

Capítulo 4

Métodos iterativos

4.1 O Método de Jacobi

O Método de Jacobi é um procedimento iterativo para a resolução de sistemas lineares. Tem a vantagem de ser mais simples de se implementar no computador do que o Método de Escalonamento, e está menos sujeito ao acúmulo de erros de arredondamento. Seu grande defeito, no entanto, é não funcionar em todos os casos.

Suponha um sistema linear nas incógnitas $x_1, \dots, x_n$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Suponha também que todos os termos a_{ii} sejam diferentes de zero ($i = 1, \dots, n$). Se não for o caso, isso às vezes pode ser resolvido com uma troca na ordem das equações. Então a solução desse sistema satisfaz

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n] \\ x_2 & = & \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n] \\ & \vdots & \\ x_n & = & \frac{1}{a_{nn}} [b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}] \end{array}$$

Em outras palavras, se $(x_1, \dots, x_n)$ for solução do sistema e esses valores forem “colocados” no lado direito das equações, então resultarão no lado esquerdo os mesmos valores $x_1, \dots, x_n$.

O Método de Jacobi consiste em “chutar” valores $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, colocar esses valores no lado direito das equações, obter daí $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$, em seguida colocar esses novos valores nas equações e obter $x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$, etc. Então

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \right) \end{aligned}$$

Espera-se que para todo $i = 1, \dots, n$ a sequência $\{x_i^{(k)}\}_k$ convirja para o valor verdadeiro x_i .

Como dissemos, no entanto, nem sempre ocorre essa convergência. Será que é possível saber de antemão se o método vai ou não vai funcionar?

Daremos um critério, chamado de ‘Critério das Linhas’ que, se for satisfeito, implica na convergência do Método. Infelizmente, daí não poderemos concluir a afirmativa inversa. Isto é, é falso dizer “não satisfaz o Critério das Linhas então não converge”. Pode haver sistemas em que o Método de Jacobi funcione porém não satisfaça o Critério das Linhas.

4.2 Critério das Linhas

O Critério das Linhas pede que

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Em palavras: “o valor absoluto do termo diagonal na linha i é maior do que a soma dos valores absolutos de todos os outros termos na mesma linha”.

É importante observar que o Critério das Linhas pode deixar de ser satisfeito se houver troca na ordem das equações, e vice-versa: uma troca cuidadosa pode fazer com que o sistema passe a satisfazer o Critério.

Teorema. *Se o sistema linear satisfaz o Critério das Linhas então o Método de Jacobi converge.*

Sugerimos o seguinte exercício, antes de passarmos à demonstração desse Teorema.

Exercício. *Mostre que os sistemas lineares gerados por problemas de contorno (Seção 1.8) em geral não satisfazem o Critério das Linhas. Mesmo assim, monte um programa de computador que resolva o problema, baseado no Método de Jacobi. O que acontece?*

Para provar o Teorema, precisamos mostrar (usando o Critério das Linhas) que as seqüências $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$, formadas a partir dos chutes iniciais $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, convergem para os valores procurados $x_1, \dots, x_n$. Então precisamos mostrar que

$$|x_1^{(k)} - x_1| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, |x_2^{(k)} - x_2| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \dots, |x_n^{(k)} - x_n| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

ou, introduzindo uma notação mais compacta, de forma que

$$\Delta(k) = \max\{|x_1^{(k)} - x_1|, \dots, |x_n^{(k)} - x_n|\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

De fato, iremos mostrar que $\Delta(k)$ decai geometricamente, isto é, existem um $\lambda < 1$ e uma constante $c > 0$ tal que

$$\Delta(k) \leq c\lambda^k,$$

e isso provará nossa afirmação.

Já para conseguir essa desigualdade, provaremos que para todo $k \geq 1$ vale

$$\Delta(k) \leq \lambda \Delta(k-1).$$

Então teremos

$$\begin{aligned} \Delta(1) &\leq \lambda \Delta(0) \\ \Delta(2) &\leq \lambda \Delta(1) \leq \lambda^2 \Delta(0) \\ &\vdots \\ \Delta(k) &\leq \lambda^k \Delta(0), \end{aligned}$$

ou seja, a constante c pode ser o próprio $\Delta(0)$, que é a maior diferença entre o valor inicial e a solução verdadeira.

