# Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

# Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo visto hoje.
Temos que ser mais espertos...

# Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo visto hoje.
Temos que ser mais espertos...

Idéia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação vai ajudar a contar várias inversões de uma só vez.

# Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo visto hoje.
Temos que ser mais espertos...

Idéia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação vai ajudar a contar várias inversões de uma só vez.

Método: Divisão e conquista.

# Número de inversões

Você sabe fazer um algoritmo mais rápido para o problema do número de inversões?

Note que o número de inversões pode ser $\Theta(n^2)$.
Portanto, para isso, não podemos contar de uma em uma as inversões, como faz o algoritmo visto hoje.
Temos que ser mais espertos...

Idéia: Vamos ordenar e contar ao mesmo tempo!
A ordenação vai ajudar a contar várias inversões de uma só vez.

Método: Divisão e conquista.

Resultado: Um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para o problema do número de inversões de uma permutação.

# Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,.\,.\,n]$, determinar o número de inversões em $p$.

Uma inversão é um par $(i, j)$ de índices de $p$ tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

# Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em $p$.

Uma inversão é um par $(i, j)$ de índices de $p$ tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Que algoritmo de ordenação usaremos?

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$, então temos duas opções: o MERGESORT e o HEAPSORT.

Qual deles parece mais adequado para nos ajudar a contar inversões?

# Número de inversões

Problema: Dada uma permutação $p[1\,..\,n]$, determinar o número de inversões em $p$.

Uma inversão é um par $(i, j)$ de índices de $p$ tal que $i < j$ e $p[i] > p[j]$.

Que algoritmo de ordenação usaremos?

Queremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$, então temos duas opções: o MERGESORT e o HEAPSORT.

Qual deles parece mais adequado para nos ajudar a contar inversões?

Resposta: o MERGESORT.

# Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

```
MERGESORT $(A, p, r)$
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGESORT $(A, p, q)$
            MERGESORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA $(A, p, q, r)$
```

# Intercalação

**Problema:** Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de $q$ o problema faz sentido?

Entra:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |

# Intercalação

Problema: Dados $A[p\,..\,q]$ e $A[q{+}1\,..\,r]$ crescentes, rearranjar $A[p\,..\,r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Para que valores de $q$ o problema faz sentido?

Entra:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |

Sai:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |

# Intercalação

```
INTERCALA $(A, p, q, r)$
    $\triangleright$ $B[p\,..\,r]$ é um vetor auxiliar
    **para** $i \leftarrow p$ **até** $q$ **faça**
        $B[i] \leftarrow A[i]$
    **para** $j \leftarrow q + 1$ **até** $r$ **faça**
        $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$
    $i \leftarrow p$
    $j \leftarrow r$
    **para** $k \leftarrow p$ **até** $r$ **faça**
        **se** $B[i] \leq B[j]$
            **então** $A[k] \leftarrow B[i]$
                $i \leftarrow i + 1$
            **senão** $A[k] \leftarrow B[j]$
                $j \leftarrow j - 1$
```

# Adaptação do Merge-Sort

Conta o número de inversões de $A[p\,.\,.\,r]$, com $p \leq r$, e rearranja $A[p\,.\,.\,r]$ em ordem crescente.

```
CONTA-E-ORDENA $(A, p, r)$
1    se $p \geq r$
2        então devolva $0$
3        senão $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3            $c \leftarrow$ CONTA-E-ORDENA $(A, p, q) +$
4                CONTA-E-ORDENA $(A, q+1, r) +$
5                CONTA-E-INTERCALA $(A, p, q, r)$
6            devolva $c$
```

