GEOMETRIA COMPUTACIONAL

CRISTINA GOMES FERNANDES

Departamento de Ciência da Computação
Segundo semestre de 2009

1. Introdução

A procura por algoritmos para resolver problemas geométricos vem desde a época da antiguidade. Algumas motivações práticas para a busca por tais algoritmos foram os impostos sobre o uso da terra e construções de edificações. São bem-conhecidas as construções geométricas de Euclides, que usavam como instrumentos régua e compasso e consistiam de algumas operações que podiam ser realizadas com esses instrumentos. Um problema clássico de construção geométrica através de régua e compasso é o chamado *Problema de Apollonius* (cerca de 200 A.C.), no qual três circunferências arbitrárias no plano eram dadas e pedia-se uma quarta circunferência que fosse tangente às três circunferências dadas. Euclides apresentou um algoritmo que resolve este problema.

Dentre todos os problemas de construção geométrica usando as operações de Euclides, um que atraiu grande atenção foi o problema da construção de um polígono regular de n lados. Para $n = 3, 4, 5, 6$, a solução é conhecida desde a antiguidade. Entretanto, para heptágonos regulares, o problema não tem solução: aos 17 anos, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) mostrou que *não* existe um algoritmo que, usando somente as operações de Euclides, constrói um heptágono regular. Gauss na realidade mostrou que existe um algoritmo para construir um polígono regular com p lados, para p primo, se e somente se p é um número de Fermat, ou seja, é da forma $2^{2^k} + 1$ para algum inteiro k não-negativo.

Em 1902, Emile Lemoine introduziu uma medida de *simplicidade* para os algoritmos que usam as operações de Euclides [18]. Esta medida é baseada no número destas operações realizadas pelo algoritmo. Para Lemoine, o algoritmo mais simples é aquele que faz menos operações. A solução de Euclides para o Problema de Apollonius requer 508 operações enquanto que um algoritmo proposto por Lemoine requer menos de duzentas. Estava portanto introduzido em geometria um conceito que é, pelo menos em essência, o que hoje chamamos de complexidade de um algoritmo.

Em geometria computacional estamos interessados em projetar algoritmos eficientes para resolver problemas geométricos. Pelo que foi exposto acima, vemos que não é algo novo. A diferença é que as construções usam um instrumento diferente da régua e do compasso: usam um computador. Um pouco mais precisamente, em geometria computacional, estamos interessados em encontrar algoritmos eficientes, ou procedimentos computacionais, para resolver problemas geométricos. Muitos desses problemas têm sua origem em outras áreas, como computação gráfica, robótica e processamento de imagens. No projeto de tais algoritmos, são comumente utilizados resultados de geometria euclidiana, combinatória, teoria dos grafos, estruturas de dados e análise de algoritmos.

Geometria computacional é um termo usado por diversos grupos. Entretanto, o termo tem sido mais utilizado para descrever a subárea da teoria de algoritmos que trata do projeto e análise de algoritmos eficientes para problemas envolvendo objetos geométricos, principalmente, em espaços de dimensão 2, 3 ou, de uma maneira mais geral, de dimensão fixa. As entradas para os problemas são primordialmente objetos simples: pontos, retas, segmentos de retas, polígonos, planos e poliedros. É neste sentido que empregamos o termo geometria computacional neste curso.

Se a tese de doutorado de Michael Ian Shamos (1978) for aceita como o início da geometria computacional, pelo menos da maneira como ela será tratada aqui, então a área tem apenas cerca de 30 anos. Ela desenvolveu-se rapidamente nas décadas de 80 e 90, e continua a se desenvolver. Por causa da área a partir da qual cresceu, algoritmos combinatórios, geometria computacional tem sempre enfatizado problemas de natureza matemática discreta. Na maioria dos problemas em geometria computacional, as instâncias são um conjunto finito de pontos ou de outros objetos

geométricos, e a resposta é algum tipo de estrutura descrita por um conjunto finito de pontos ou segmentos de retas.

De acordo com Joseph O'Rourke, nem todos os problemas em aberto em geometria computacional são necessariamente difíceis; alguns estão simplesmente esperando a devida atenção [17]. Este pode ser um bom motivo para investigarmos problemas desta área.

