Geometria Computacional

Cristina G. Fernandes

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

http://www.ime.usp.br/~cris/

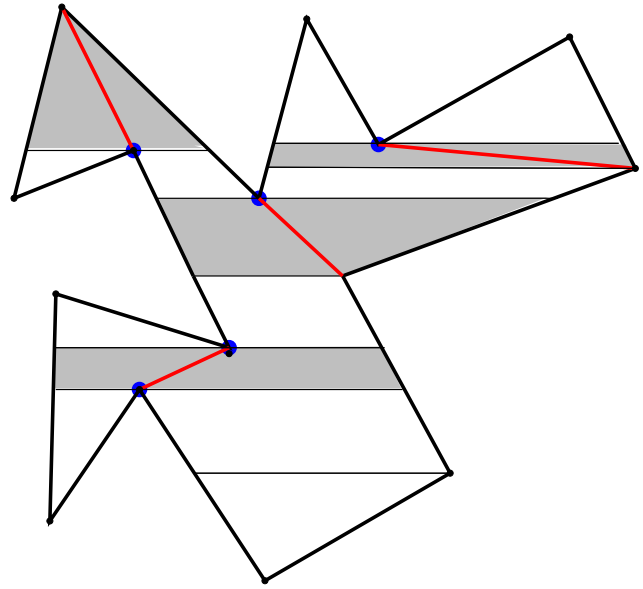
segundo semestre de 2009

Algoritmo de Lee e Preparata

Ideia: Particiona o polígono em polígonos y-monótonos e triangula cada polígono y-monótono.

Lema: Se P não tem pontas interiores, P é y-monótono.

Primeira fase: acabar com as pontas interiores!



Adicionar diagonal a partir de cada ponta interior, ligando-a ao outro vértice de suporte de cada trapézio cinza.

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Trapézios que cruzam ℓ, dados por triplas (e, u, f), onde

- e e f são as arestas de P que contém respectivamente o lado esquerdo e direito do trapézio
- u é o vértice de suporte superior do trapézio

Algoritmo de Lee e Preparata

Entrada: polígono P com n vértices
Saída: triangulação de P

Técnica: linha de varredura

Eventos: vértices de P, ordenados por Y-coordenada

ED para a linha de varredura ℓ: ABBB ou skip list

O que é guardado na ED da linha de varredura?

Trapézios que cruzam ℓ, dados por triplas (e, u, f), onde

- e e f são as arestas de P que contém respectivamente o lado esquerdo e direito do trapézio
- u é o vértice de suporte superior do trapézio

(u: candidato a extremo de uma diagonal particionadora)

Algoritmo de Lee e Preparata

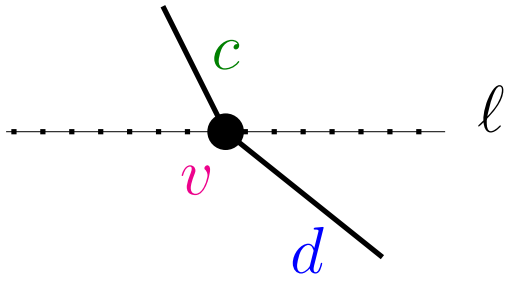
Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

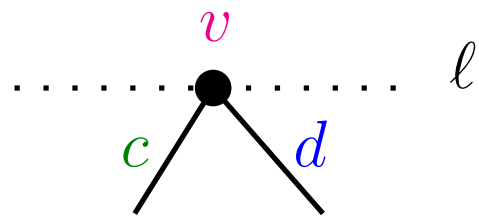
Algoritmo de Lee e Preparata

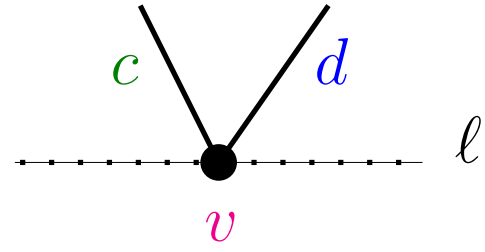
Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:





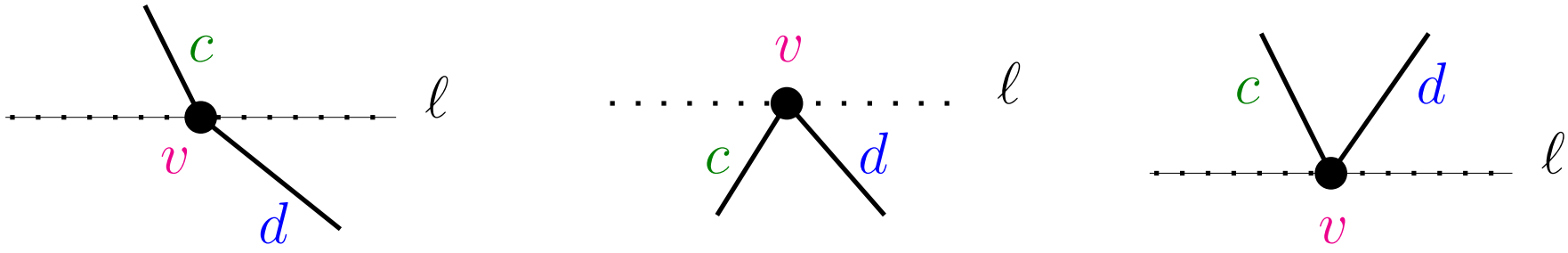


Algoritmo de Lee e Preparata

Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:



Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

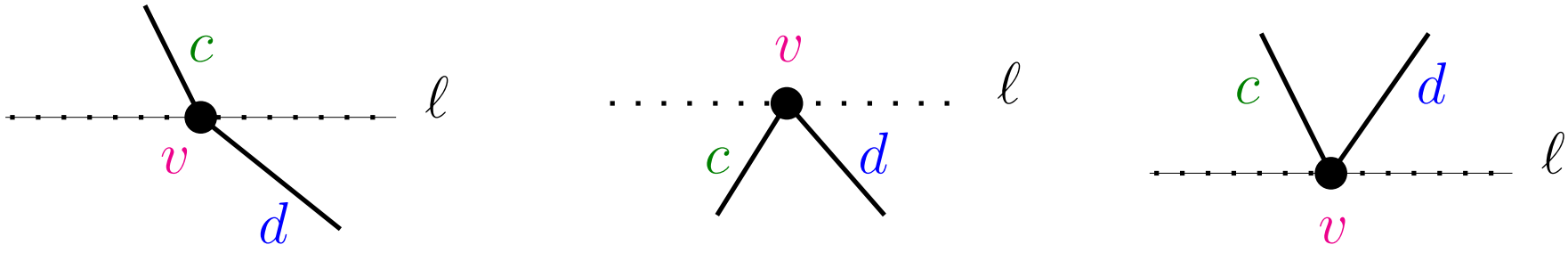
Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