# Contagem na intercalação

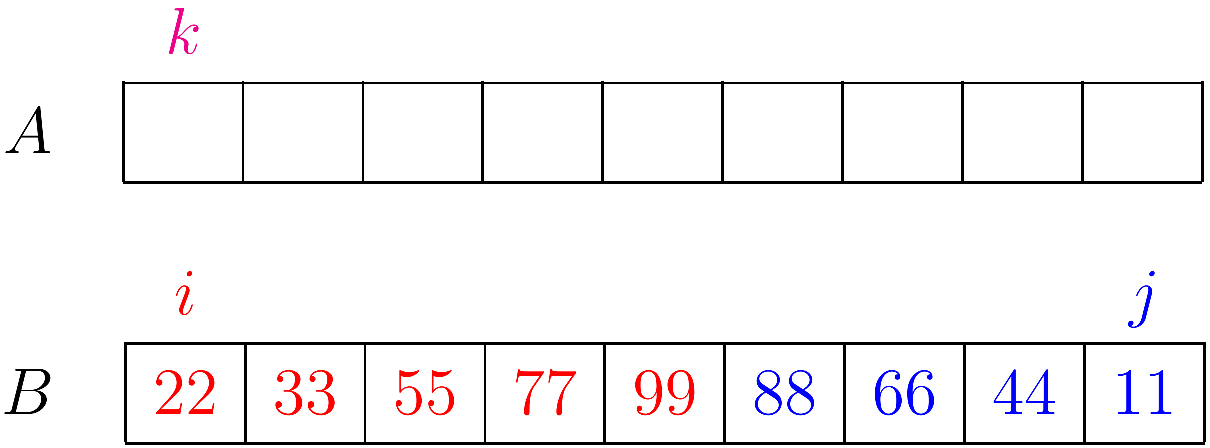
```
CONTA-E-INTERCALA $(A, p, q, r)$
para $i \leftarrow p$ até $q$ faça
    $B[i] \leftarrow A[i]$
para $j \leftarrow q + 1$ até $r$ faça
    $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$
$i \leftarrow p$
$j \leftarrow r$
$c \leftarrow 0$                                        ▷ inicializa o contador
para $k \leftarrow p$ até $r$ faça
    se $B[i] \leq B[j]$
        então $A[k] \leftarrow B[i]$
              $i \leftarrow i + 1$
        senão $A[k] \leftarrow B[j]$
              $j \leftarrow j - 1$
              $c \leftarrow c + (q - i + 1)$            ▷ conta inversões
devolva $c$
```

# Simulação

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | | | | $q$ | | | | $r$ |
| $A$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 11 | 44 | 66 | 88 |
| $B$ | | | | | | | | | |

$c = 0$

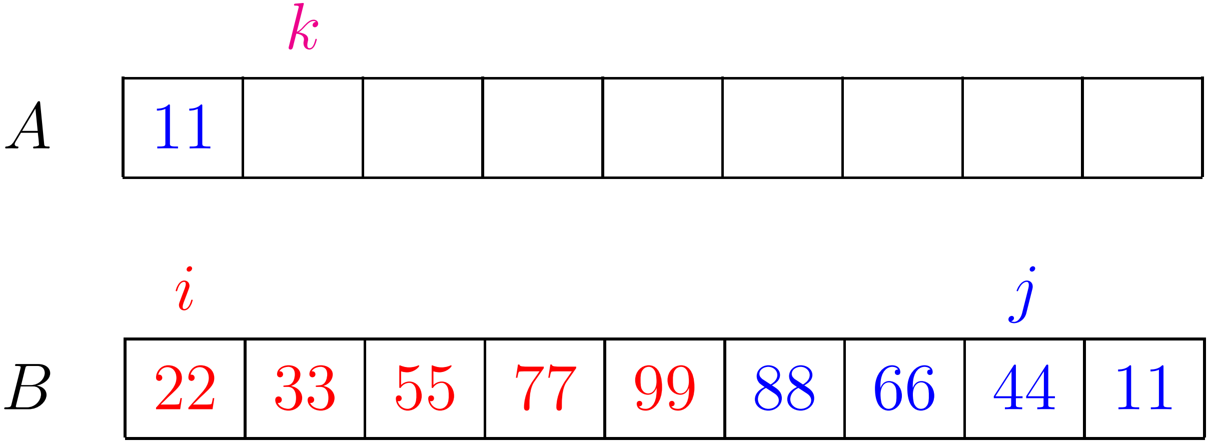
# Simulação



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k$ | | | | | | | | |
| $A$ | | | | | | | | | |
| | $i$ | | | | | | | | $j$ |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 0$