2. Objetivos da disciplina

O objetivo desta disciplina é apresentar técnicas, algoritmos e estruturas de dados empregados no projeto e análise de algoritmos eficientes para resolução de problemas geométricos. Pretendemos mostrar estratégias clássicas de solução de problemas geométricos, assim como apresentar possivelmente temas de pesquisa.

3. Pré-requisitos

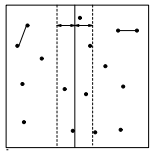
Para esta disciplina, os pré-requisitos são: conhecimento de técnicas básicas de projeto de algoritmos, como divisão-e-consquista, algoritmo guloso, programação dinâmica; notação e técnicas básicas de análise de algoritmos, como notação assintótica, resolução de somatórios e recorrências; e conhecimento de estruturas de dados básicas, como filas de prioridades (heaps) e árvores balanceadas de busca binária.

4. Tópicos que pretendemos cobrir

Alguns dos tópicos que pretendemos cobrir nesta disciplina são: fechos convexos; problemas de proximidade; partições convexas; busca geométrica; e problemas de intersecção.

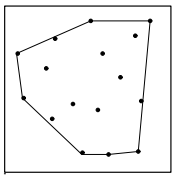
Abaixo encontra-se uma breve descrição de alguns problemas que estudaremos nesta disciplina.

Problema do par mais próximo (closest pair problem)



Dados n pontos, queremos encontrar dois deles que estejam a distância mínima. Uma aplicação prática deste problema é em controle de tráfego aéreo: os dois aviões que estão em maior perigo de colisão são aqueles que estão mais próximos. Este problema pode ser resolvido facilmente em $O(dn^2)$, onde d é a dimensão do espaço. O problema do par mais próximo pode ser resolvido por um algoritmo do tipo divisão-e-conquista em tempo $O(dn \log n)$ (cf. Capítulo 5 de Preparata e Shamos [18]) .

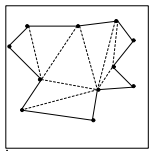
Fecho convexo de um conjunto de pontos



Convexidade é uma propriedade geométrica bastante importante. Um conjunto de pontos é *convexo* se, para cada par de pontos no conjunto, o segmento de reta entre eles está inteiramente contido no conjunto. Segundo O'Rourke (cf. O'Rourke [17], pg. 80) talvez o primeiro artigo na área de geometria computacional tenha sido sobre fechos convexos. O Problema do Fecho Convexo consiste em, dados n pontos, encontrar o fecho convexo desses pontos. Uma das aplicações práticas deste problema se encontra em robótica. Se o fecho convexo de um robô não colide com obstáculos então o robô também não colide.

Nos anos 60 uma aplicação da Bell Labs necessitava computar o fecho convexo de aproximadamente 10.000 pontos no plano e os algoritmos de complexidade de tempo $O(n^2)$ foram considerados muito lentos. Tendo essa aplicação como motivação, no começo do anos 70, Graham [11] projetou o primeiro algoritmo de complexidade de tempo $O(n \log n)$. O fecho convexo também pode ser construído em $O(n \log n)$ por um algoritmo de divisão-e-conquista (cf. Capítulo 3 de Preparata e Shamos [18]).

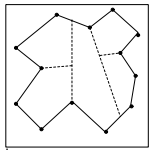
Triangularização de polígonos



O interesse aqui é particionar um certo 'domínio complexo' em uma coleção de objetos 'simples'. A região mais simples na qual podemos decompor um objeto planar é um triângulo (um tetraedro em 3-d e um 'simplex' em geral). Dado um polígono P, queremos adicionar a P o maior número possível de diagonais que não se cruzem de tal forma que o interior de P fique particionado em triângulos. Chazelle [1] projetou um algoritmo linear para este problema.

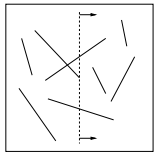
Um algoritmo para triangularizar polígonos pode ser utilizado em problemas do tipo *Art Gallery* (cf. O'Rourke [16]). Imagine que as salas de uma galeria de arte formem um polígono. Considerando que cada guarda fica parado em um local da galeria, qual é o menor número de guardas que são necessários para tomar conta das salas?

