Convite à Geometria Computacional

Jornadas de Atualização em Informática

Cristina G. Fernandes e José Coelho de Pina

Departamento de Ciência da Computação do IME-USP

Bento Gonçalves, julho de 2009

Visão geral do minicurso

Aula 1:

- Introdução (Secs. 7.1 e 7.2)
- Para de pontos mais próximos (Sec. 7.3)

Visão geral do minicurso

Aula 1:

- Introdução (Secs. 7.1 e 7.2)
- Para de pontos mais próximos (Sec. 7.3)

Aula 2:

- Fecho convexo (Sec. 7.4)

Visão geral do minicurso

Aula 1:

- Introdução (Secs. 7.1 e 7.2)
- Para de pontos mais próximos (Sec. 7.3)

Aula 2:

- Fecho convexo (Sec. 7.4)

Aula 3:

- Método da linha de varredura (Secs. 7.5 e 7.6)

Introdução

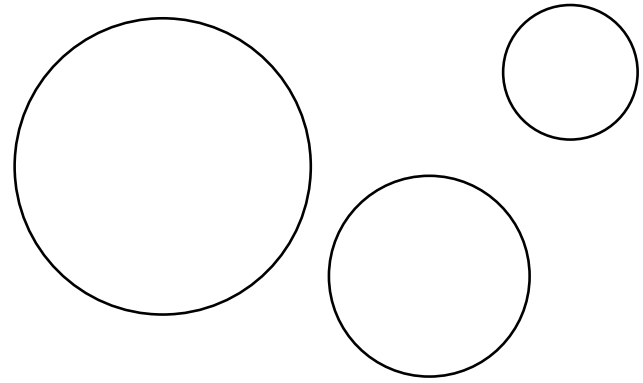
Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)

Introdução

Antiguidade:

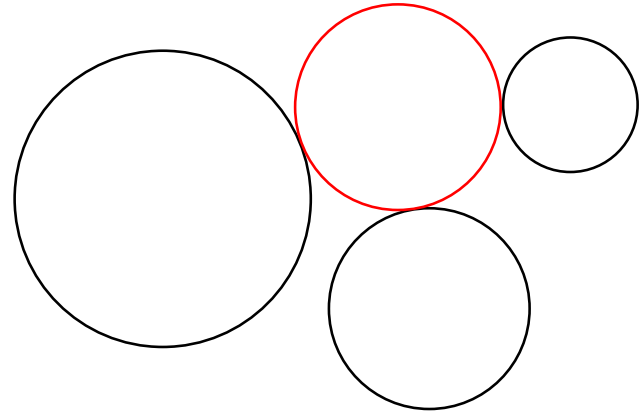
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 AC)



Introdução

Antiguidade:

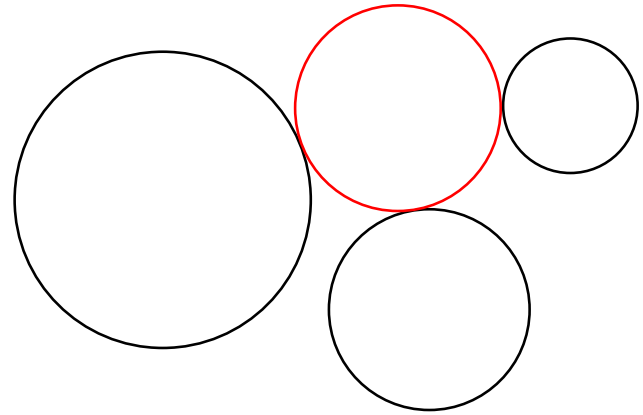
- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 AC)



Introdução

Antiguidade:

- construções geométricas de Euclides (régua e compasso)
- problema de Apollonius (cerca de 200 AC)



Solução de Euclides: 508 operações “elementares”

Solução de Lemoine (1902): menos de 200 operações

Modelo de computação

Algoritmo:
sequência finita de instruções que resolve um problema.

Modelo de computação

Algoritmo:
sequência finita de instruções que resolve um problema.

Modelo de computação: descrição abstrata de um computador que será usado para executar um algoritmo.

Modelo de computação

Algoritmo:
sequência finita de instruções que resolve um problema.

Modelo de computação: descrição abstrata de um computador que será usado para executar um algoritmo.

- operações elementares (aritméticas, comparações, etc)
- critério para medir consumo de tempo

Modelo de computação

Algoritmo:
sequência finita de instruções que resolve um problema.

Modelo de computação: descrição abstrata de um computador que será usado para executar um algoritmo.

- operações elementares (aritméticas, comparações, etc)
- critério para medir consumo de tempo

Compromisso entre realidade e tratabilidade matemática.

Modelo de computação

Real RAM (real random access machine)
com custo uniforme:

- manipula números reais arbitrários
- operações com reais custam 1 (mesmo raiz quadrada)

Modelo de computação

Real RAM (real random access machine)
com custo uniforme:

- manipula números reais arbitrários
- operações com reais custam 1 (mesmo raiz quadrada)

Análise de algoritmos:

- notação assintótica
- técnicas básicas

Modelo de computação

Real RAM (real random access machine)
com custo uniforme:

- manipula números reais arbitrários
- operações com reais custam 1 (mesmo raiz quadrada)

Análise de algoritmos:

- notação assintótica
- técnicas básicas

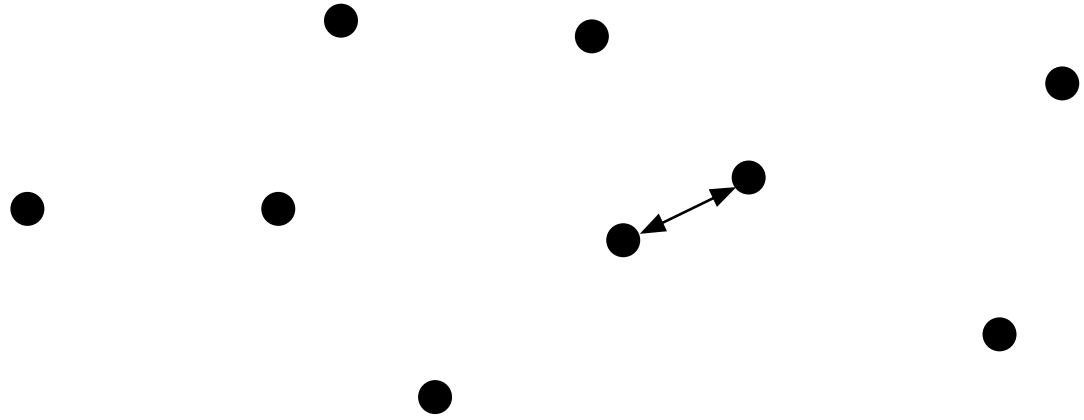
Capítulo 1 *Análise de algoritmos*
por Paulo Feofiloff

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

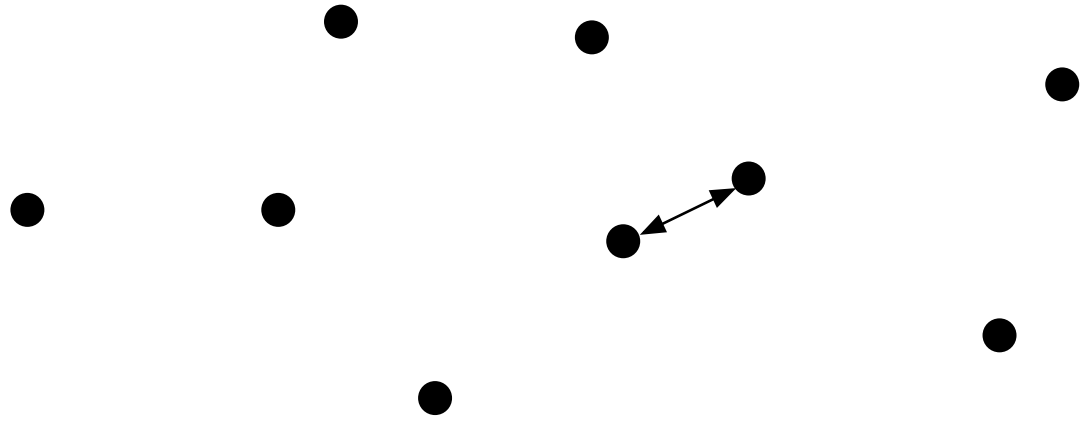
Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.



Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

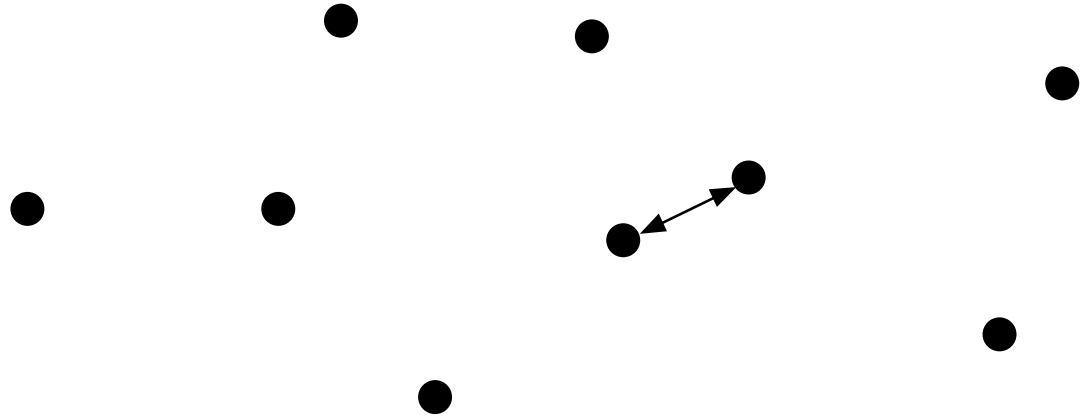


Lembre-se que, para dois pontos (x, y) e (x', y') no plano,

$$\textsc{Dist}(x, y, x', y') \;=\; \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

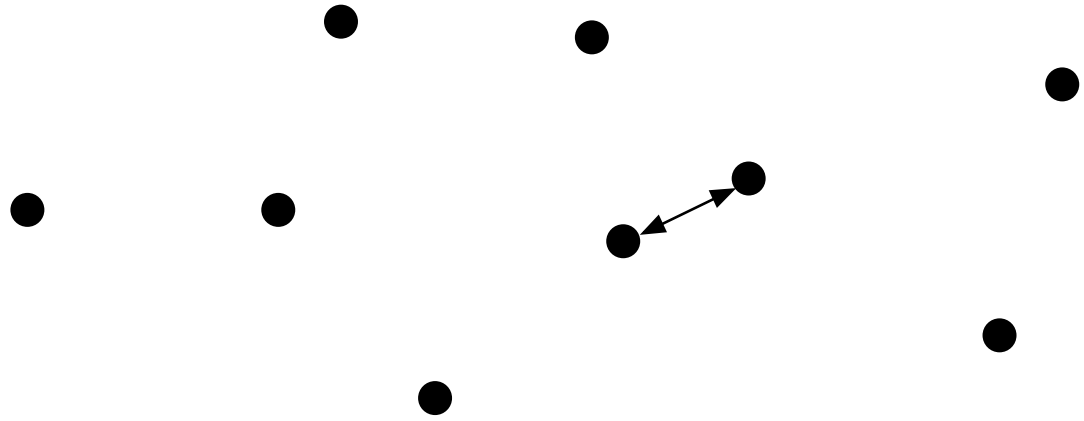
Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.



Par de pontos mais próximos

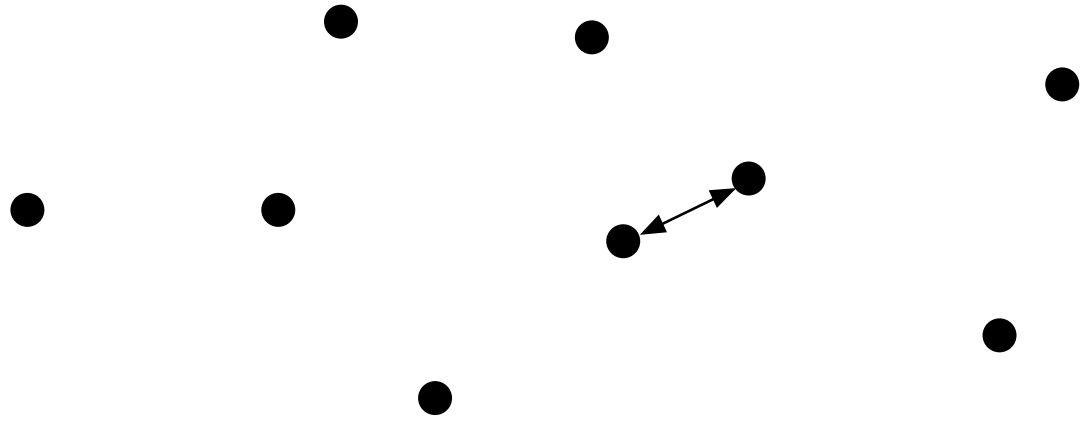
Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.



Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

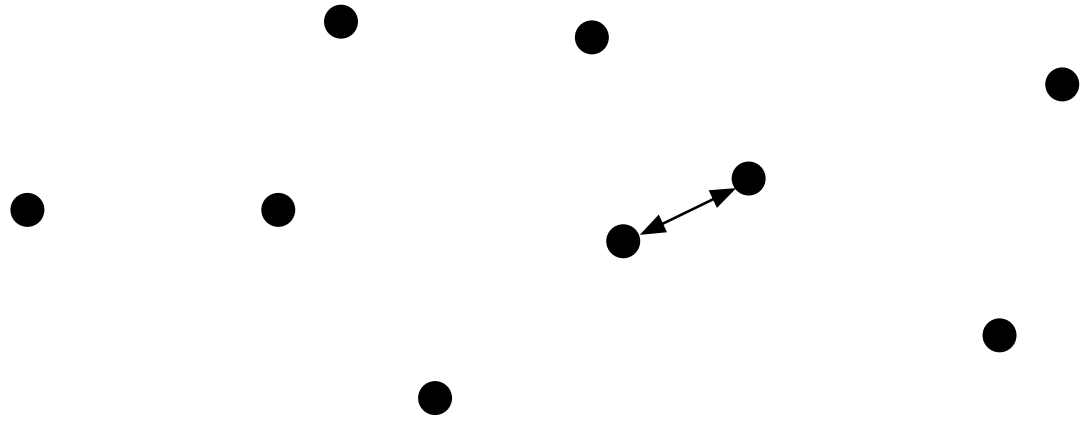


Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$.

Saída: índices i e j indicando
dois pontos a distância mínima.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.



Entrada: coleção de n pontos representada por
vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$.

Saída: menor distância entre dois pontos da coleção.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

Entrada: vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

Entrada: vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

Par de pontos mais próximos

Problema: Dados n pontos no plano,
determinar dois deles que estão a distância mínima.

Entrada: vetores $X[1..n]$ e $Y[1..n]$
Saída: menor distância entre dois pontos da coleção

Primeira solução: algoritmo quadrático,
que testa todos os pares de pontos.

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3       para j ← 1 até i − 1 faça
 4            se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5                 então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3       para j ← 1 até i − 1 faça
 4            se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5                 então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3       para j ← 1 até i − 1 faça
 4            se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5                 então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3       para j ← 1 até i − 1 faça
 4            se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5                 então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

Algoritmo elementar

```
ELEMENTAR(X, Y, n)
 1  d ← +∞
 2  para i ← 2 até n faça
 3      para j ← 1 até i − 1 faça
 4          se DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j]) < d
 5              então d ← DIST(X[i], Y[i], X[j], Y[j])
 6  devolva d
```

Invariante: d é a menor distância entre os pontos da coleção $X[1\,..\,i-1], Y[1\,..\,i-1]$.