Algoritmo de Lee e Preparata

Em cada iteração, um evento (vértice) v é processado.
Linha de varredura ℓ sobre v.

c e d: arestas do polígono incidentes a v

Três casos a considerar:



Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

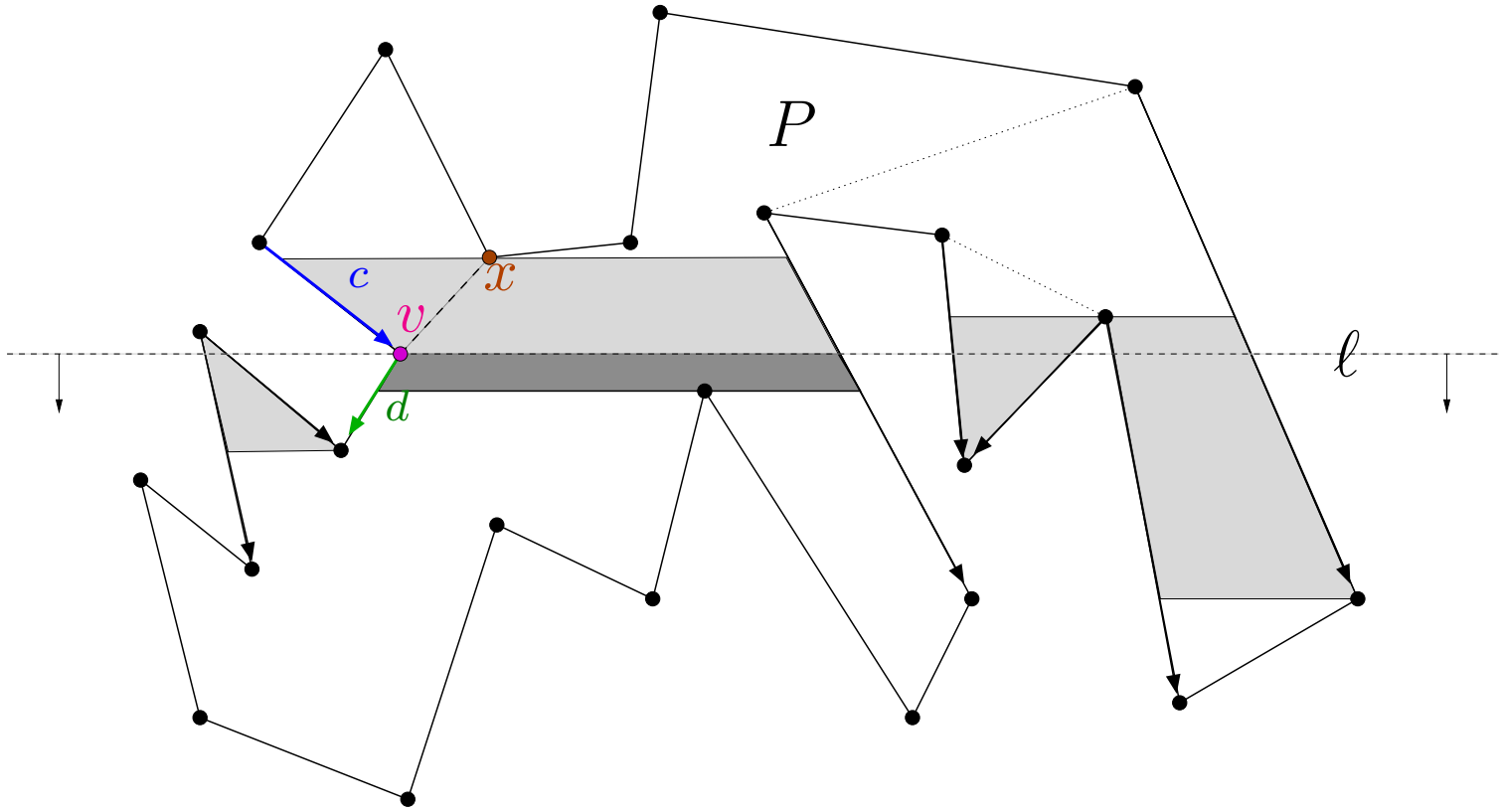
Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

No que segue, ED da linha de varredura: ABBB T

Caso 1

Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

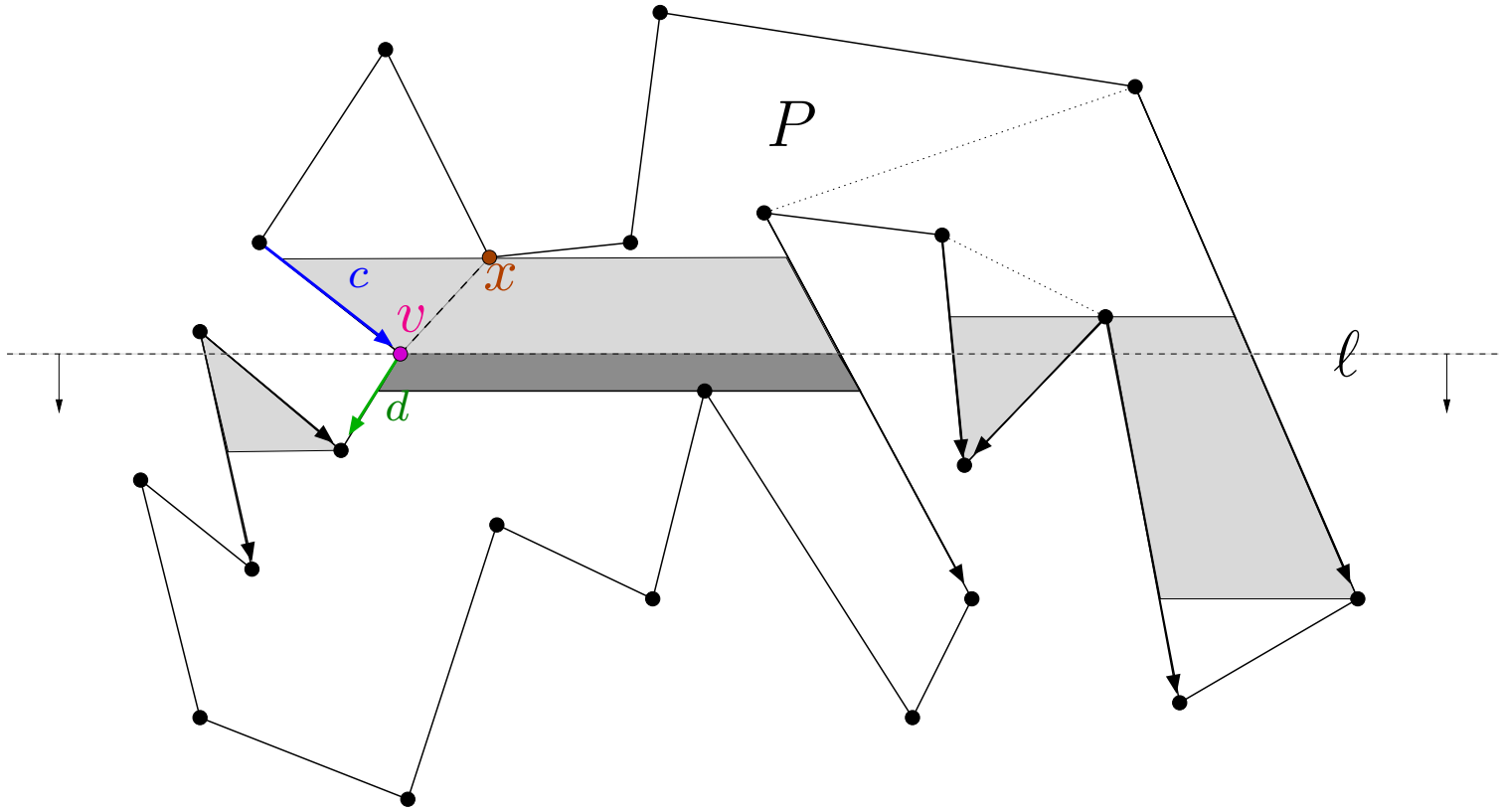
Remova o trapézio (c, x, e) ou (e, x, c)
e insira o trapézio (d, v, e) ou (e, v, d) em T.