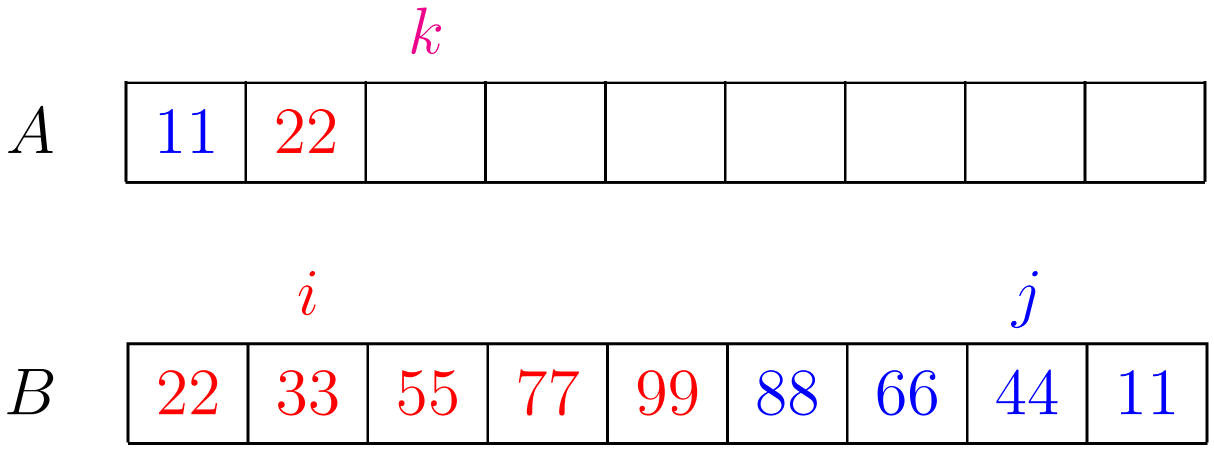
# Simulação



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | | | | | | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$$c = 0 + 5 = 5$$

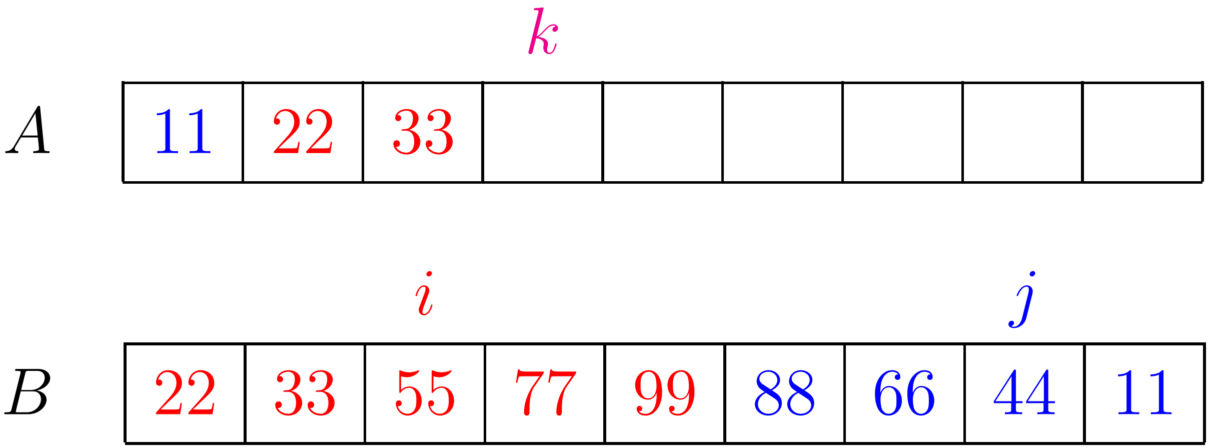
# Simulação



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $k$ | | | | | | |
| $A$ | 11 | 22 | | | | | | | |
| | | $i$ | | | | | | $j$ | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 5$