Consumo de tempo: linha 4 é executada

$$\sum_{i=2}^{n}(i-1) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} i \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \Theta(n^2).$$

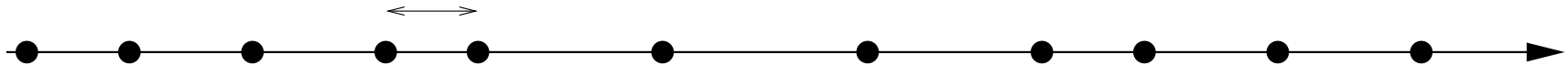
É possível projetar um algoritmo mais eficiente que este?

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão a distância mínima.

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão a distância mínima.

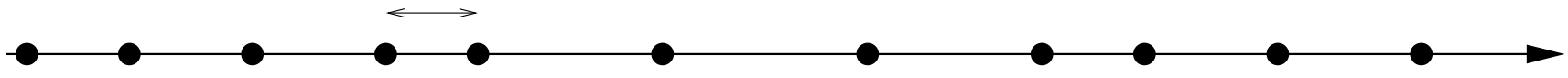


Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Par mais próximo na reta

Problema: Dados n pontos numa reta, determinar dois deles que estão a distância mínima.



Primeira solução: ordene os pontos, e encontre os dois consecutivos mais próximos.

Tempo consumido: $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Problema com essa solução:

não sei como generalizá-la para o plano...

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.

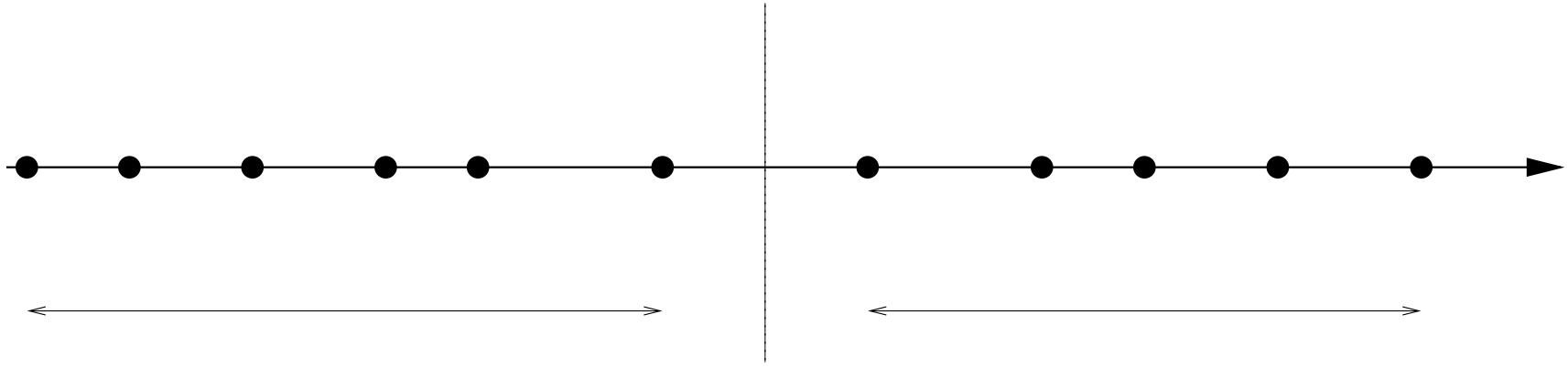
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



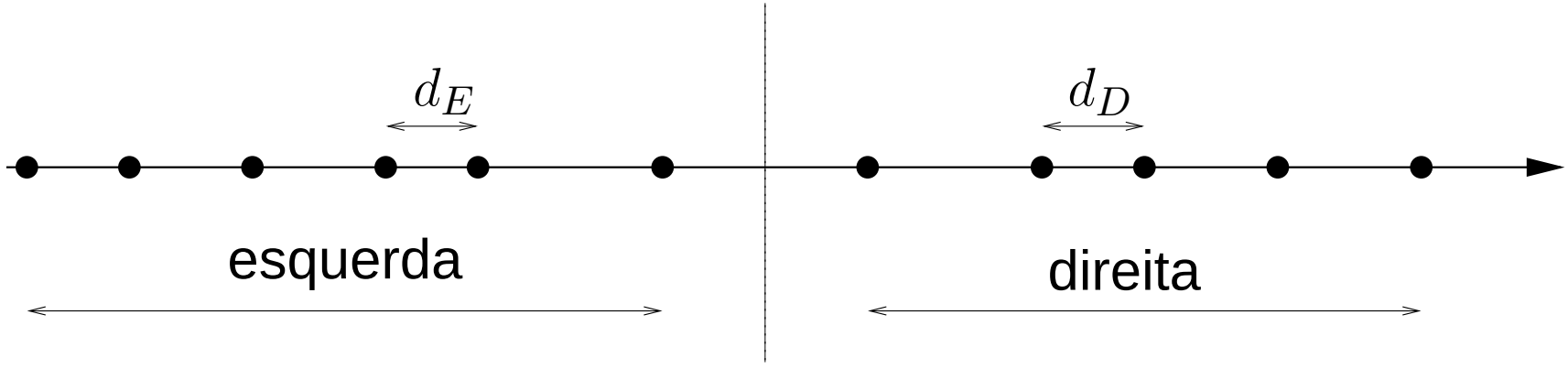
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



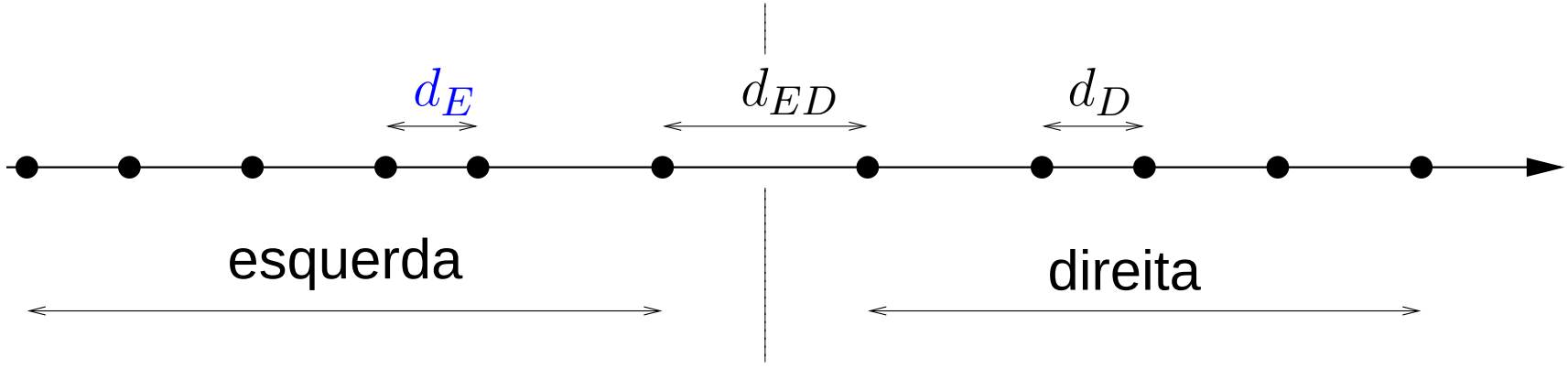
Divisão e conquista

Esse paradigma envolve os seguintes passos:

Divisão: dividir a instância do problema em instâncias menores do problema.

Conquista: resolver o problema nas instâncias menores recursivamente (ou diretamente, se elas forem pequenas o suficiente).

Combinação: combinar as soluções das instâncias menores para gerar uma solução da instância original.



Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA-SH(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC-SH $(X, 1, n)$

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA-SH(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC-SH $(X, 1, n)$

DISTÂNCIARETAREC-SH: divisão e conquista.

Par mais próximo na reta

Pré-processamento: ordenar os pontos.

DISTÂNCIARETA-SH(X, n)
1 MERGESORT$(X, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIARETAREC-SH $(X, 1, n)$

DISTÂNCIARETAREC-SH: divisão e conquista.

Tempo consumido pelo DISTÂNCIARETA-SH:
$\mathrm{O}(n \lg n)$ mais o tempo do DISTÂNCIARETAREC-SH.