Partição de polígonos



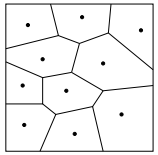
Além de algoritmos eficientes para particionar um polígono em triângulos, também são de interesse algoritmos que particionem um polígono em (digamos) polígonos monótonos, trapezóides e polígonos convexos. Uma motivação para particionar um polígono em polígonos convexos é o reconhecimento de caracteres: um caractere pode ser representado como um polígono particionado em partes convexas.

Intersecções



Um dos problemas geométricos mais básicos é o de determinar quando dois objetos se intersectam. A determinação se dois objetos complexos se intersectam é freqüentemente reduzida ao problema de determinar quais pares de entidades primitivas (e.g., segmentos de retas) se intersectam. Veremos algoritmos eficientes para computar a intersecção de um conjunto de segmentos de retas.

Diagramas de Voronoi



Dado um conjunto S de n pontos no plano, queremos determinar para cada ponto p em S qual é a região $V(p)$ dos pontos do plano que estão mais perto de p do que de qualquer outro ponto em S. As n regiões $V(p)$ formam uma partição do plano chamada de *Diagrama de Voronoi*.

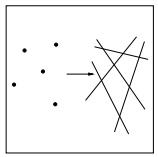
Imagine uma vasta floresta contendo vários pontos de observação de incêndio. O conjunto das árvores que estão mais próximas de um determinado posto p determina a região $V(p)$ das árvores que são de responsabilidade do ponto p.

O diagrama de Voronoi de um conjunto de n pontos pode ser construído em $O(n \log n)$ por um (complicado) algoritmo de divisão-e-conquista (cf. Shamos e Hoey [19]). Em 1985, Fortune [10] projetou um algoritmo de varredura (*plane-sweep algorithm*) muito elegante e simples cuja complexidade de tempo é $O(n \log n)$.

Triangularização de Delaunay

O dual geométrico (usando retas) de um diagrama de Voronoi para um conjunto S de pontos forma uma triangularização do conjunto S, chamada de *triangularização de Delaunay*. A triangularização de Delaunay tem várias propriedades geométricas interessantes. Por exemplo, ela contém todas as "árvores geradoras mínimas" de S (cf. Capítulo 6 de Preparata e Shamos [18]).

Arranjos e dualidade



Talvez uma das estruturas matemáticas mais importantes em geometria computacional seja um arranjo de retas (e em geral, arranjos de curvas e superfícies). Dadas n retas no plano, um arranjo é simplesmente o grafo que tem como vértices as intersecções das retas e como arestas os segmentos de retas ligando estas intersecções. Veremos que uma tal estrutura pode ser construída em tempo $O(n^2)$. A razão para está estrutura ser tão importante é que muitos problemas envolvendo pontos podem ser transformados em problemas envolvendo retas através do método de dualidade. Por exemplo, suponha que desejemos determinar se existem três pontos colineares entre um conjunto de n pontos no plano. Isto pode ser determinado por um algoritmo do tipo força-bruta em tempo $O(n^3)$. Entretanto, se os pontos são dualizados em retas, então (como veremos mais tarde nesta semestre) a questão é reduzida a decidir se existe um vértice de grau pelo menos 4 neste arranjo de retas.

5. Geometria computacional na Internet

Existe **muito** material **muito** bom de Geometria Computacional na Internet. Durante o andamento da disciplina manterei na página

`http://www.ime.usp.br/~cris/geocomp/`,

uma lista de alguns sítios de Geometria Computacional. Durante o andamento da disciplina está página deverá ser atualizada e expandida. Se você encontrar algum sítio de Geometria Computacional (ou de qualquer outra coisa) que você ache interessante, por favor, não deixe de me avisar.

6. Monitor

O monitor desta disciplina é Alvaro Junio Pereira Franco (`alvaro@ime.usp.br`). A página dele é `http://www.ime.usp.br/~alvaro/`. Ele fará um plantão semanal no CEC, todas as terças-feiras, das 15 às 16 horas. Se necessário, podemos marcar uma segunda hora de plantão.

7. Bibliografia

Para preparar as aulas desta disciplina usarei as notas de aula do professor José Coelho de Pina [5], o capítulo *Convite à Geometria Computacional* de [8], os livros de O'Rourke [17] e de Berg, van Kreveld, Overmars, e Schwarzkopf [4].