# Simulação

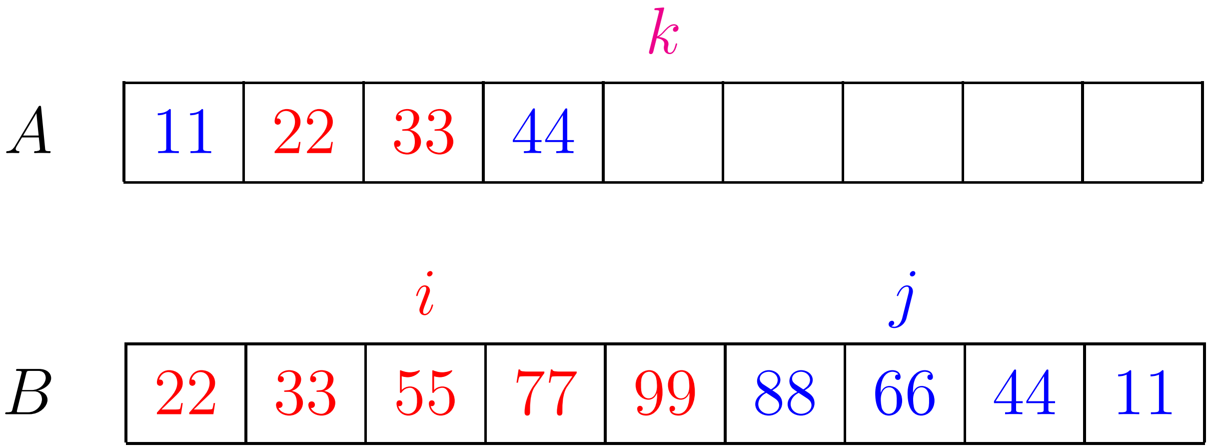


| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $k$ | | | | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | | $j$ | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 5$

# Simulação

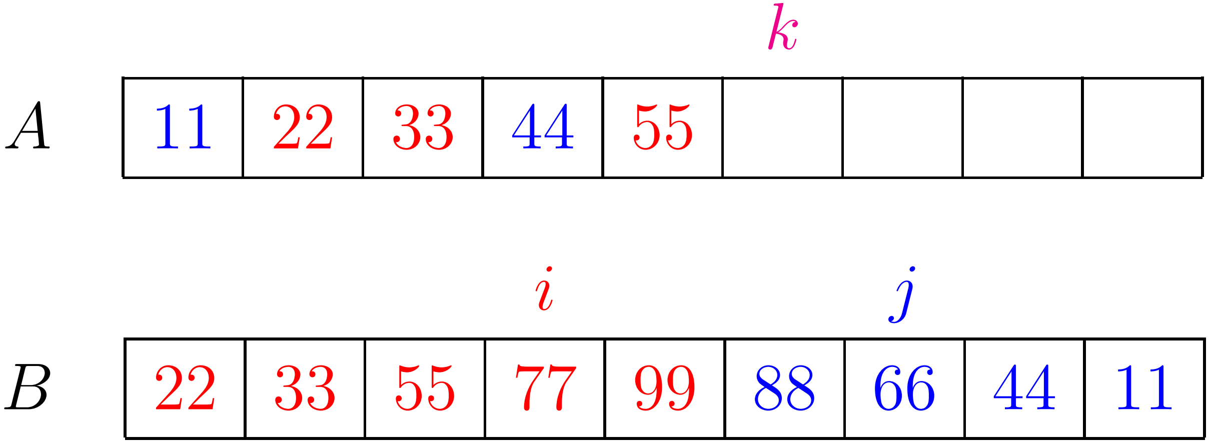


| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $k$ | | | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $i$ | | | | $j$ | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$$c = 5 + 3 = 8$$