Par mais próximo na reta

```
DistânciaRetaRec-SH (X, p, r)
1  se r = p
2      então devolva +∞
3  se r = p + 1
4      então devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DistânciaRetaRec-SH(X, p, q)
7            d_D ← DistânciaRetaRec-SH(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Par mais próximo na reta

DISTÂNCIARETAREC-SH (X, p, r)

```
1  se r = p
2      então devolva +∞
3  se r = p + 1
4      então devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(1)$$

onde $n = r - p + 1$.

Par mais próximo na reta

DISTÂNCIARETAREC-SH (X, p, r)

```
1  se r = p
2      então devolva +∞
3  se r = p + 1
4      então devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

onde $n = r - p + 1$.

Par mais próximo na reta

DISTÂNCIARETAREC-SH (X, p, r)

```
1  se r = p
2      então devolva +∞
3  se r = p + 1
4      então devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Par mais próximo na reta

DISTÂNCIARETAREC-SH (X, p, r)

```
1  se r = p
2      então devolva +∞
3  se r = p + 1
4      então devolva X[r] − X[p]
5      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
6            d_E ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, p, q)
7            d_D ← DISTÂNCIARETAREC-SH(X, q + 1, r)
8            d ← min{d_E, d_D, X[q+1] − X[q]}
9            devolva d
```

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n)$.

Par mais próximo no plano

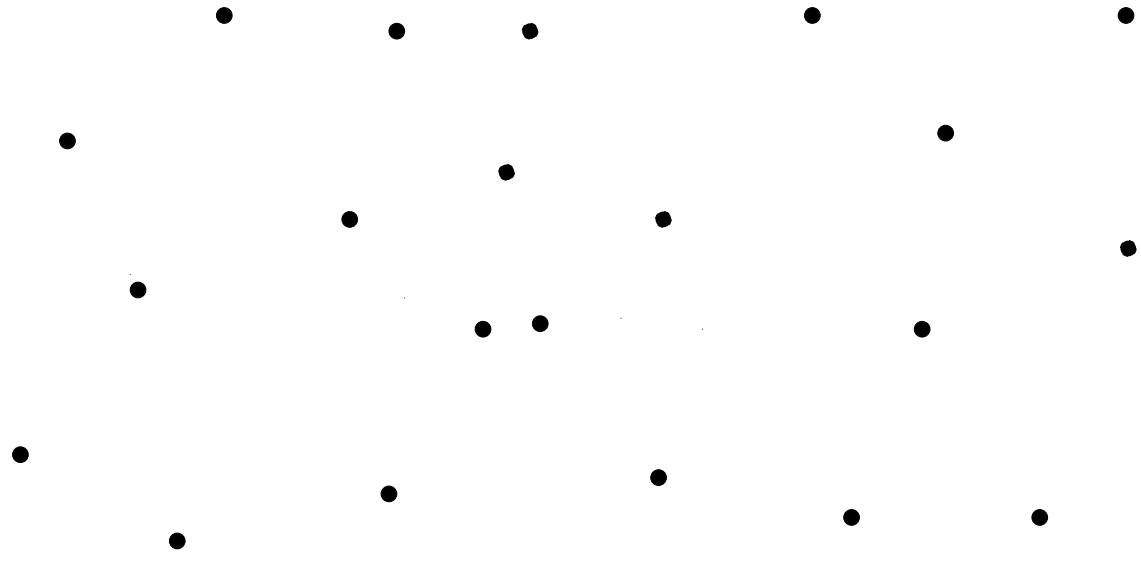
Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa idéia para o plano?

Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa idéia para o plano?

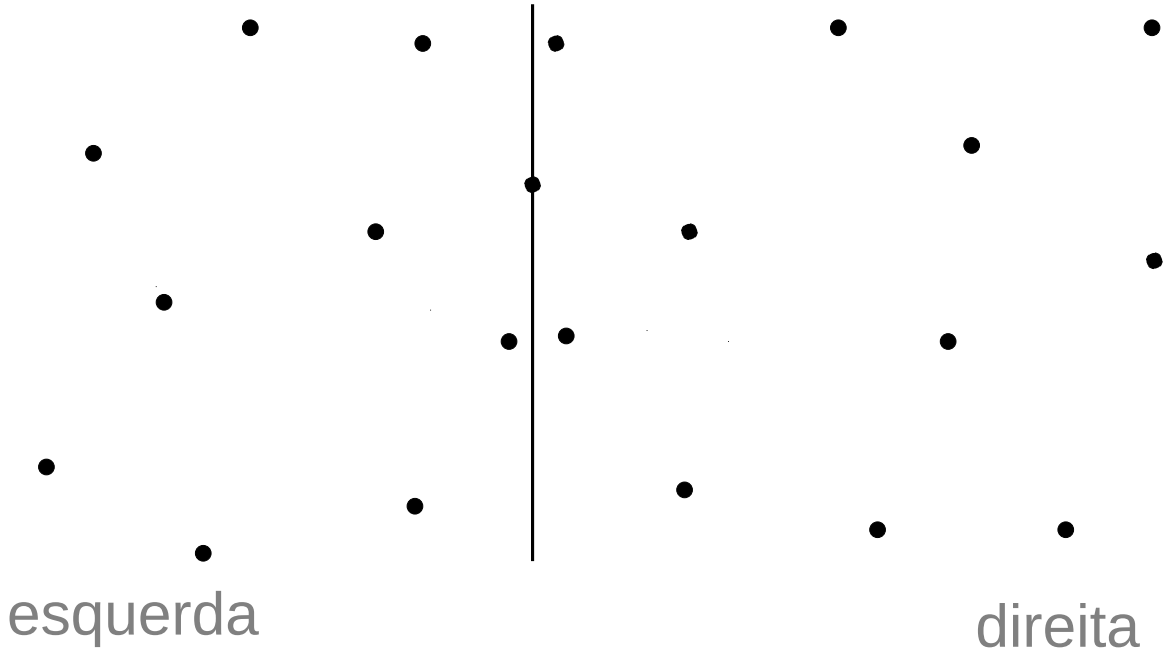


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa idéia para o plano?

Divide...

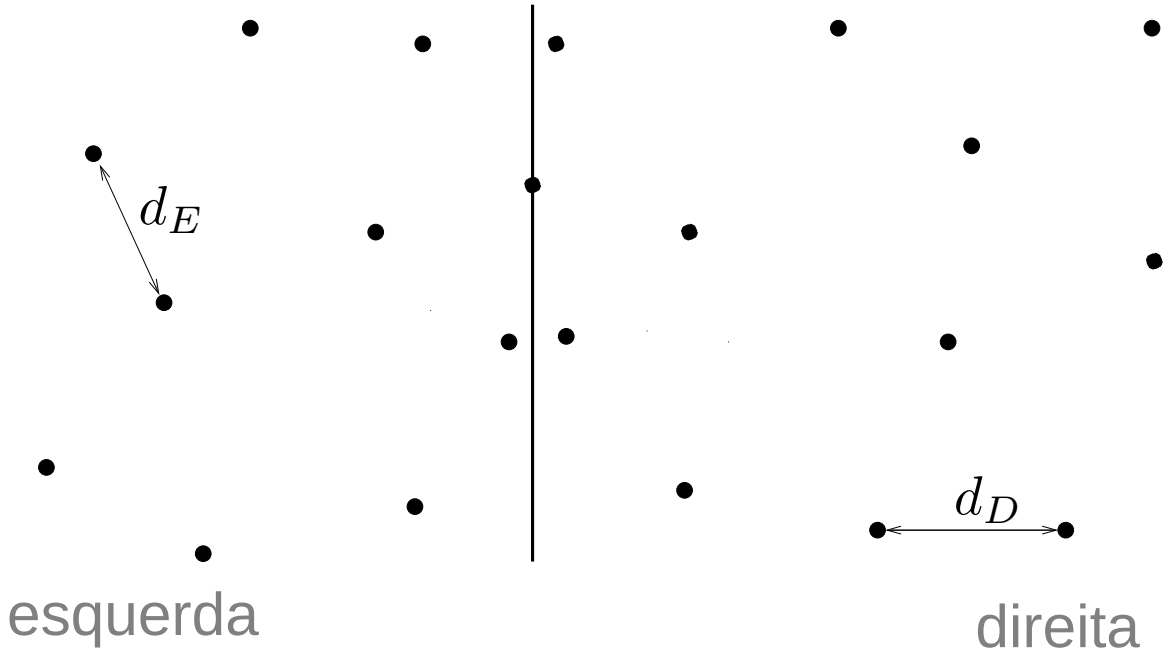


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa idéia para o plano?