Por sua vez, provar que

$$\Delta(k) \leq \lambda \Delta(k-1)$$

remete a provar que, para todo $i = 1, \dots, n$, vale

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \lambda \Delta(k-1) = \lambda \max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(k-1)} - x_i|.$$

Faremos a demonstração completa para $i = 1$, mas ficará claro que o argumento valerá para todo $i = 1, \dots, n$, desde que escolhamos λ adequadamente. Precisamos escrever $x_i^{(k)} - x_i$, lembrando que

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)} \right)$$

e, como os $x_1, \dots, x_n$ formam uma solução,

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) .$$

Então

$$x_1^{(k)} - x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(a_{12}(x_2 - x_2^{(k-1)}) + a_{13}(x_3 - x_3^{(k-1)}) + \dots + a_{1n}(x_n - x_n^{(k-1)}) \right) .$$

Tomando o valor absoluto (o módulo) e lembrando que “o módulo da soma é menor ou igual à soma dos módulos”, temos

$$|x_1^{(k)} - x_1| \leq \frac{1}{|a_{11}|} \left(|a_{12}| \cdot |x_2 - x_2^{(k-1)}| + |a_{13}| \cdot |x_3 - x_3^{(k-1)}| + \dots + |a_{1n}| \cdot |x_n - x_n^{(k-1)}| \right) .$$

Note, no entanto, que por definição

$$|x_j - x_j^{(k-1)}| \leq \max_{i=1, \dots, n} |x_i - x_i^{(k-1)}| \equiv \Delta(k-1) ,$$

portanto

$$|x_1^{(k)} - x_1| \leq \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \Delta(k-1) .$$

Agora definimos a constante

$$\lambda_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} ,$$

que deve ser menor do que 1, pelo Critério das Linhas. Então

$$|x_1^{(k)} - x_1| \leq \lambda_1 \Delta(k-1) .$$

Para as outras linhas todo o procedimento é análogo, e sempre resultará

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \lambda_i \Delta(k-1) ,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, onde

$$\lambda_i = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| .$$

O Critério das Linhas garante que $\lambda_i < 1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Se definirmos agora

$$\lambda = \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i ,$$

então

$$|x_i^{(k)} - x_i| \leq \lambda \Delta(k-1) ,$$

logo

$$\Delta(k) \leq \lambda \Delta(k-1) ,$$

como queríamos demonstrar!

4.3 Critério de parada

Ao implementar o Método de Jacobi no computador é preciso fornecer ao computador um critério de parada para o programa. Isso é feito fixando-se uma precisão relativa p , que fará o programa parar (no passo k) se

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq p |x_i^{(k)}| ,$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Ou seja, se $|x_i^{(k)}| \neq 0$, então a variação relativa de um passo para outro

$$\frac{|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|}{|x_i^{(k)}|}$$

tem que ser menor ou igual a p . E se $x_i^{(k)} = 0$ então $x_i^{(k+1)}$ também deve ser zero.

É preciso ter, no entanto, bastante cuidado com a escolha de p , pois muitas vezes a velocidade de convergência do método é muito lenta. Mesmo longe da solução, a variação relativa das soluções aproximadas pode ser muito pequena.

4.4 O Método de Gauss-Seidel

O Método de Jacobi poderia ser aplicado nos problemas de contorno da Seção 1.8, mas somente pelo Critério das Linhas não seria possível afirmar que haveria convergência, pois os vértices livres produzem equações onde o elemento da diagonal é exatamente igual à soma dos demais termos, o que significa, na notação da Seção anterior, que $\lambda_i = 1$, para alguns valores de i .

Experimentos numéricos evidenciam que de fato há convergência do Método de Jacobi nesses casos, embora ela seja muito lenta, principalmente se o número de vértices da grade for muito grande. Embora a convergência possa ser demonstrada matematicamente, com critérios menos exigentes que o Critério das Linhas, discutiremos nesta

Seção uma variação do Método de Jacobi, chamada de *Método de Gauss-Seidel*. Sua eficácia ficará demonstrada a partir de uma hipótese mais fraca que o Critério das Linhas, chamada de *Critério de Sassenfeld*. Não será difícil mostrar que os problemas de contorno citados satisfazem esse critério, desde que se tenha um mínimo de cuidado na numeração dos vértices livres.

No Método de Jacobi, calcula-se o vetor $(x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ a partir do vetor $(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix},$$

ou, de forma sucinta,

$$u^{(k+1)} = w - Bu^{(k)}.$$

Em cada etapa, as coordenadas $x_1^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)}$ de $u^{(k+1)}$ são obtidas todas de uma vez só, a partir das coordenadas $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ de $u^{(k)}$.

Já no Método de Gauss-Seidel as coordenadas atualizadas são imediatamente usadas na atualização das demais. Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \right) \end{aligned}$$

Para introduzir o Critério de Sassenfeld e discutir a convergência, é melhor ilustrarmos com um sistema com 4 equações. Depois enunciaremos o Critério para sistemas com um número qualquer de equações, e ficará claro que os argumentos se generalizam. Com isso, evitaremos o excesso de elipses (os três pontinhos), e o critério emergirá de modo natural.