Caso 1

Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

Remova o trapézio (c, x, e) ou (e, x, c)
e insira o trapézio (d, v, e) ou (e, v, d) em T.

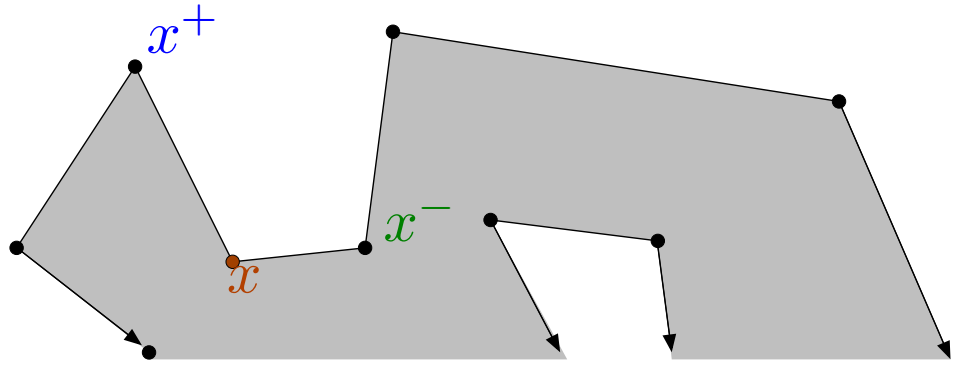


Se x for ponta para baixo, acrescente a diagonal (x, v).

Teste de ponta para baixo

PONTAPARABAIXO(x, Y, n)

1 $x^- \leftarrow x - 1 \quad x^+ \leftarrow x + 1$
2 se $x^- = 0$ então $x^- \leftarrow n$
3 se $x^+ = n + 1$ então $x^+ \leftarrow 1$
▷ x^- e x^+ são o predecessor e o sucessor de x em δP
4 se $Y[x^-] > Y[x]$ e $Y[x^+] > Y[x]$
▷ x é ponta interior para baixo?
5 então devolva VERDADE
6 senão devolva FALSO

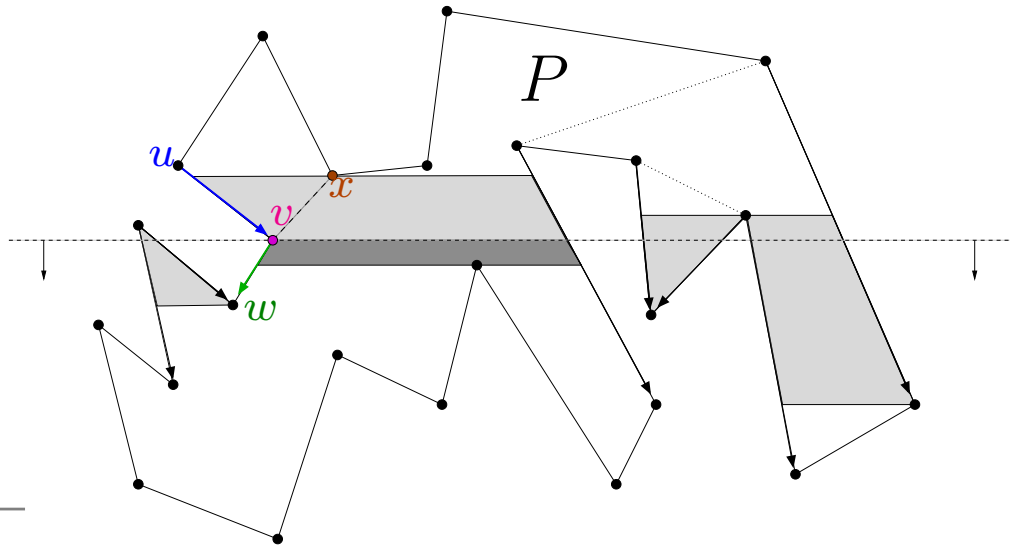


Consumo de tempo: $O(1)$

Caso 1

TRATACASO1(T, u, v, w, Y, n, D, t)

1 se $Y[u] < Y[w]$ então $u \leftrightarrow w$
2 $((i, j), x, (k, l)) \leftarrow$ REMOVA(T, v)
3 se $v = j$ ▷ o trapézio está à direita de v?
4 então INSIRA$(T, (v, w), v, (k, l))$
5 senão INSIRA$(T, (i, j), v, (v, w))$
6 se PONTAPARABAIXO(x, Y, n)
7 então $t \leftarrow t + 1$ $D[t] \leftarrow (x, v)$



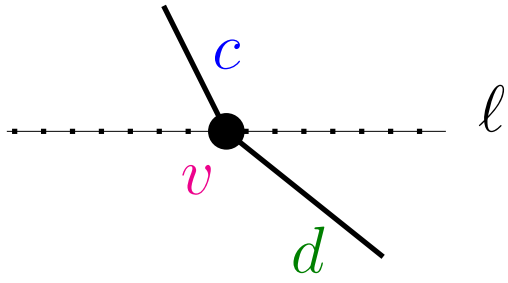
Consumo de tempo:

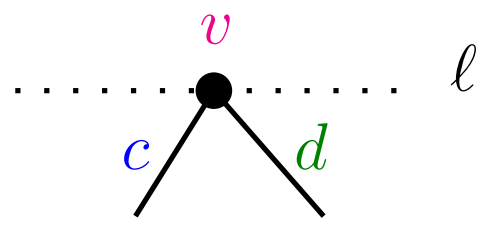
$O(\lg n)$

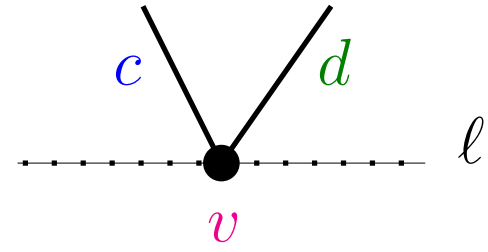
Algoritmo de Lee e Preparata

T: ED da linha de varredura ℓ

Três casos a considerar:







Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

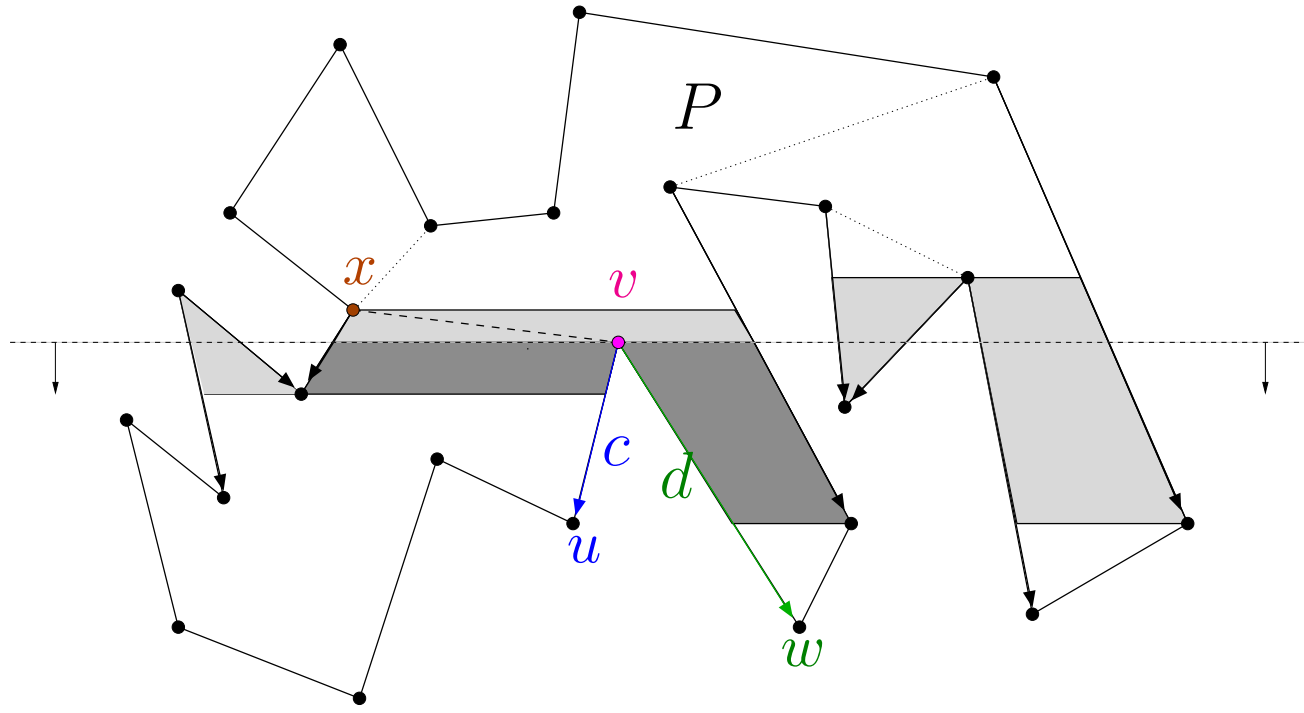
Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

Caso 2

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

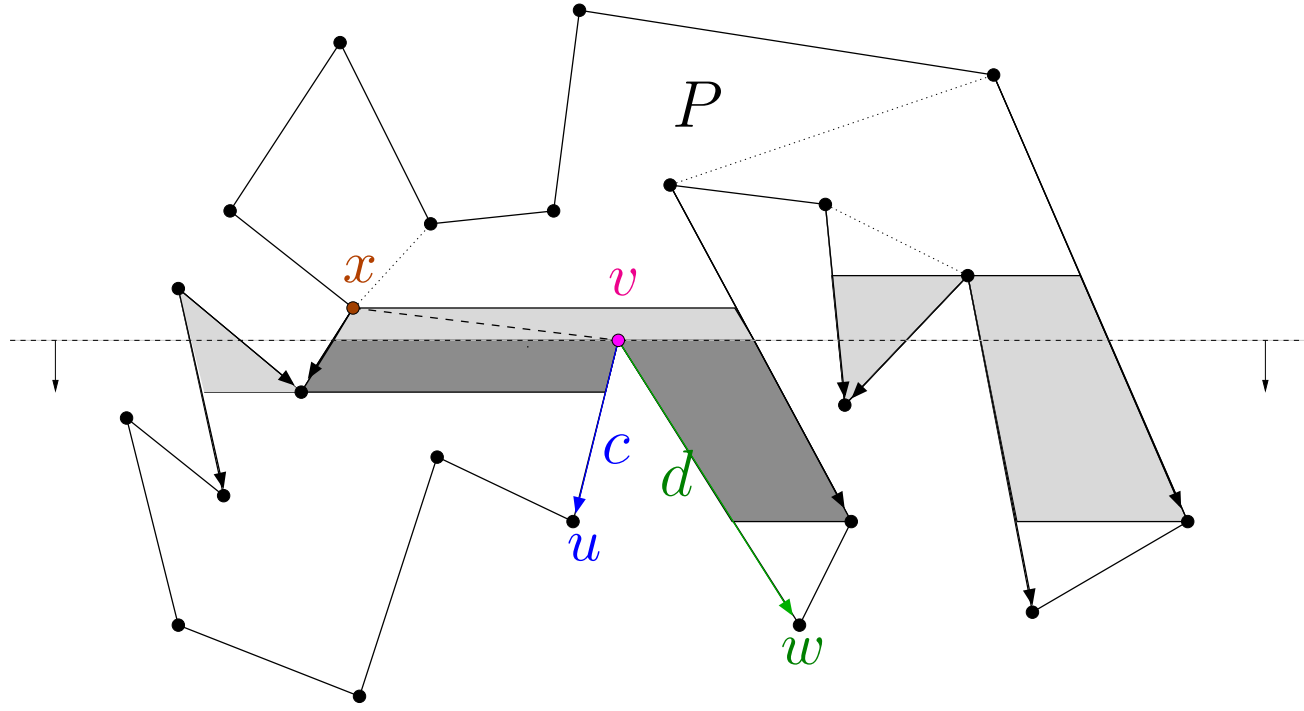
Se há trapézio com v em T,
então substitua-o por dois trapézios:
um com lado direito em c e outro com lado esquerdo em d.