O livro de Preparata e Shamos [18] é um texto clássico em geometria computacional (foi primeiro livro sobre o assunto) que coloca bastante ênfase na análise dos algoritmos apresentados. Este livro contém basicamente todos os tópicos que serão tratados nesta disciplina. Outros livros que também podem ser encontrados na biblioteca são: Edelsbrunner [7] ("The art of counting and estimating is at heart of combinatorics—and it is a necessary prerequisite for analyzing algorithms ..."; copiado da introdução da Parte I deste livro); Figueiredo e Carvalho [9] (um livro muito claro e introdutório); e Rezende e Stolfi [6] (descreve varias técnicas e algoritmos em geometria computacional). Outros livros sobre geometria computacional são: Laszlo [14] (um livro que descreve vários algoritmos em geometria computacional e apresenta trechos de implementações em `C++`); Mulmuley [15] (como o próprio título diz, este livro trata de algoritmos aleatórios em geometria computacional). Cormen, Leiserson, Rivest & Stein [3] é um livro enciclopédico sobre análise de algoritmos que trata de geometria computacional no Capítulo 33.

Na biblioteca também podem ser encontrados alguns surveys sobre geometria computacional. Veja por exemplo: Chazelle [2]; Graham e Yao [12]; Guibas e Stolfi [13]; e Yao [20].

Artigos em geometria computacional podem ser encontrados em várias revistas, incluindo *ACM Transactions on Graphics*, *Algorithmica*, *Journal of Algorithms*, *Journal of the ACM*, e *SIAM Journal on Computing*. Uma revista que é particularmente dedicada à área é *Discrete and Computational Geometry* e mais recentemente temos *International Journal of Computational Geometry & Applications* e *Computational Geometry, Theory and Applications*.

Existe uma conferência anual em geometria computacional, a *ACM Annual Conference on Computational Geometry* (alguns dos proceedings podem ser encontrados na biblioteca; veja QA758.C S989). Além desta, várias outras conferências apresentam trabalhos em geometria computacional: por exemplo, *STOC* (QA800.C S989), *FOCS* (QA800.C S989), *SODA* (QA758.C S989), e *ICALP*.

8. Implementações de algoritmos

Algumas das animações dos algoritmos que vocês verão durante as aulas foram feitas pelos alunos Alexis Sakurai Landgraf Carvalho, Caetano Jimenez Carezzato, Lucas Piva Rocha Corrêa, Natan Costa Lima, Roberto Carvalho, e Rodrigo Souza de Castro.

Algumas destas animações foram um dos trabalhos destes alunos em um oferecimento passado da disciplina Geometria Computacional. Se você tiver interesse em fazer a animação de algum dos algoritmos vistos em aula, venha conversar comigo.

9. Critério de avaliação

A nota final na disciplina será baseada em três componentes:

Listas de exercícios: Pretendo disponibilizar várias listas de exercícios durante o semestre e alguns dos exercícios deverão ser entregues para correção.

Provas: Teremos três provas nesta disciplina. A primeira prova será no dia 24 de setembro, a segunda prova no dia 5 de novembro e a terceira prova no dia 10 de dezembro.

Tarefas: Teremos algumas tarefas de implementação atribuídas durante o decorrer da disciplina, geralmente tiradas do site UVA.

Projetos: Dependendo do seu interesse, você deverá fazer um projeto de programação ou um survey da literatura sobre algum tópico.

Um projeto de programação consistirá na implementação de (pelo menos) dois algoritmos para um problema e a comparação dos desempenhos. Junto com o programa, é esperado que você entregue um relátorio, em LaTeX ou HTML, de no máximo duas páginas, sobre os resultados obtidos. Existem vários problemas que são candidatos para este exercício. Alguns exemplos são: fecho convexo em três dimensões, diagrama de Voronoi, triangularização de Delaunay, etc.

O survey consistirá em escrever cerca de 10 páginas, em LaTeX ou HTML, dando um histórico claro sobre a pesquisa em algum tópico em geometria computacional. Seria bacana se o tópico escolhido não fosse algo já coberto por livros. Alguns exemplos para tópicos podem ser: algoritmos aleatórios em geometria computacional, algoritmos paralelos em geometria computacional, algoritmos para problemas dinâmicos em geometria computacional, etc.

10. Outras informações

A minha sala é a 107-C, o número do meu telefone é 3091-5709 e meu endereço eletrônico é `cris@ime.usp.br`. Manterei uma página de MAC0331/MAC5747 no URL

`http://www.ime.usp.br/~cris/geocomp/`.