Divide... Conquista...

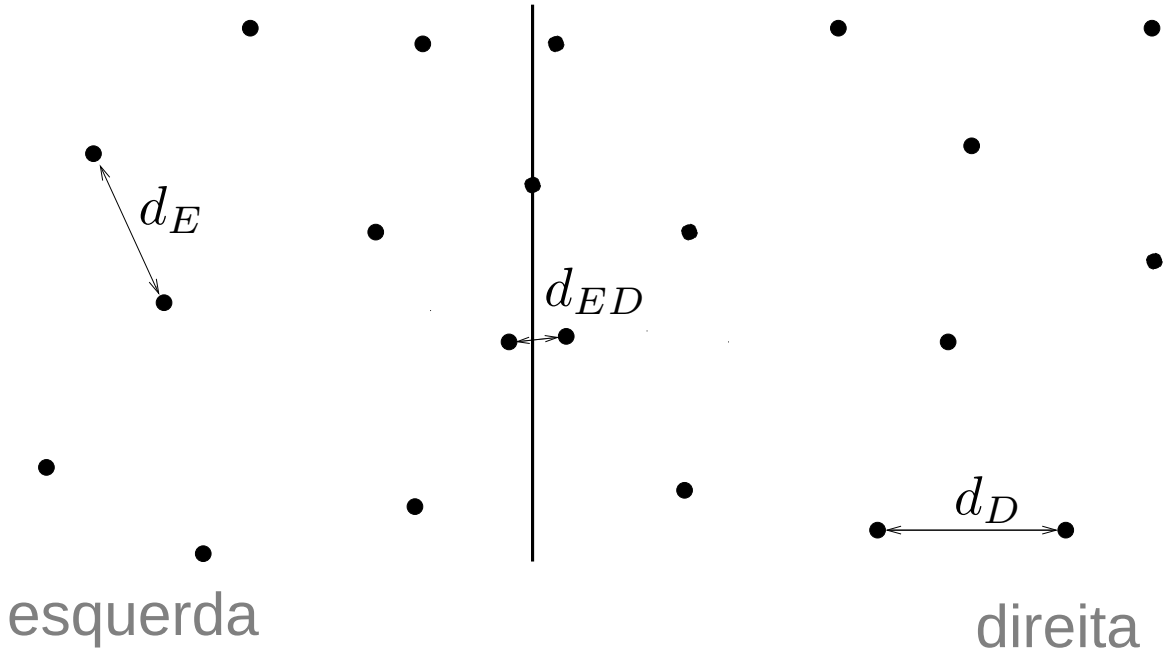


Par mais próximo no plano

Obtivemos um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$ para pontos na reta.

Como generalizar essa idéia para o plano?

Divide... Conquista... Combina...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, 1, n)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, 1, n)$

Consumo de tempo:
$\Theta(n \lg n)$ mais o tempo do DISTÂNCIAREC-SH.

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, r)

Dividir: Seja $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $d_E \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5 $d_D \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, q + 1, r)$
6 devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $d_E \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5 $d_D \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, q + 1, r)$
6 devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)

