 2009

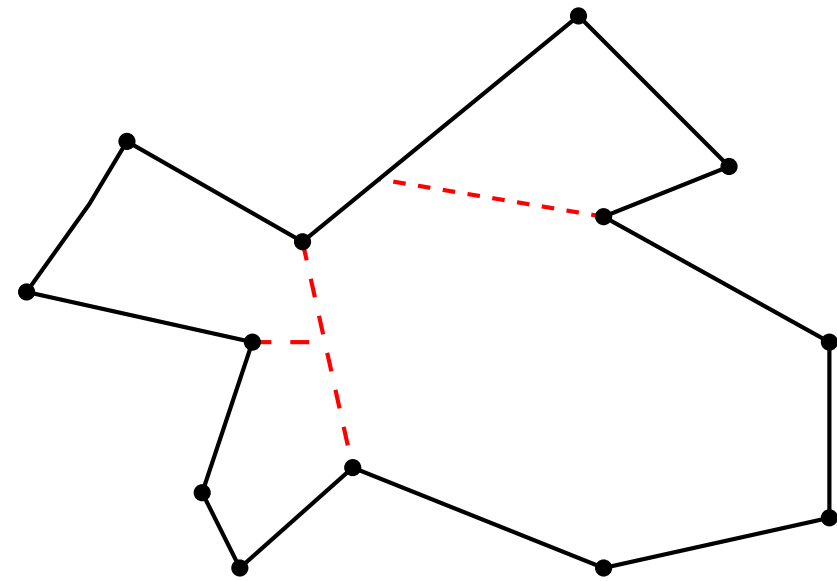
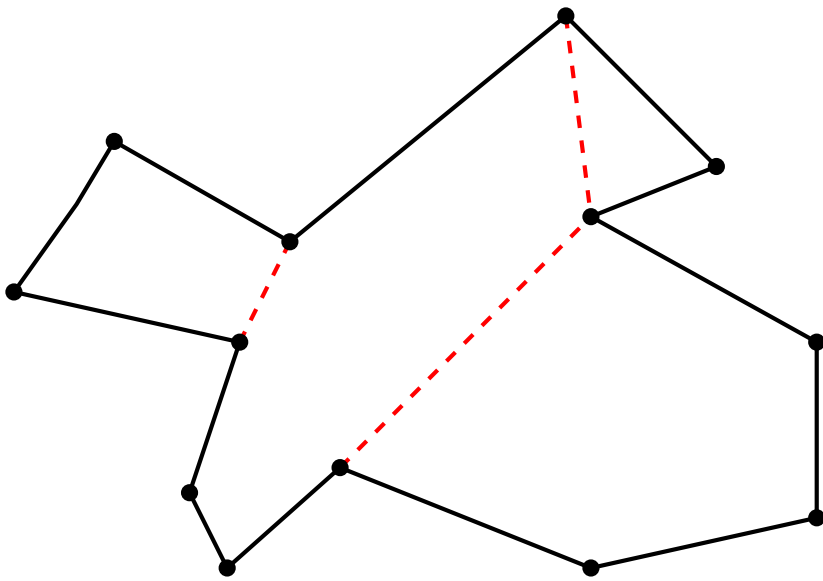
# Partição em polígonos convexos

**Problema:** Dado um polígono  $P$ , determinar uma partição de  $P$  em um número mínimo de partes convexas.



# Partição em polígonos convexos

**Problema:** Dado um polígono  $P$ , determinar uma partição de  $P$  em um número mínimo de partes convexas.



Dois tipos de partição:

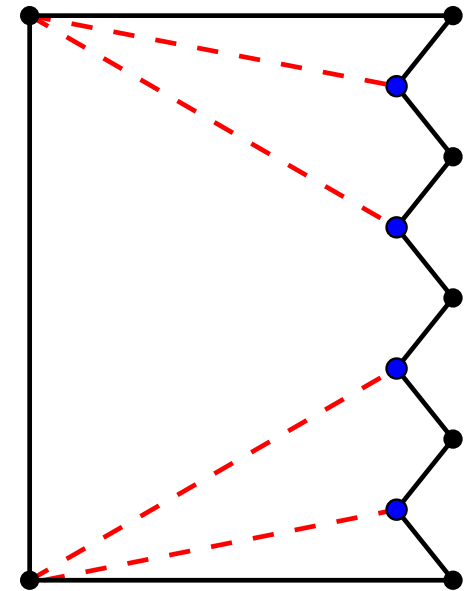
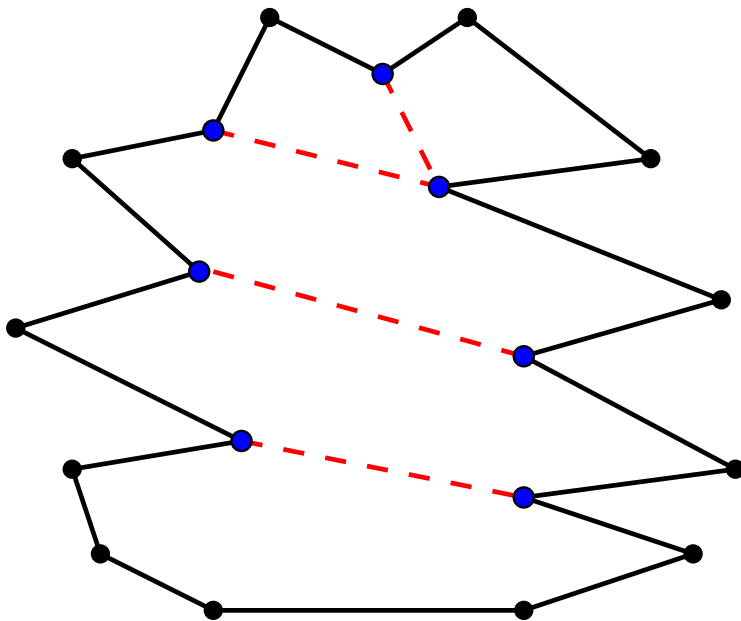
● por diagonais de  $P$

● por segmentos arbitrários contidos em  $P$

# Partição em polígonos convexos

**Teorema:** Seja  $\Phi$  o menor número de partes convexas em que um polígono com  $r$  vértices reflexos pode ser particionado. Então

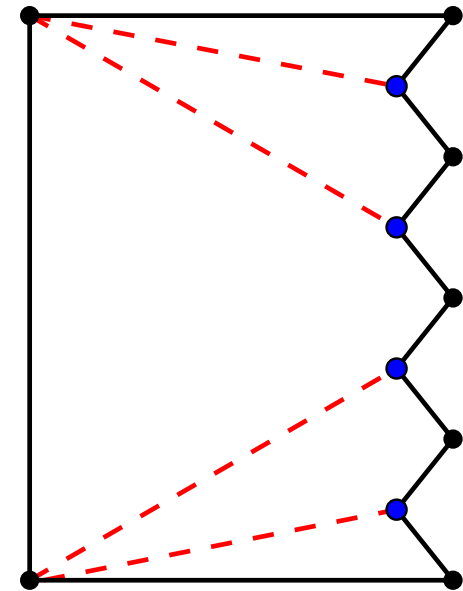
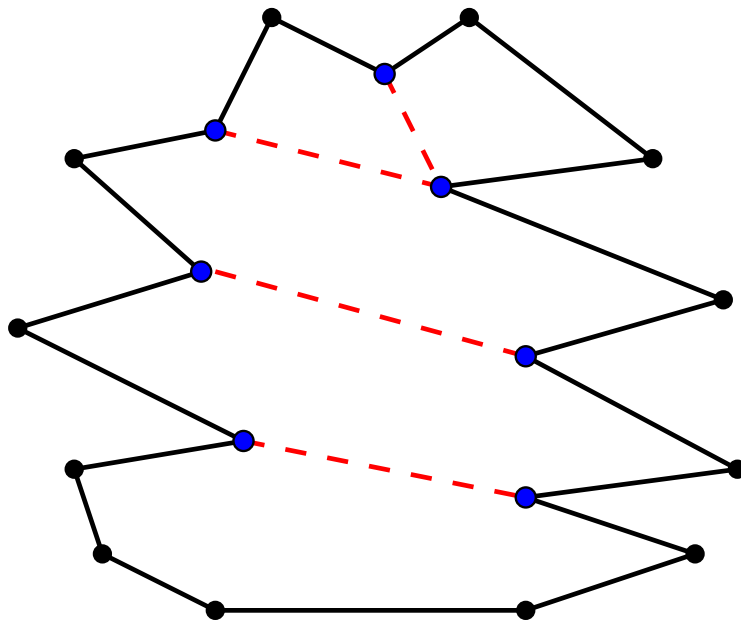
$$\lceil r/2 \rceil + 1 \leq \Phi \leq r + 1.$$



# Partição em polígonos convexos

**Teorema:** Seja  $\Phi$  o menor número de partes convexas em que um polígono com  $r$  vértices reflexos pode ser particionado. Então

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \leq \Phi \leq r + 1.$$



**Prova:** Feita na aula.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

**Problema:** Dado  $P$ , determinar uma partição de  $P$  por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

**Problema:** Dado  $P$ , determinar uma partição de  $P$  por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja  $\Phi^*$  o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de  $P$ .