Nessa página eu colocarei o material da disciplina (como, por exemplo, listas de exercícios, notas de aula, programação das aulas, etc). Por favor, dê uma olhada nesta página regularmente.

Há uma lista de discussão que tem como objetivo servir de suporte para a disciplina. Recomenda-se que você mande para esta lista suas dúvidas, sugestões, críticas ou observações sobre o andamento da disciplina. Assim, se você pretende cursar geometria computacional, por favor, inscreva-se na lista, que estará acessível a partir da página da disciplina. Sinta-se a vontade para me escrever e fazer perguntas ou comentários sobre a disciplina.

Outros professores do departamento que estudam geometria computacional são Carlos Eduardo Ferreira (sala 108-C, `cef@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~cef/`), José Augusto Ramos Soares (sala 102-C, `jose@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~jose/`), e José Coelho de Pina (sala 4-C, `jose@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br /~coelho/`).

Se seu interesse é Computação Gráfica, converse com o professor Antonio Elias Fabris (e-mail `aef@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~aef/`). Se você quer saber o que é Processamento de Imagens, Visão Computacional, etc, então converse com os professores Carlos Hitoshi Morimoto (sala 209-C, `hitoshi@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~hitoshi/`), Nina S. T. Hirata (sala 6-C, `nina@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~nina/`), Marcel Parolin Jackowski (sala 10-C, `mjack@ime.usp.br`, `http://www.ime.usp.br/~mjack/`), e Roberto Marcondes Cesar Júnior (sala 297-A, `cesar@ime.usp.br`, `http://www .ime.usp.br/~cesar/`).

Referências

1. B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete and Computational Geometry **6** (1991), 485–524.
2. ———, *Computational geometry: A retrospective*, Proceedings of the Twenty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (Montréal, Québec, Canada), The ACM Special Interest Group for Algorithms and Computation Theory, May 1994, pp. 75–94.
3. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to algorithms*, 2. ed., MIT Press, 2001.
4. M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational geometry, algorithms and applications*, Springer Verlag, 1997, second edition, 2000.
5. J.C. de Pina, *Geometria computacional*, Notas de aula, 2000.
6. P.J. de Rezende and J. Stolfi, *Fundamentos de geometria computacional*, IX Escola de Computação, 1994.
7. H. Edelsbrunner, *Algorithms in combinatorial geometry*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, no. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987, QA758 E21a.
8. C.G. Fernandes and J.C. de Pina, *Convite à geometria computacional*, Jornadas de Atualização em Informática da SBC, ch. 7, Ed. PUC-Rio, 2009, acessível em `http://www.ime.usp.br/~cris/jai2009/`.
9. L.H. Figueiredo and P.C.P. Carvalho, *Introdução à geometria computacional*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991, QA758 F475i.
10. S. Fortune, *A sweepline algorithm for Voronoi diagrams*, Algorithmica **2** (1987), 153–174.
11. R.L. Graham, *An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set*, Information Processing Letters **1** (1972), 132–133.
12. R.L. Graham and F. Yao, *A whirlwind tour of computational geometry*, The American Mathematical Monthly **97** (1990), no. 8, 687–701.
13. L.J. Guibas and J. Stolfi, *Ruler, compass and computer: The design and analysis of geometric algorithms*, Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD (R.A. Earnshaw, ed.), NATO ASI Series, vol. F40, Springer-Verlag, 1988, pp. 111–165.
14. M.J. Laszlo, *Computational geometry and computer graphics in C++*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
15. K. Mulmuley, *Computational geometry: An introduction through randomized algorithms*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
16. J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.
17. ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.
18. F.P. Preparata and M.I. Shamos, *Computational geometry: An introduction*, Texts and Monographs in Computer Science, Springer-Verlag, New York, 1985, QA758 P927c.
19. M.I. Shamos and D. Hoey, *Closest point problems*, Proc. 16th Annual IEEE Symposium in Foundations of Computer Science, 1975, pp. 151–162.
20. F.F. Yao, *Computational geometry*, Handbook of Theoretical Computer Science (J. van Leeuwen, ed.), vol. A, The MIT Press/Elsevier, Amsterdam, 1990, QA810.C3 V259h v.1A, pp. 343–389.