Caso 2

Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

Se há trapézio com v em T,
então substitua-o por dois trapézios:
um com lado direito em c e outro com lado esquerdo em d.

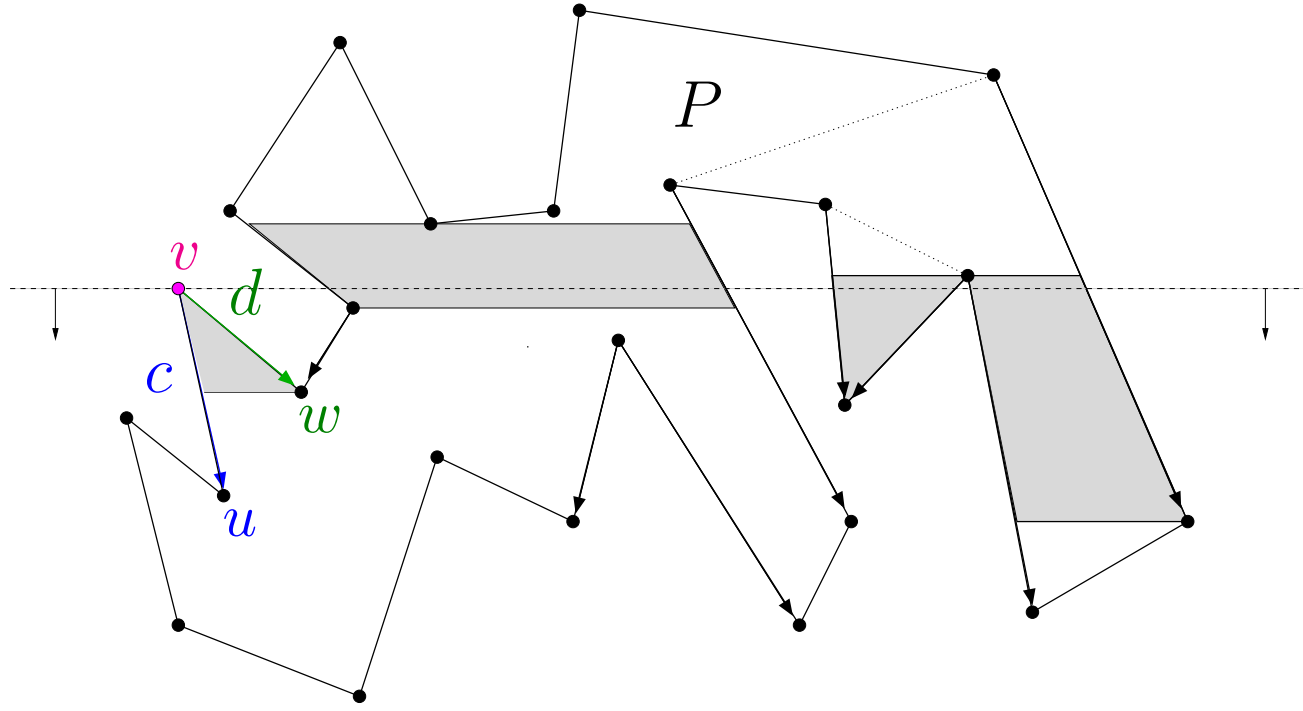


Acrescente a diagonal (x, v).

Caso 2

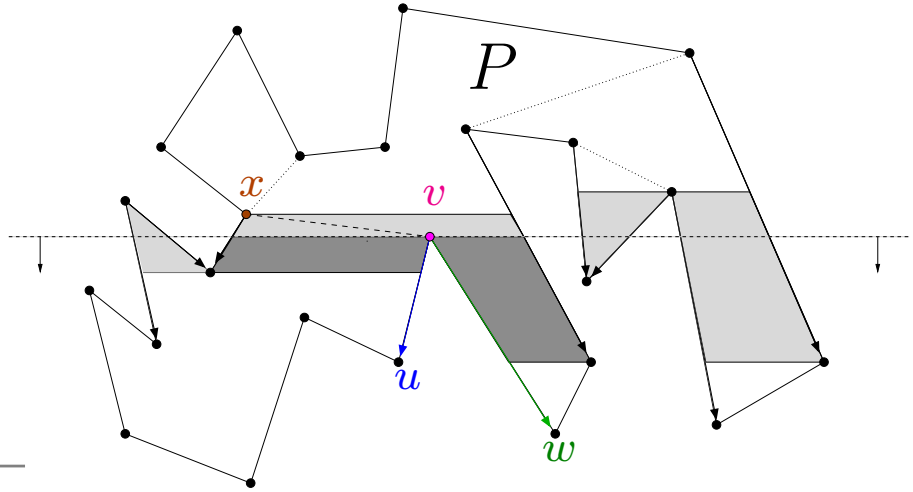
Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

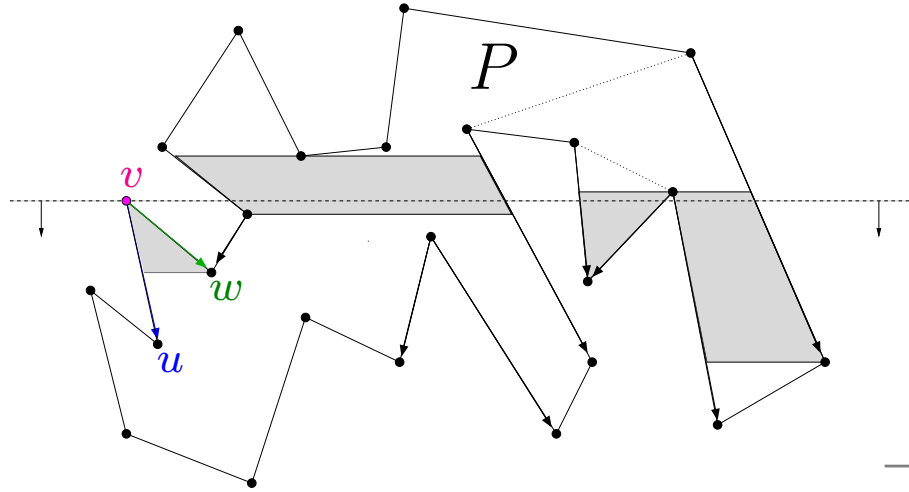
Se há trapézio com v em T,
então substitua-o por dois trapézios:
um com lado direito em c e outro com lado esquerdo em d.
Se não há trapézio com v em T, insira (c, v, d) em T.