# Simulação

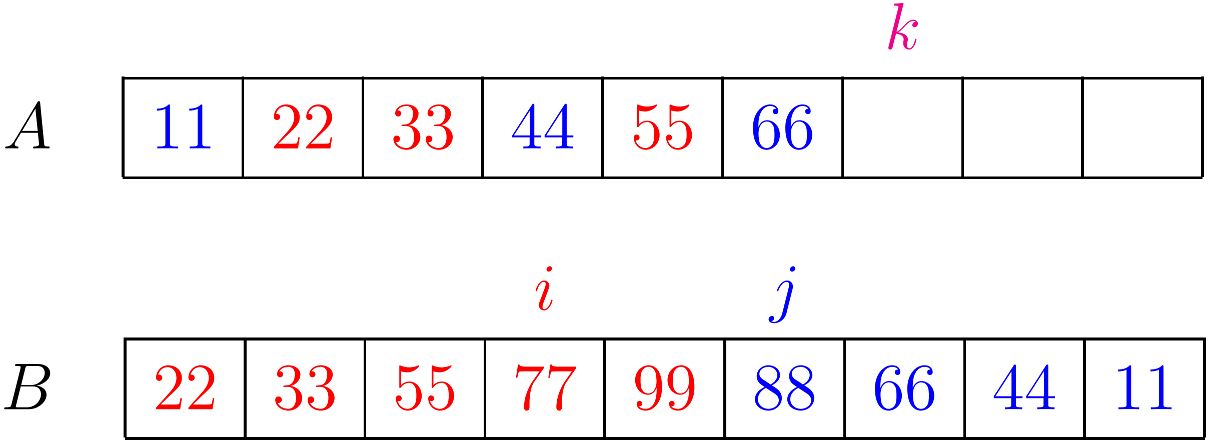


| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $k$ | | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $i$ | | | $j$ | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 8$

# Simulação

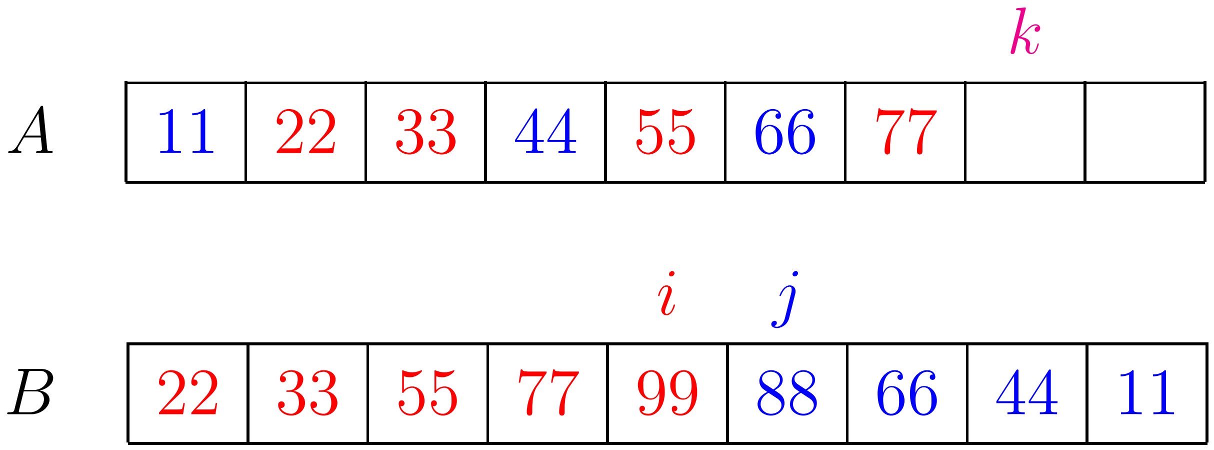


| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $k$ | | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $i$ | | $j$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$$c = 8 + 2 = 10$$

