Sejam $(x_0, y_0), \ldots, (x_N, y_N)$ os $N+1$ pontos dados, com os x_i diferentes dois a dois. Chamamos de $p_0, p_1, \ldots, p_{N_1}$ os N polinômios cúbicos do spline, referentes aos intervalos $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{N-1}, x_N]$, respectivamente. Como discutido em aula, impomos $2N$ equações que se referem à imposição de que cada polinômio p_i satisfaça $p_i(x_i) = y_i$ e $p_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Depois temos mais duas equações para cada nó interno, impondo suavidade até a segunda derivada. Isto é, para todo $i = 1, 2, \ldots, N-1$, impomos $p'_{i-1}(x_i) = p'_i(x_i)$ e $p''_{i-1}(x_i) = p''_i(x_i)$. Isto nos dá mais $2N-2$ equações.

O método de spline se refere às duas equações restantes que precisamos impor para que o sistema tenha única solução. Essas equações se referem aos polinômios das pontas (podemos dizer que é uma espécie de "condição de contorno"). Usaremos a nomenclatura do Scilab (exceto para o método "segundo grau", que o Scilab não tem implementado).

Método "clamped" ou em português "grampeado". Consiste em fixar as derivadas nas pontas. Isto dá duas equações, $p'_0(x_0) = d_0$ e $p'_{N-1}(x_N) = d_N$, onde d_0 e d_N são os valores requeridos das derivadas nas duas pontas. Em muitos casos, é razoável pedir $d_0 = d_N = 0$.

Método "not-a-knot" ou em português "não-é-um-nó". Neste método, $p_0 = p_1$, assim como $p_{N-2} = p_{N-1}$. Para transformar em equações, basta impor $p'''_0(x_1) = p'''_1(x_1)$. Pois isto, junto com as equações de suavidade entre os dois, acaba por implicar que são iguais. A outra equação é $p'''_{N-2}(x_{N-1}) = p'''_{N-1}(x_{N-1})$.

Este método é o default da função splin do Scilab.

Método "natural" ou em português "natural". Neste método, impõe-se apenas que a segunda derivada dos polinômios extremos seja zero. As equações são $p''_0(x_0) = 0$ e $p''_{N-1}(x_N) = 0$

Método "segunda ordem". Pede-se que os polinômios extremos sejam quadráticos, e não cúbicos. Para formular as equações como nos outros casos, basta pedir $p'''_0(x_0) = 0$ e $p'''_{N-1}(x_N) = 0$ (na verdade, como a terceira derivada de um polinômio cúbico é constante, impor que é zero num ponto implica impor que é zero em qualquer ponto, e isto é o mesmo que dizer que o coeficiente de grau 3 é zero).

Método "periodic" ou em português "periódico". Neste método, supõe-se que a função ajustada é periódica, de forma que à direita de x_N ela continua exatamente como se estivesse à direita de x_0. Este método *só pode ser usado se* $y_N = y_0$.

Neste caso, é preciso impor suavidade entre p_{N-1} e p_0. Isto é feito através das equações $p'_{N-1}(x_N) = p'_0(x_0)$ e $p''_{N-1}(x_N) = p''_0(x_0)$.

Para testar se você realmente entendeu tudo isso, sugiro fazer o seguinte exercício. Monte a matriz de spline explicitamente com $N = 5$, para cada método (o método determina apenas as duas últimas equações, as outras são sempre iguais). Explicitamente aqui quer dizer que os coeficientes do sistema linear devem aparecer dependendo dos dados (x_i, y_i).