Caso 2

```
TRATACASO2(T, u, v, w, X, D, t)
1   se X[u] > X[w] então u ↔ w
2   trap ← REMOVA(T, v)
3   se trap = NIL
4       então INSIRA(T, (v, u), v, (v, w))
5       senão ((i, j), x, (k, l)) ← trap
6             INSIRA(T, (i, j), v, (v, u))
7             INSIRA(T, (v, w), v, (k, l))
8             t ← t + 1    D[t] ← (x, v)     ▷ v é ponta interior para cim
```

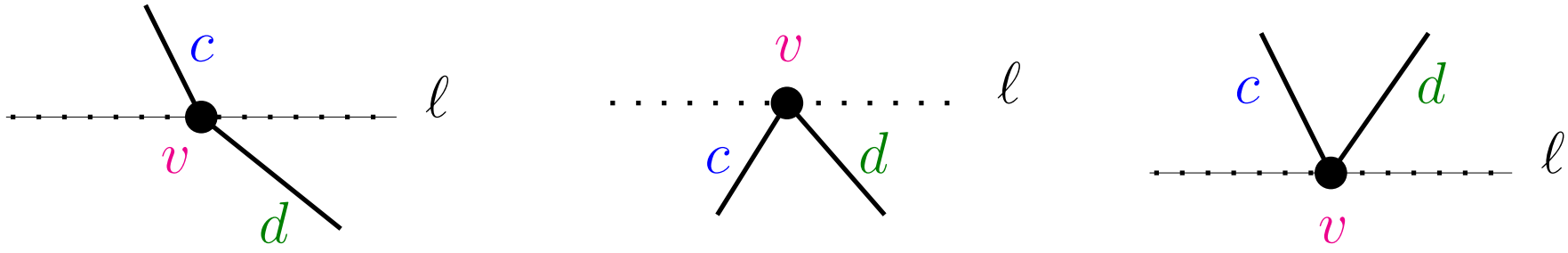




Algoritmo de Lee e Preparata

T: ED da linha de varredura ℓ

Três casos a considerar:



Caso 1. Aresta c está acima de ℓ e d abaixo

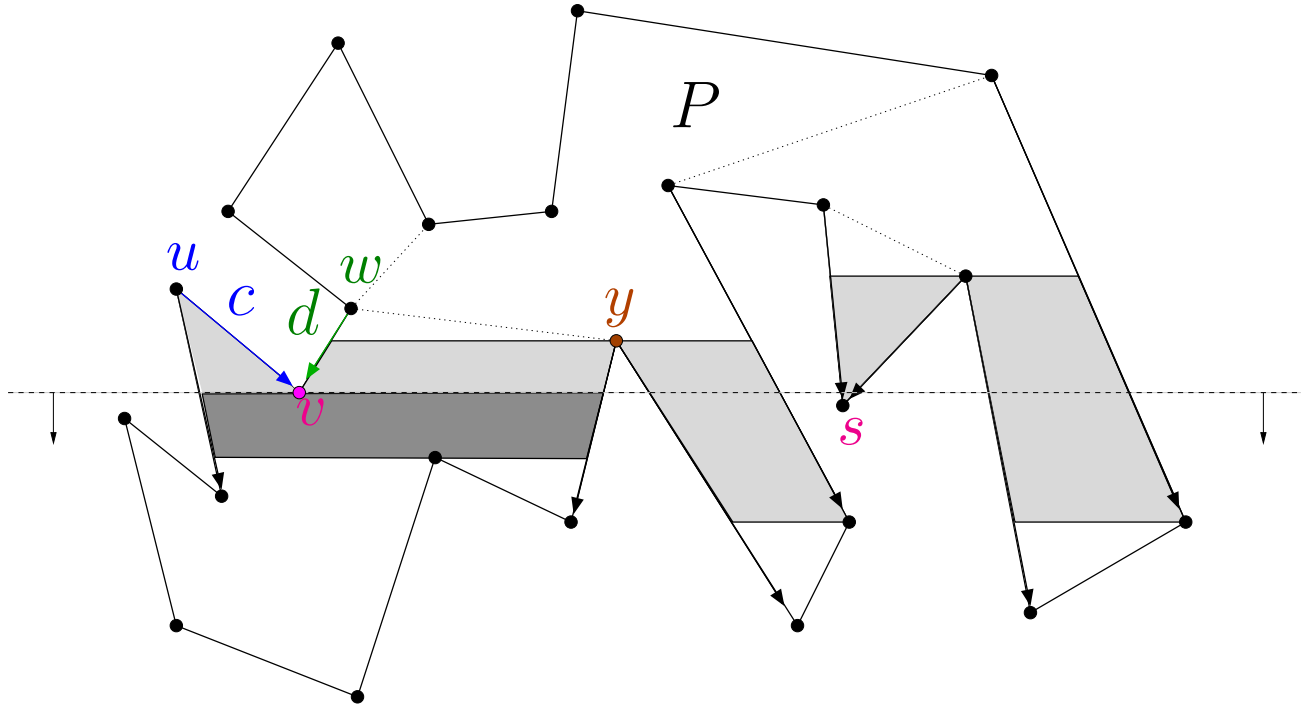
Caso 2. Arestas c e d estão abaixo de ℓ

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

Caso 3

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

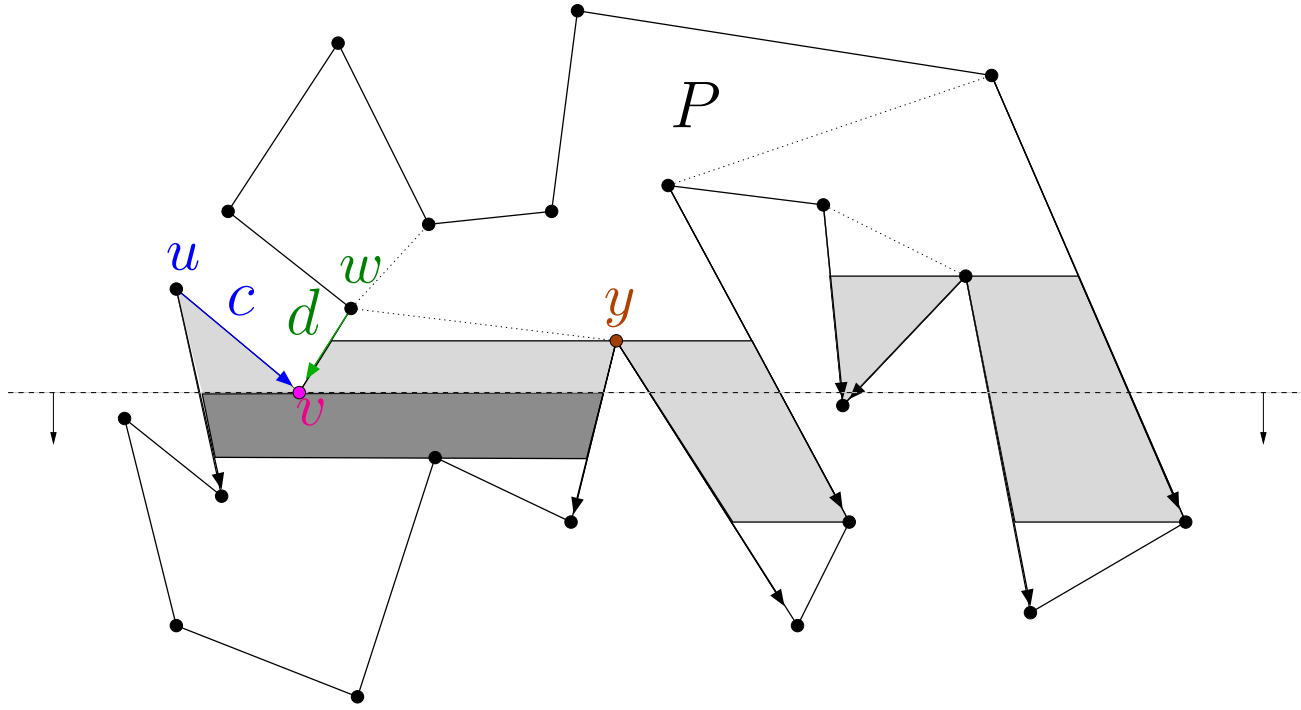
Pode haver um ou dois trapézios contento v em T.
Se houver dois, remova (e,x,c) e (d,y,f) de T e insira (e,v,f).



Caso 3

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

Pode haver um ou dois trapézios contento v em T.
Se houver dois, remova (e,x,c) e (d,y,f) de T e insira (e,v,f).

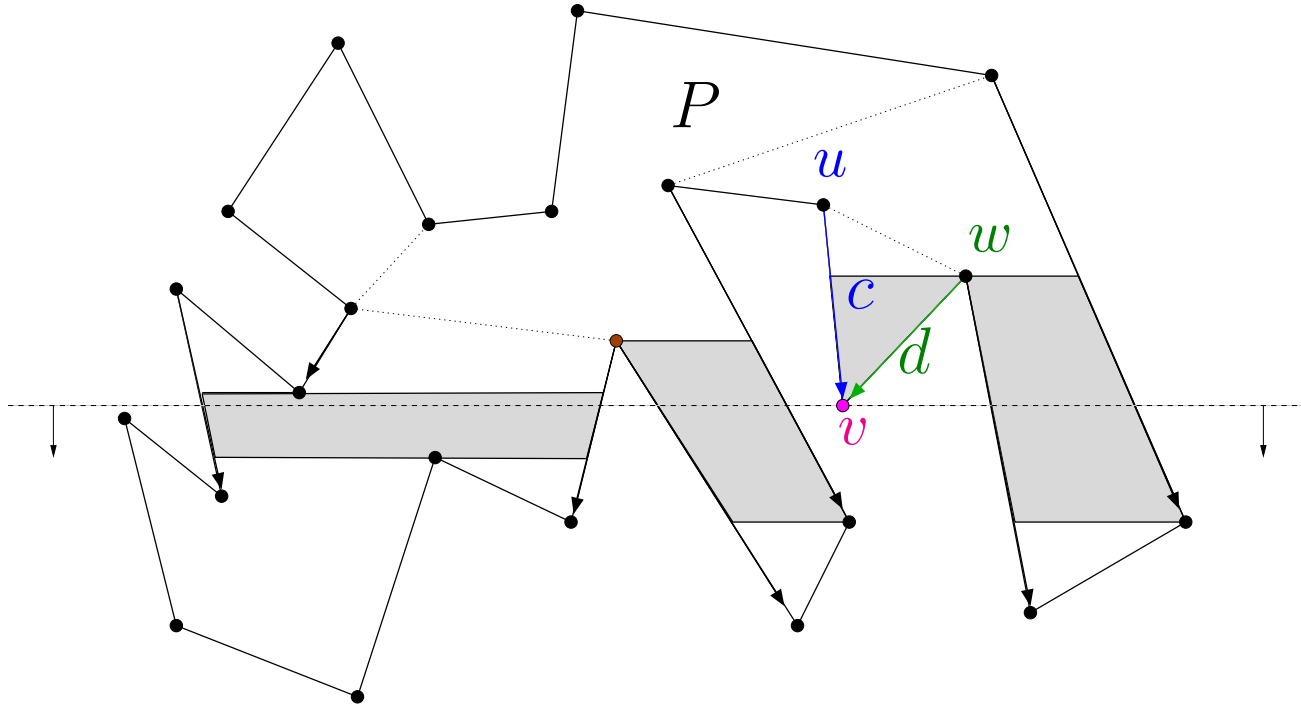


Se x ou y for ponta para baixo,
acrescente as diagonais (x, v) e/ou (y, v).

Caso 3

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

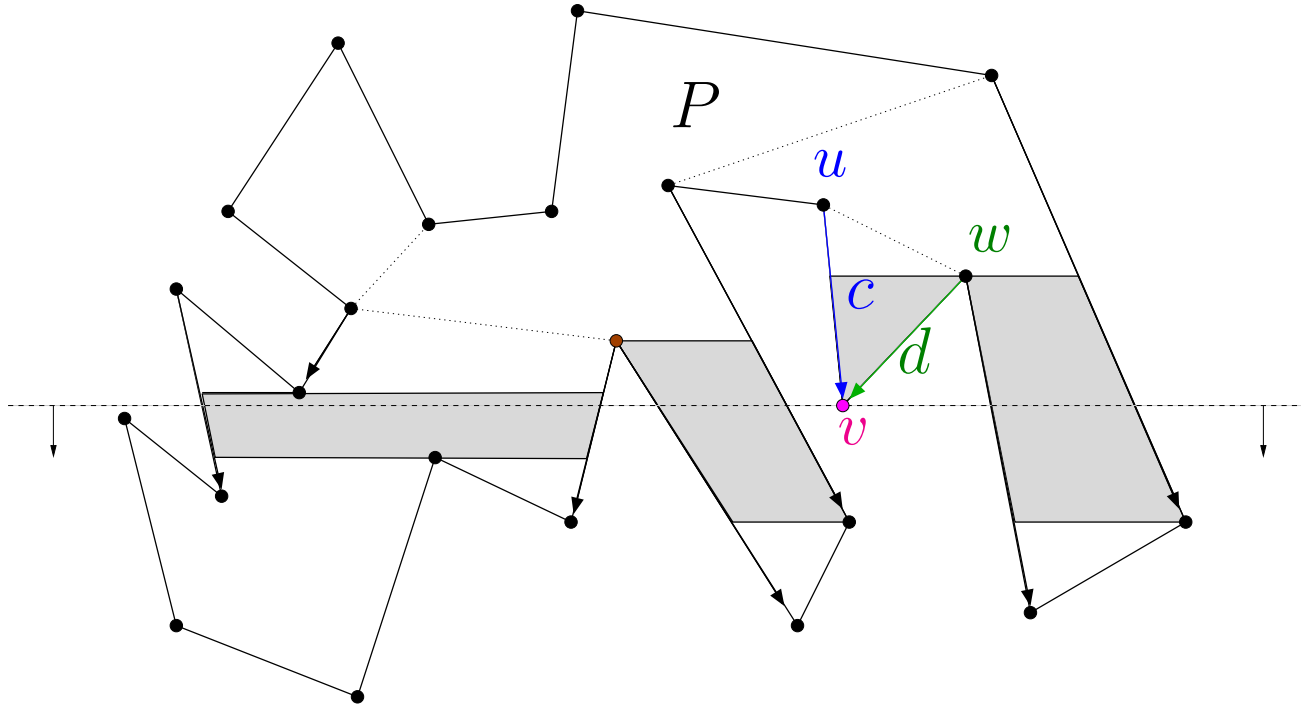
Pode haver um ou dois trapézios contento v em T.
Se houver dois, remova (e,x,c) e (d,y,f) de T e insira (e,v,f).
Se houver um, remova-o.