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

**Problema:** Dado  $P$ , determinar uma partição de  $P$  por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja  $\Phi^*$  o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de  $P$ .

**Algoritmo de aproximação:** produz uma partição convexa de  $P$  por diagonais com no máximo  $\alpha\Phi^*$  diagonais, e consome tempo polinomial.

Um tal algoritmo é chamado de  $\alpha$ -aproximação, e  $\alpha$  é sua razão de aproximação.



# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

**Problema:** Dado  $P$ , determinar uma partição de  $P$  por diagonais, em um número mínimo de partes convexas.

Seja  $\Phi^*$  o número mínimo de diagonais que resulta em uma partição convexa de  $P$ .

**Algoritmo de aproximação:** produz uma partição convexa de  $P$  por diagonais com no máximo  $\alpha\Phi^*$  diagonais, e consome tempo polinomial.

Um tal algoritmo é chamado de  $\alpha$ -aproximação, e  $\alpha$  é sua razão de aproximação.

O algoritmo de Hertel e Mehlhorn produz uma partição de  $P$  por diagonais, sempre com no máximo  $4\Phi^*$  diagonais, ou seja, é uma 4-aproximação.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de  $P$  por diagonais.

**Vértice reflexo:** vértice com ângulo interno maior que  $\pi$ .

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de  $P$  por diagonais.

**Vértice reflexo:** vértice com ângulo interno maior que  $\pi$ .

Uma diagonal  $d$  é **essencial** para um vértice  $v$  se a remoção de  $d$  torna  $v$  reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de  $P$  por diagonais.

**Vértice reflexo:** vértice com ângulo interno maior que  $\pi$ .

Uma diagonal  $d$  é **essencial** para um vértice  $v$  se a remoção de  $d$  torna  $v$  reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

**Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:**

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Considere uma partição convexa de  $P$  por diagonais.

**Vértice reflexo:** vértice com ângulo interno maior que  $\pi$ .

Uma diagonal  $d$  é **essencial** para um vértice  $v$  se a remoção de  $d$  torna  $v$  reflexo (e a partição deixa de ser convexa).

**Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:**

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

**Consumo de tempo:** linear, usando o algoritmo de triangulação de Chazelle (que não vimos).

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

## Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

## Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

**Lema:** Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

## Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

**Lema:** Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

**Prova:** Feita na aula.



# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

## Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

**Lema:** Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

**Prova:** Feita na aula.

**Teorema:** O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

# Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

## Algoritmo de Hertel e Mehlhorn:

Construa uma triangulação de  $P$  e remova, enquanto houver, diagonais não-essenciais. Devolva a partição que resultar disso.

Por que ele é uma 4-aproximação?

**Lema:** Em uma partição convexa por diagonais, existem no máximo duas diagonais essenciais por vértice reflexo.

**Prova:** Feita na aula.

**Teorema:** O algoritmo de Hertel e Mehlhorn é uma 4-aproximação.

**Prova:** Feita na aula.

# Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais **ótima**.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n^2) = O(n^4)$ , onde  $n$  é o número de vértices e  $r$  é o número de vértices reflexos do polígono.

# Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais **ótima**.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n^2) = O(n^4)$ , onde  $n$  é o número de vértices e  $r$  é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n \lg n)$ .

# Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais **ótima**.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n^2) = O(n^4)$ , onde  $n$  é o número de vértices e  $r$  é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n \lg n)$ .

Os dois algoritmos são de **programação dinâmica**.

Se a partição é **por segmentos**, o problema fica mais complicado. Há um algoritmo de Chazelle que consome tempo  $O(n + r^3) = O(n^3)$  para este caso.

# Partição convexa ótima

Greene apresentou o primeiro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais **ótima**.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n^2) = O(n^4)$ , onde  $n$  é o número de vértices e  $r$  é o número de vértices reflexos do polígono.

Posteriormente, Keil propôs um outro algoritmo que encontra uma partição convexa por diagonais ótima.

**Consumo de tempo:**  $O(r^2 n \lg n)$ .

Os dois algoritmos são de **programação dinâmica**.

Se a partição é **por segmentos**, o problema fica mais complicado. Há um algoritmo de Chazelle que consome tempo  $O(n + r^3) = O(n^3)$  para este caso.