Suponha que COMBINE é linear.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6            devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6            devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6            devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, p, q)
5            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, q + 1, r)
6            devolva COMBINE (X, Y, p, r, d_E, d_D)
```

Suponha que COMBINE é linear.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

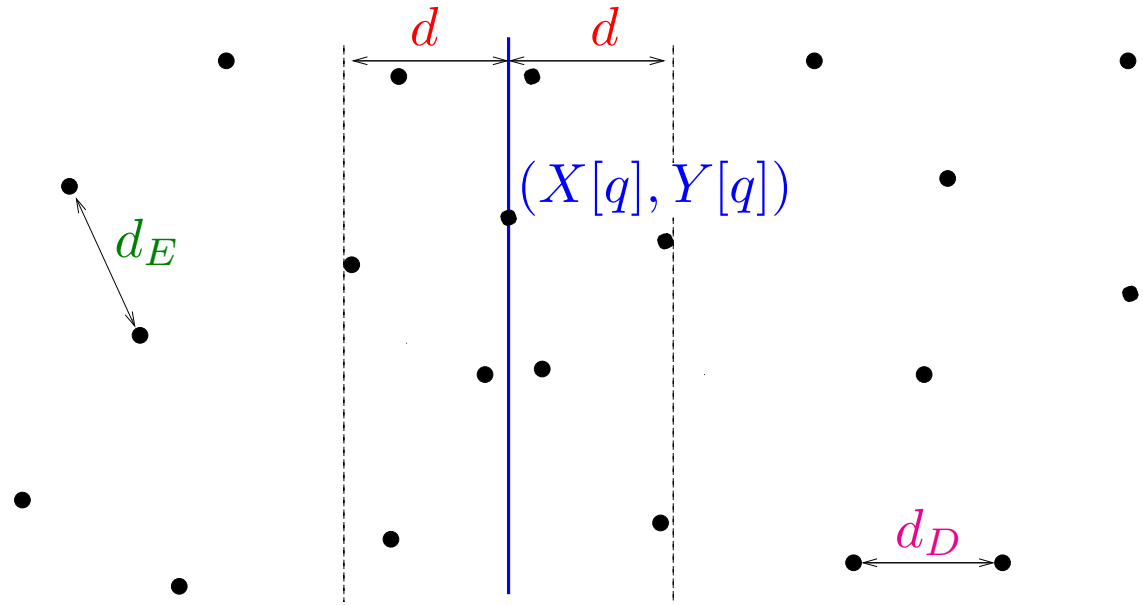
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

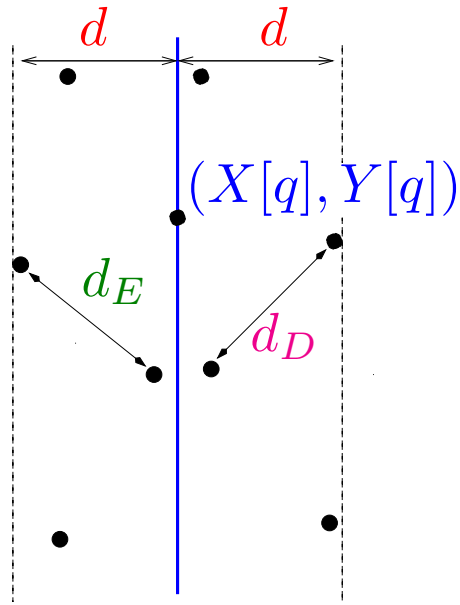
COMBINE precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

COMBINE precisa considerar apenas pontos que estão a uma distância menor que $d = \min\{d_E, d_D\}$ da reta vertical $x = X[q]$.



Infelizmente todos os pontos podem estar nesta faixa...

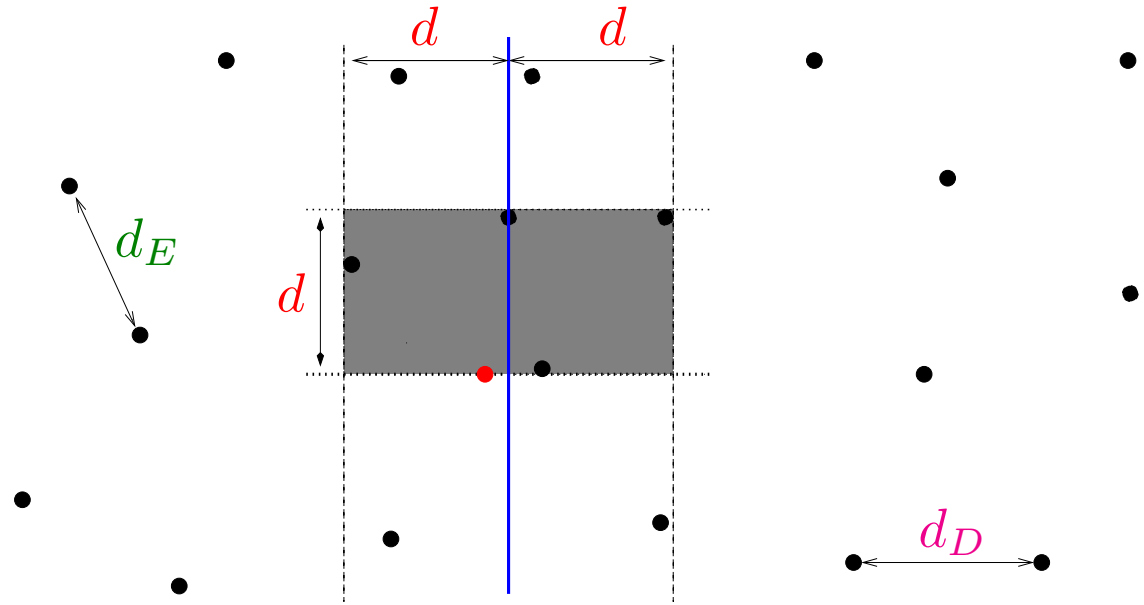
Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

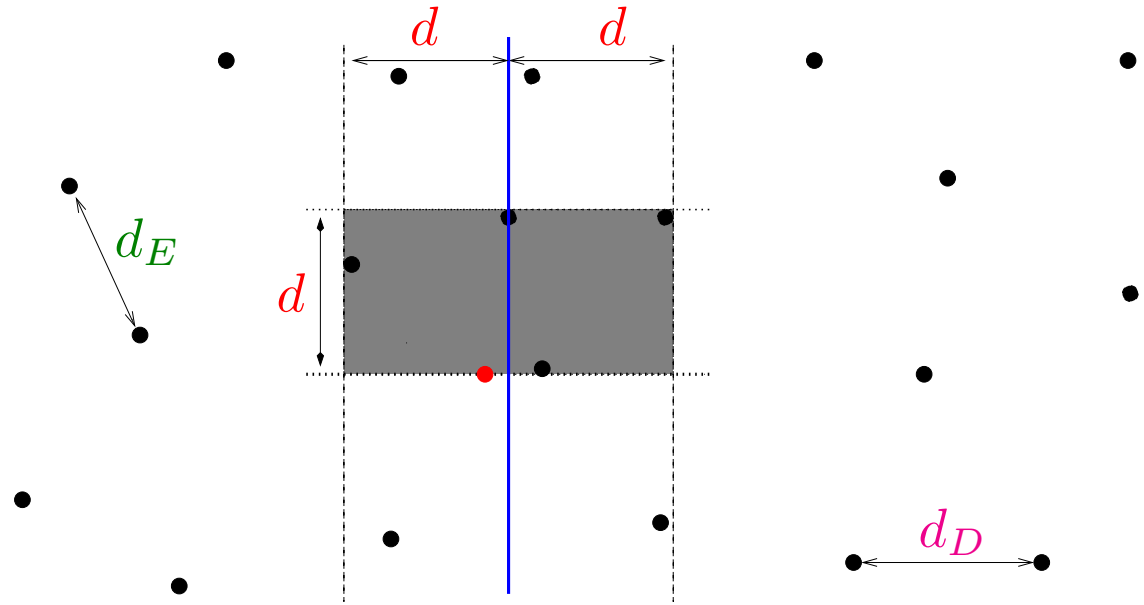
Ideia...



Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

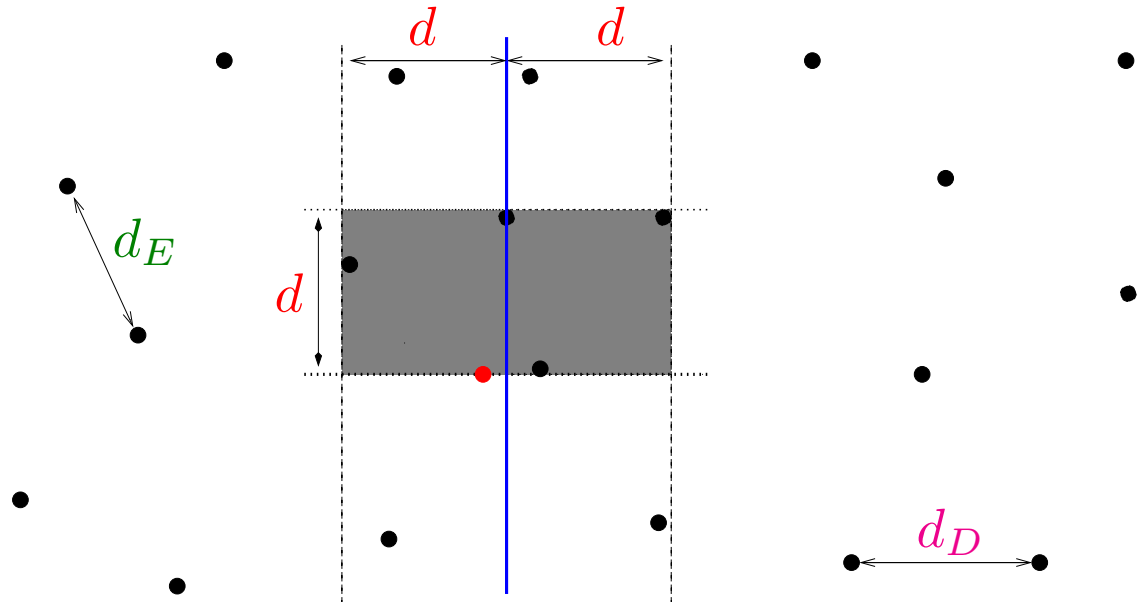
Ideia...



Para cada ponto na faixa, olhamos apenas para pontos da faixa que tenham Y-coordenada no máximo d mais que este ponto.

Algoritmo de Shamos e Hoey

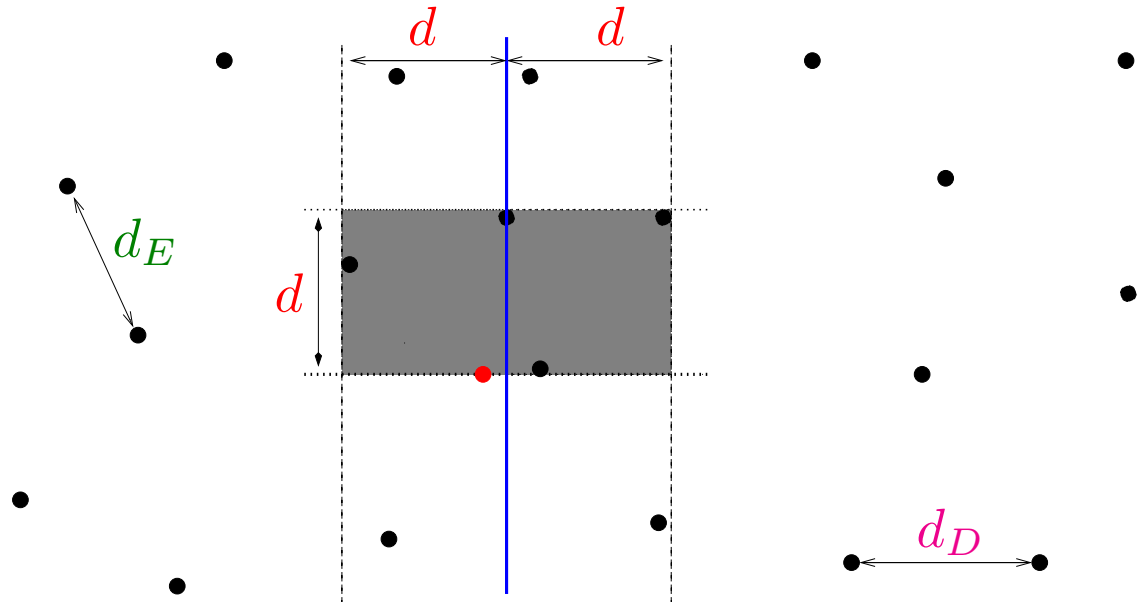
Como fazer o COMBINE linear?



Quanto pontos assim há?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?

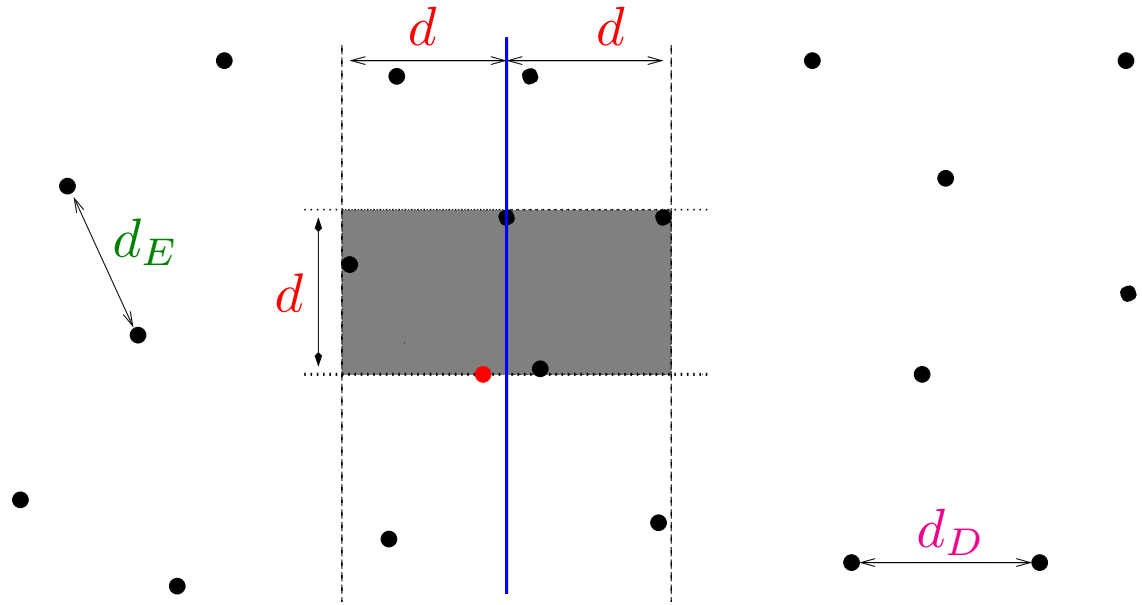


Quanto pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?



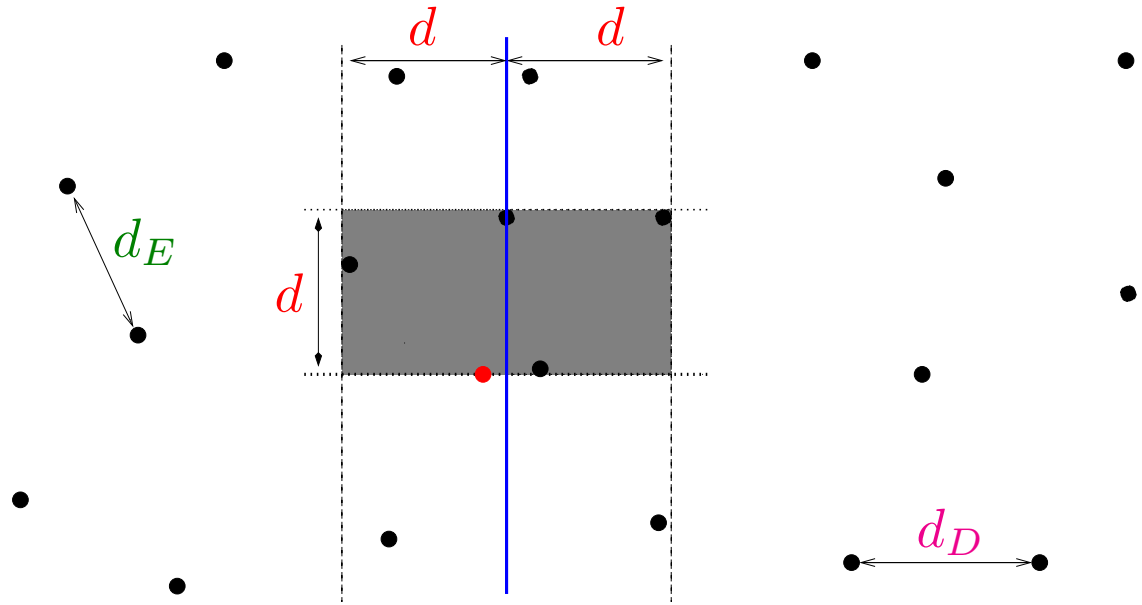
Quanto pontos assim há?

Em cada um dos dois quadrados de lado d,
há no máximo 4 pontos porque $d \leq d_E$ e $d \leq d_D$.

Logo há não mais que 7 pontos assim (excluindo o ponto).

Algoritmo de Shamos e Hoey

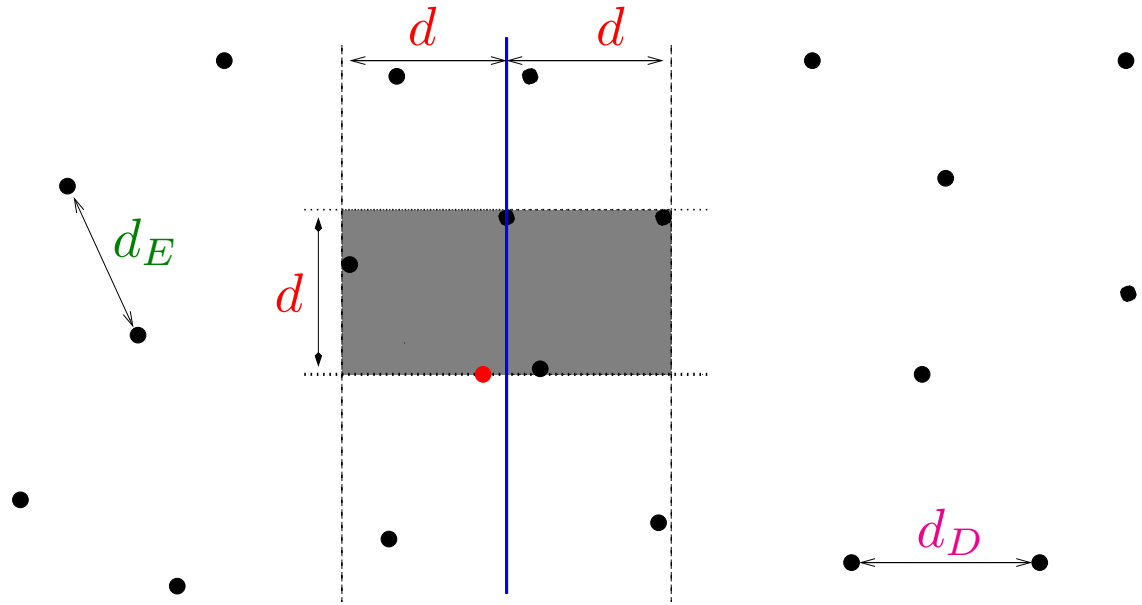
Como fazer o COMBINE linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

Algoritmo de Shamos e Hoey

Como fazer o COMBINE linear?



Mas como ter acesso rápido a estes pontos?

Alteraremos o pré-processamento, para ter acesso aos pontos ordenados pelas suas Y-coordenadas também.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada
e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada
e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 para $i \leftarrow 1$ até n faça
3 $\quad a[i] \leftarrow i$
4 MERGESORTIND$(Y, 1, n, a)$ ▷ ordenação indireta
5 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, a, 1, n)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

Pré-processamento: ordenar os pontos pela X-coordenada
e ordenar (indiretamente) os pontos pela Y-coordenada

DISTÂNCIA-SH(X, Y, n)
1 MERGESORT$(X, Y, 1, n)$
2 para $i \leftarrow 1$ até n faça
3 $\quad a[i] \leftarrow i$
4 MERGESORTIND$(Y, 1, n, a)$ ▷ ordenação indireta
5 devolva DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, a, 1, n)$

Consumo de tempo:
De novo, $\Theta(n \lg n)$ mais o tempo do DISTÂNCIAREC-SH.

Divisão e conquista

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r)

Dividir: Seja $q := \lfloor (p + r)/2 \rfloor$. Obtenha um vetor $b[p\,..\,r]$ tal que $X[p\,..\,q], Y[p\,..\,q], b[p\,..\,q]$ seja uma representação ordenada dos pontos mais à esquerda e $X[q{+}1\,..\,r], Y[q{+}1\,..\,r], b[q{+}1\,..\,r]$, uma representação ordenada dos pontos mais à direita.

Conquistar: Determine, recursivamente, a menor distância d_E entre dois pontos da esquerda e a menor distância d_D entre dois pontos da direita.

Combinar: Devolva o mínimo entre d_E, d_D e a menor distância d_{ED} entre um ponto da esquerda e um ponto da direita.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $b \leftarrow$ DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5 $d_E \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6 $d_D \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, b, q + 1, r)$
7 devolva COMBINE $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $b \leftarrow$ DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5 $d_E \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6 $d_D \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, b, q + 1, r)$
7 devolva COMBINE $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

DIVIDA e COMBINE são algoritmos lineares.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            b ← DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, q + 1, r)
7            devolva COMBINE (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

DIVIDA e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

1 se $r \leq p + 2$
2 então ▷ resolva o problema diretamente
3 senão $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
4 $b \leftarrow$ DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5 $d_E \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6 $d_D \leftarrow$ DISTÂNCIAREC-SH $(X, Y, b, q + 1, r)$
7 devolva COMBINE $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

DIVIDA e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            b ← DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, q + 1, r)
7            devolva COMBINE (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

DIVIDA e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$?

Algoritmo de Shamos e Hoey

DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, a, p, r) ▷ Divisão e conquista