Caso 3

Caso 3. Arestas c e d estão acima de ℓ

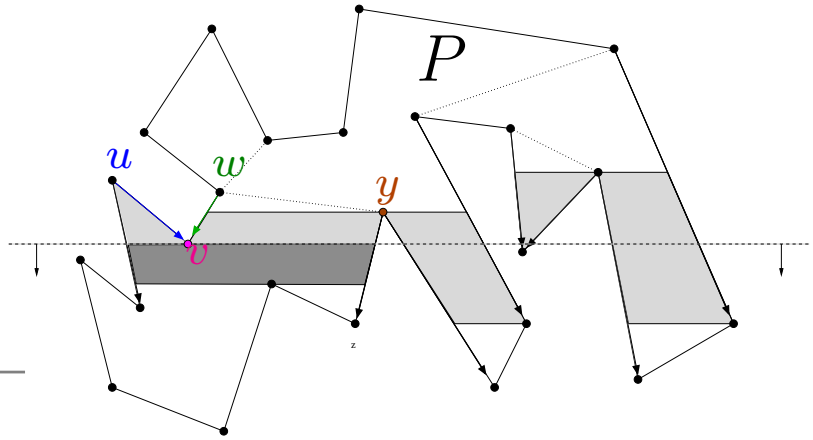
Pode haver um ou dois trapézios contento v em T.
Se houver dois, remova (e,x,c) e (d,y,f) de T e insira (e,v,f).
Se houver um, remova-o.

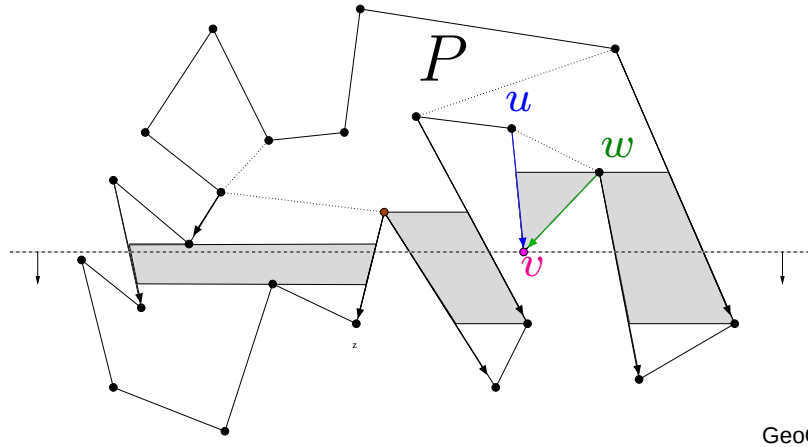


Se x for ponta para baixo, acrescente as diagonais (x, v).

Caso 3

```
TRATACASO3(T, v, Y, n, D, t)
 1  ((i, j), x, (k, l)) ← REMOVA(T, v)
 2  se PONTAPARABAIXO(x, Y, n)
 3      então t ← t + 1    D[t] ← (x, v)
 4  se j ≠ v ou k ≠ v      ▷ há um outro trapézio em T?
 5      então ((i′, j′), y, (k′, l′)) ← REMOVA(T, v)
 6            se PONTAPARABAIXO(y, Y, n)
 7                então t ← t + 1    D[t] ← (y, v)
 8            se l = v
 9                então INSIRA(i, j, v, k′, l′)
10                senão INSIRA(i′, j′, v, k, l)
```





Algoritmo de Lee e Preparata

```
DIVIDEEMMONÓTONO-LP(X, Y, n)
 1  para k ← 1 até n faça
 2      E[k] ← k
 3  MERGESORT(Y, X, 1, n, E)      ▷ ordenação indireta decrescente de
 4  CRIE(T)    t ← 0
 5  para k ← 1 até n faça
 6      v ← E[k]
 7      v⁻ ← v − 1    v⁺ ← v + 1
 8      se v⁻ = 0 então v⁻ ← n
 9      se v⁺ = n + 1 então v⁺ ← 1
10      se Y[v⁻] < Y[v] < Y[v⁺] ou Y[v⁺] < Y[v] < Y[v⁻]
11          então TRATACASO1(T, v⁻, v, v⁺, Y, n, D, t)
12          senão se Y[v⁻] < Y[v]
13                    então TRATACASO2(T, v⁻, v, v⁺, X, D, t)
14                    senão TRATACASO3(T, v, Y, n, D, t)
15  devolva (D, t)
```

Consumo de tempo

O tratamento de cada caso consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$.

Assim, o algoritmo DIVIDEEMMONÓTONO-LP
consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$ por iteração.

São n iterações, logo o consumo de tempo total é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Consumo de tempo

O tratamento de cada caso consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$.

Assim, o algoritmo DIVIDEEMMONÓTONO-LP
consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$ por iteração.

São n iterações, logo o consumo de tempo total é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Como se livrar da hipótese simplificadora?

Consumo de tempo

O tratamento de cada caso consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$.

Assim, o algoritmo DIVIDEEMMONÓTONO-LP
consome tempo $\mathrm{O}(\lg n)$ por iteração.

São n iterações, logo o consumo de tempo total é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Como se livrar da hipótese simplificadora?

Como acoplar isso com o algoritmo linear para triangularizar polígonos monótonos?