

# **Estruturas de Dados**

Cristina Gomes Fernandes

# Árvores de busca binária (ABB)

**ABB:** árvore binária onde, para cada nó  $x$ , todo nó da subárvore esquerda de  $x$  tem *info* menor que  $info(x)$ , e todo nó da subárvore direita de  $x$  tem *info* maior que  $info(x)$ .

As operações de busca, inserção, remoção, mínimo, sucessor, etc, consome tempo, no pior caso, proporcional à altura da ABB.

A altura de uma ABB não balanceada por chegar a  $n - 1$ , onde  $n$  é o número de elementos armazenados na ABB. Ou seja, as operações acima, no pior caso, consomem tempo  $\Theta(n)$ .

# Busca em ABBs

**BUSQUE** ( $T, x$ )

1 **se**  $T = \text{NIL}$  **ou**  $\text{info}(T) = x$

2 **então devolva**  $T$

3 **senão se**  $x < \text{info}(T)$

4 **então devolva**  $\text{BUSQUE}(\text{esq}(T), x)$

5 **senão devolva**  $\text{BUSQUE}(\text{dir}(T), x)$

# Busca em ABBs

**BUSQUE** ( $T, x$ )

- 1 **se**  $T = \text{NIL}$  **ou**  $\text{info}(T) = x$
- 2     **então devolva**  $T$
- 3     **senão se**  $x < \text{info}(T)$
- 4             **então devolva**  $\text{BUSQUE}(\text{esq}(T), x)$
- 5             **senão devolva**  $\text{BUSQUE}(\text{dir}(T), x)$

Versão iterativa:

**BUSQUE** ( $T, x$ )

- 1  $p \leftarrow T$
- 2 **enquanto**  $p \neq \text{NIL}$  **e**  $\text{info}(p) \neq x$  **faça**
- 3     **se**  $x < \text{info}(p)$
- 4         **então**  $p \leftarrow \text{esq}(p)$
- 5         **senão**  $p \leftarrow \text{dir}(p)$
- 6 **devolva**  $p$

# Inserção em ABBs

**INSIRA** ( $T, q$ )  $\triangleright q$  é a célula nova

```
1   $p \leftarrow T$ 
2   $ant \leftarrow \text{NIL}$ 
3   $x \leftarrow \text{info}(q)$ 
4  enquanto  $p \neq \text{NIL}$  faça
5       $ant \leftarrow p$ 
6      se  $x < \text{info}(p)$ 
7          então  $p \leftarrow \text{esq}(p)$ 
8          senão  $p \leftarrow \text{dir}(p)$ 
9  se  $ant = \text{NIL}$ 
10     então  $T \leftarrow q$ 
11     senão se  $x < \text{info}(ant)$ 
12         então  $\text{esq}(ant) \leftarrow q$ 
13         senão  $\text{dir}(ant) \leftarrow q$ 
14   $\text{pai}(q) \leftarrow ant$ 
```

# Versão recursiva da inserção

Nesta implementação, não temos o campo *pai*.

**INSIRA** ( $T, x$ )

1  $T \leftarrow \text{INSIRAREC}(T, x)$

**INSIRAREC** ( $T, x$ )

1 **se**  $T = \text{NIL}$

2     **então**  $q \leftarrow \text{NOVACÉLULA}(x, \text{NIL}, \text{NIL})$

3             **devolva**  $q$

4 **se**  $x < \text{info}(T)$

5     **então**  $\text{esq}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{esq}(T), x)$

6     **senão**  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{dir}(T), x)$

7 **devolva**  $T$

# Versão recursiva da inserção

Nesta implementação, não temos o campo *pai*.

**INSIRA** ( $T, x$ )

1  $T \leftarrow \text{INSIRAREC}(T, x)$

**INSIRAREC** ( $T, x$ )

1 **se**  $T = \text{NIL}$

2     **então**  $q \leftarrow \text{NOVACÉLULA}(x, \text{NIL}, \text{NIL})$

3             **devolva**  $q$

4 **se**  $x < \text{info}(T)$

5     **então**  $\text{esq}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{esq}(T), x)$

6     **senão**  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{dir}(T), x)$

7 **devolva**  $T$

**Exercício:** Ajuste a rotina acima para que mantenha também o campo *pai* atualizado.

# ABBs rubro-negras

Uma ABB é **rubro**-negra se

1. todo nó é **rubro** ou negro
2. toda folha (NIL) é negro
3. se um nó é **rubro**, então seus dois filhos são negros
4. todo caminho de um nó  $x$  até uma folha sua descendente tem o mesmo número de nós negros.

# ABBs rubro-negras

Uma ABB é **rubro-negra** se

1. todo nó é **rubro** ou **negro**
2. toda folha (NIL) é **negra**
3. se um nó é **rubro**, então seus dois filhos são **negros**
4. todo caminho de um nó  $x$  até uma folha sua descendente tem o mesmo número de nós **negros**.

$rn(x)$ : número de nós **negros** no caminho de um filho de  $x$  até uma folha descendente de  $x$ .

# ABBs rubro-negras

Uma ABB é **rubro-negra** se

1. todo nó é **rubro** ou **negro**
2. toda folha (NIL) é **negra**
3. se um nó é **rubro**, então seus dois filhos são **negros**
4. todo caminho de um nó  $x$  até uma folha sua descendente tem o mesmo número de nós **negros**.

$rn(x)$ : número de nós **negros** no caminho de um filho de  $x$  até uma folha descendente de  $x$ .

**Lema:** Uma ABB **rubro-negra** com  $n$  nós internos tem altura no máximo  $2 \lg(n + 1)$ .

# rotações

O nó  $p$  é tal que  $dir(p) \neq \text{NIL}$  e  $cor(dir(p)) = \text{RUBRO}$ .