# Simulação

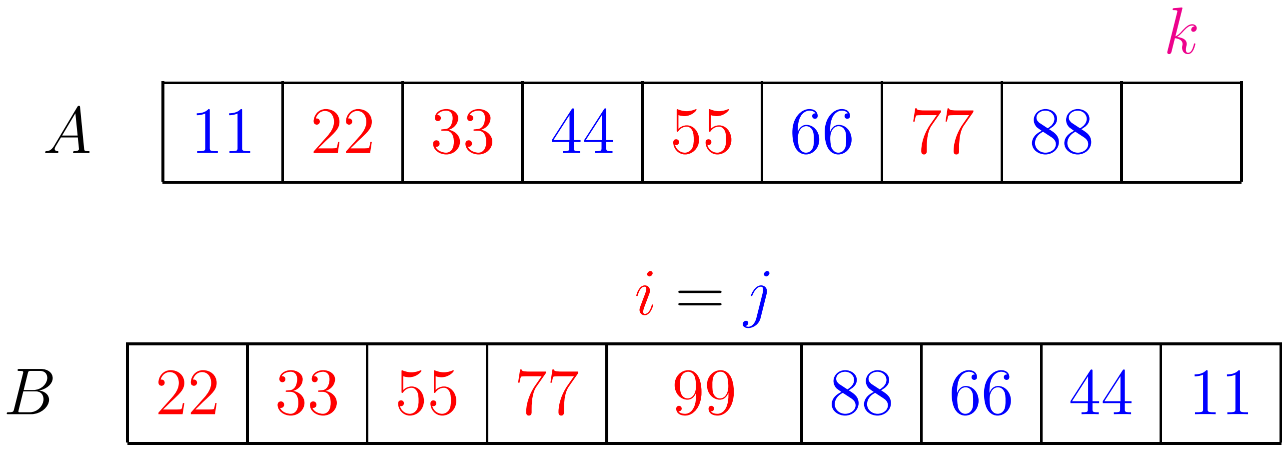


| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $k$ | |
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $i$ | $j$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 10$

# Simulação



$k$

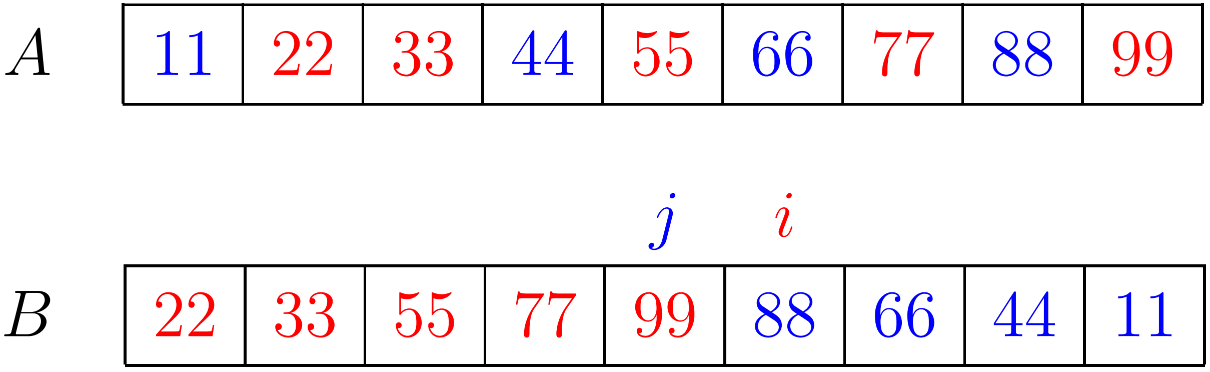
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 |  |

$i = j$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$$c = 10 + 1 = 11$$

# Simulação



| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $j$ | $i$ | | | |
| $B$ | 22 | 33 | 55 | 77 | 99 | 88 | 66 | 44 | 11 |

$c = 11$

# Consumo de tempo em O

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | ? |
| 2 | ? |
| 3 | ? |
| 4 | ? |
| 5–7 | ? |
| 8 | ? |
| 9 | ? |
| 10–14 | ? |
| 15 | ? |
| total | ? |

# Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

| linha | consumo de todas as execuções da linha |
|---|---|
| 1 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 2 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 3 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 4 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 5–7 | $\mathrm{O}(1)$ |
| 8 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 9 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 10–14 | $\mathrm{O}(n)$ |
| 15 | $\mathrm{O}(1)$ |
| total | $\mathrm{O}(7n+2)$ = $\mathrm{O}(n)$ |

# Conclusão

O algoritmo CONTA-E-INTERCALA consome
$\mathrm{O}(n)$ unidades de tempo.

Também escreve-se

O algoritmo CONTA-E-INTERCALA consome
tempo $\mathrm{O}(n)$.

# Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

# Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

# Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

# Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

Considera-se a recorrência simplificada

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n$$

definida apenas para $n$ potência de $2$.

# Análise do Conta-E-Ordena

Seja $T(n)$ o tempo consumido pelo CONTA-E-ORDENA.

Vale a seguinte recorrência para $T(n)$:

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n)$$

Solução: $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Prova?

Considera-se a recorrência simplificada

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n$$

definida apenas para $n$ potência de $2$.

Prova-se por indução em $n$ que $T(n) = n + n \lg n = \mathrm{O}(n \lg n)$.