```
1  se r ≤ p + 2
2      então ▷ resolva o problema diretamente
3      senão q ← ⌊(p + r)/2⌋
4            b ← DIVIDA (X, Y, a, p, r)
5            d_E ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, p, q)
6            d_D ← DISTÂNCIAREC-SH (X, Y, b, q + 1, r)
7            devolva COMBINE (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
```

DIVIDA e COMBINE são algoritmos lineares.

Consumo de tempo:

$$T(n) \;=\; T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + n$$

onde $n = r - p + 1$. Quanto vale $T(n)$? $T(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Suponha que na coleção
não há dois pontos com a mesma coordenada X.

Algoritmo de Shamos e Hoey

Suponha que na coleção
não há dois pontos com a mesma coordenada X.

DIVIDA (X, Y, a, p, r)
1 $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
2 $i \leftarrow p-1 \quad j \leftarrow q$
3 para $k \leftarrow p$ até r faça
4 se $X[a[k]] \leq X[q]$ ▷ $(X[a[k]], Y[a[k]])$ está à esquerda da reta $x = X[q]$?
5 então $i \leftarrow i+1$
6 $b[i] \leftarrow a[k]$
7 senão $j \leftarrow j+1$
8 $b[j] \leftarrow a[k]$
9 devolva b

Algoritmo de Shamos e Hoey

Suponha que na coleção
não há dois pontos com a mesma coordenada X.

DIVIDA (X, Y, a, p, r)