Assim como na Seção anterior, queremos avaliar a diferença entre a aproximação obtida na etapa k e a solução original, e mostrar que essa diferença se reduz a cada etapa. Para medir essa diferença, tomamos

$$\Delta(k) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i^{(k)} - x_k|,$$

onde $x_1, \dots, x_n$ representa a solução verdadeira. Mais uma vez, nosso objetivo é mostrar que existe $\lambda < 1$ tal que

$$\Delta(k+1) \leq \lambda \Delta(k) ,$$

e para isso precisaremos mostrar que

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| \leq \lambda \Delta(k)$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Num sistema de 4 equações e 4 incógnitas temos

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} - x_1 &= \frac{1}{a_{11}} \left(a_{12}(x_2 - x_2^{(k)}) + a_{13}(x_3 - x_3^{(k)}) + a_{14}(x_4 - x_4^{(k)}) \right) \\ x_2^{(k+1)} - x_2 &= \frac{1}{a_{22}} \left(a_{21}(x_1 - x_1^{(k+1)}) + a_{23}(x_3 - x_3^{(k)}) + a_{24}(x_4 - x_4^{(k)}) \right) \\ x_3^{(k+1)} - x_3 &= \frac{1}{a_{33}} \left(a_{31}(x_1 - x_1^{(k+1)}) + a_{32}(x_2 - x_2^{(k+1)}) + a_{34}(x_4 - x_4^{(k)}) \right) \\ x_4^{(k+1)} - x_4 &= \frac{1}{a_{44}} \left(a_{41}(x_1 - x_1^{(k+1)}) + a_{42}(x_2 - x_2^{(k+1)}) + a_{43}(x_3 - x_3^{(k+1)}) \right) \end{aligned}$$

Da primeira equação, sai

$$|x_1^{(k+1)} - x_1| \leq \frac{|a_{12}|}{|a_{11}|} \cdot |x_2 - x_2^{(k)}| + \frac{|a_{13}|}{|a_{11}|} \cdot |x_3 - x_3^{(k)}| + \frac{|a_{14}|}{|a_{11}|} \cdot |x_4 - x_4^{(k)}| ,$$

Como $|x_i - x_i^{(k)}| \leq \Delta(k)$, para todo $i = 1, 2, 3, 4$, então

$$|x_1^{(k+1)} - x_1| \leq \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|}{|a_{11}|} \Delta(k) .$$

Definimos

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}|}{|a_{11}|} ,$$

para ficar com

$$|x_1^{(k+1)} - x_1| \leq \beta_1 \Delta(k) .$$

Agora levamos em conta essa última inequação para mostrar que

$$|x_2^{(k+1)} - x_2| \leq \frac{\beta_1 |a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}|}{|a_{22}|} \Delta(k) \equiv \beta_2 \Delta(k) .$$

Continuando, obtemos

$$|x_3^{(k+1)} - x_3| \leq \frac{\beta_1 |a_{31}| + \beta_2 |a_{32}| + |a_{34}|}{|a_{33}|} \Delta(k) \equiv \beta_3 \Delta(k)$$

e

$$|x_4^{(k+1)} - x_4| \leq \frac{\beta_1|a_{41}| + \beta_2|a_{42}| + \beta_3|a_{43}|}{|a_{44}|} \Delta(k) \equiv \beta_4 \Delta(k) .$$

Em conclusão, mostramos que

$$|x_i^{(k+1)} - x_i| \leq \beta_i \Delta(k) ,$$

logo

$$\Delta(k+1) \leq (\max_{i=1,2,3,4} \beta_i) \Delta_k .$$

Se cada um dos números β_1 , β_2 , β_3 e β_4 for menor do que 1, então teremos $\Delta(k+1) \leq \lambda \Delta(k)$, com $\lambda < 1$.

Para um sistema linear de n equações e n incógnitas, o Critério de Sassenfeld pode ser enunciado de forma indutiva, da seguinte maneira. Primeiro,

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} ,$$

como no Critério das Linhas. Os demais coeficientes são definidos indutivamente. Suponha que já tenham sido definidos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}$, para $i \geq 2$. Então β_i se define como

$$\beta_i = \frac{\beta_1|a_{i1}| + \dots + \beta_{i-1}|a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{in}|}{|a_{ii}|} ,$$

isto é, no numerador os β_i 's aparecem multiplicando os coeficientes da linha i à esquerda da diagonal, enquanto que os coeficientes à direita da diagonal são multiplicados por 1. O coeficiente da diagonal aparece no denominador (como no Critério das Linhas) e não aparece no numerador.

Exercício. *Mostre que os problemas de contorno da Seção 1.8 satisfazem o Critério de Sassenfeld.*

Exercício. *Obtenha a solução com 3 algarismos significativos do sistema linear*

$$\begin{array}{rrrrr} 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ -x_1 & + & 2x_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 16 \end{array}$$

usando o Método de Jacobi e o Método de Gauss-Seidel. Compare a velocidade de convergência nos dois métodos.

	1	3	
2	x	y	3
5	w	z	0
	7	1	

Exercício. Considere a tabela acima. Use o Método de Gauss-Seidel para achar x, y, z, w tais que cada casinha que contenha uma incógnita seja a média das quatro adjacentes (considerando apenas verticais e horizontais). Faça 4 iterações, partindo de $(x_0, y_0, z_0, w_0) = (0, 0, 0, 0)$, e arredondando para 2 algarismos significativos após cada etapa.