## ROTACIONEESQ ( $p$ )

- 1  $q \leftarrow dir(p)$
- 2  $dir(p) \leftarrow esq(q)$
- 3  $esq(q) \leftarrow p$
- 4  $cor(q) \leftarrow cor(p)$
- 5  $cor(p) \leftarrow \text{RUBRO}$
- 6 **devolva**  $q$

# rotações

O nó  $p$  é tal que  $dir(p) \neq \text{NIL}$  e  $cor(dir(p)) = \text{RUBRO}$ .

## ROTACIONEESQ ( $p$ )

- 1  $q \leftarrow dir(p)$
- 2  $dir(p) \leftarrow esq(q)$
- 3  $esq(q) \leftarrow p$
- 4  $cor(q) \leftarrow cor(p)$
- 5  $cor(p) \leftarrow \text{RUBRO}$
- 6 **devolva**  $q$

**Exercício:** Escreva o ROTACIONEDIR.

**Exercício:** Ajuste estas rotinas para que mantenham o campo  $pai$ .

# Ajusta cores

O nó  $p$  é interno.

**TROQUECORES** ( $p$ )

- 1  $cor(p) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(p))$
- 2  $cor(esq(p)) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(esq(p)))$
- 3  $cor(dir(p)) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(dir(p)))$

# Ajusta cores

O nó  $p$  é interno.

**TROQUECORES** ( $p$ )

- 1  $cor(p) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(p))$
- 2  $cor(esq(p)) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(esq(p)))$
- 3  $cor(dir(p)) \leftarrow \text{OUTRACOR}(cor(dir(p)))$

**OUTRACOR** ( $c$ )

- 1 **se**  $c = \text{RUBRO}$
- 2 **então devolva** NEGRO
- 3 **senão devolva** RUBRO

# Inserção em ABB rubro-negra

**RUBRO** ( $p$ )

1 **se**  $p = \text{NIL}$

2     **então devolva** FALSO

3     **senão se**  $\text{cor}(p) = \text{RUBRO}$

4             **então devolva** VERDADE

5             **senão devolva** FALSO

NEGRO ( $p$ )

1 **devolva** não **RUBRO**( $p$ )

# Inserção em ABB rubro-negra

**RUBRO** ( $p$ )

1 **se**  $p = \text{NIL}$

2     **então devolva** FALSO

3     **senão se**  $\text{cor}(p) = \text{RUBRO}$

4             **então devolva** VERDADE

5             **senão devolva** FALSO

**NEGRO** ( $p$ )

1 **devolva** não **RUBRO**( $p$ )

**INSIRA** ( $T, x$ )

1  $T \leftarrow \text{INSIRAREC}(T, x)$

2  $\text{cor}(T) \leftarrow \text{NEGRO}$    ▷ a raiz é sempre negra

# Inserção em ABB rubro-negra

Esta é a inserção para **árvores 2-3**:

**INSIRAREC** ( $T, x$ )

- 1 **se**  $T = \text{NIL}$
- 2     **então**  $q \leftarrow \text{NOVACÉLULA}(x, \text{NIL}, \text{NIL}, \text{RUBRO})$
- 3         **devolva**  $q$
- 4 **se**  $x < \text{info}(T)$
- 5     **então**  $\text{esq}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{esq}(T), x)$
- 6     **senão**  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{dir}(T), x)$
- 7 **se**  $\text{RUBRO}(\text{dir}(T))$  e  $\text{NEGRO}(\text{esq}(T))$
- 8     **então**  $T \leftarrow \text{ROTACIONEESQ}(T)$
- 9 **se**  $\text{RUBRO}(\text{esq}(T))$  e  $\text{RUBRO}(\text{esq}(\text{esq}(T)))$
- 10     **então**  $T \leftarrow \text{ROTACIONEDIR}(T)$
- 11 **se**  $\text{RUBRO}(\text{esq}(T))$  e  $\text{RUBRO}(\text{dir}(T))$
- 12     **então**  $\text{TROQUECORES}(T)$
- 13 **devolva**  $T$

# Inserção em ABB rubro-negra

Esta é a inserção para **árvores 2-3-4**:

**INSIRAREC** ( $T, x$ )

- 1 **se**  $T = \text{NIL}$
- 2     **então**  $q \leftarrow \text{NOVACÉLULA}(x, \text{NIL}, \text{NIL}, \text{RUBRO})$
- 3     **devolva**  $q$
- 4 **se**  $\text{RUBRO}(\text{esq}(T))$  e  $\text{RUBRO}(\text{dir}(T))$
- 5     **então**  $\text{TROQUECORES}(T)$
- 6 **se**  $x < \text{info}(T)$
- 7     **então**  $\text{esq}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{esq}(T), x)$
- 8     **senão**  $\text{dir}(T) \leftarrow \text{INSIRAREC}(\text{dir}(T), x)$
- 9 **se**  $\text{RUBRO}(\text{dir}(T))$  e  $\text{NEGRO}(\text{esq}(T))$
- 10    **então**  $T \leftarrow \text{ROTACIONEESQ}(T)$
- 11 **se**  $\text{RUBRO}(\text{esq}(T))$  e  $\text{RUBRO}(\text{esq}(\text{esq}(T)))$
- 12    **então**  $T \leftarrow \text{ROTACIONEDIR}(T)$
- 13 **devolva**  $T$

# Exercício

Simule a inserção em uma árvore rubro-negra inicialmente vazia das seguintes chaves:

20, 17, 38, 40, 53, 10, 6, 16, 23, 14, 11, 50, 45.

Faça a simulação duas vezes: uma com o INSIRA de árvore 2-3 e outra com o INSIRA de árvore 2-3-4.

Analise e discuta as diferenças que você observa.