```
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  i ← p − 1     j ← q
3  para k ← p até r faça
4      se X[a[k]] ≤ X[q]      ▷ (X[a[k]], Y[a[k]]) está à esquerda da reta x = X[q]?
5          então i ← i + 1
6                b[i] ← a[k]
7          senão j ← j + 1
8                b[j] ← a[k]
9  devolva b
```

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $O(n)$ onde $n = r - p + 1$.

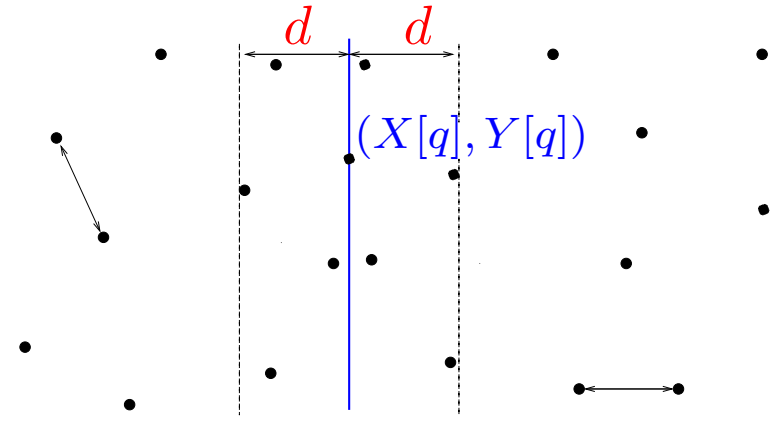
Algoritmo de Shamos e Hoey

A subrotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa.

Algoritmo de Shamos e Hoey

A subrotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa.

```
CANDIDATOS (X, a, p, r, d)
 1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
 2  t ← 0
 3  para k ← p até r faça
 4       se |X[a[k]] − X[q]| < d
 5            então t ← t + 1
 6                  f[t] ← a[k]
 7  devolva (f, t)
```

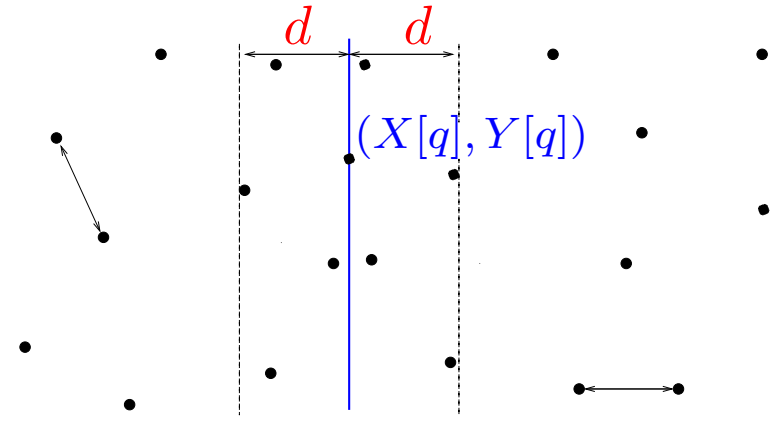


Algoritmo de Shamos e Hoey

A subrotina abaixo identifica os pontos que estão na faixa.

CANDIDATOS (X, a, p, r, d)

```
1  q ← ⌊(p + r)/2⌋
2  t ← 0
3  para k ← p até r faça
4      se |X[a[k]] − X[q]| < d
5          então t ← t + 1
6                f[t] ← a[k]
7  devolva (f, t)
```



Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\mathrm{O}(n)$ onde $n = r - p + 1$.

Algoritmo de Shamos e Hoey

```
COMBINE (X, Y, a, p, r, d_E, d_D)
 1  d ← min{d_E, d_D}
 2  (f, t) ← CANDIDATOS (X, a, p, r, d)      ▷ pontos na faixa
 3  para i ← 1 até t − 1 faça
 4      para j ← i + 1 até min{i + 7, t} faça      ▷ ≤ 7 próximos
 5          d′ ← DIST(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])
 6          se d′ < d
 7              então d ← d′
 8  devolva d
```

Algoritmo de Shamos e Hoey

COMBINE $(X, Y, a, p, r, d_E, d_D)$

1 $d \leftarrow \min\{d_E, d_D\}$
2 $(f, t) \leftarrow$ CANDIDATOS (X, a, p, r, d) ▷ pontos na faixa
3 para $i \leftarrow 1$ até $t - 1$ faça
4 para $j \leftarrow i + 1$ até $\min\{i + 7, t\}$ faça ▷ ≤ 7 próximos
5 $d' \leftarrow$ DIST$(X[f[i]], Y[f[i]], X[f[j]], Y[f[j]])$
6 se $d' < d$
7 então $d \leftarrow d'$
8 devolva d

Consumo de tempo:

É fácil ver que o consumo é $\mathrm{O}(n)$ onde $n = r - p + 1$.