MAC 5781+325 OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

1. Instruções

Escolherei alguns exercícios desta lista para colocar na Prova 3 que será realizada no dia 21 de dezembro das 10:00 às 12:00.

2. Exercícios

Definição: Um fluxo é **viável** se satisfaz b e respeita u.

1. Seja (N, A) uma rede, b uma função–suprimento e c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Digamos que uma função–potencial y **respeita** c se $y(j) - y(i) \leq c_{ij}$ para todo arco ij da rede.
   (a) Suponha que x é um fluxo que satisfaz b e y é uma função–potencial que respeita c. Prove que $cx \geq yb$.
   (b) Suponha que x é um fluxo que satisfaz b e que y é uma função–potencial que respeita c. Suponha ainda que $y(j) - y(i) = c_{ij}$ para todo arco ij tal que $x_{ij} > 0$. Prove que $cx = yb$.
2. Seja (N, A) uma rede e c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Seja s um nó da rede e adote a função–suprimento b definida da seguinte maneira:

   $$b(s) = -(n-1) \quad \text{e} \quad b(i) = +1 \text{ para cada } i \text{ em } N - \{s\},$$

   onde $n = |N|$. Digamos que uma função–potencial y **respeita** c se $y(j) - y(i) \leq c_{ij}$ para todo arco ij da rede.

   Suponha que existe um fluxo que satisfaz b. Qual o melhor algoritmo que você conhece para determinar um fluxo viável x e uma função–potencial y tais que $cx = yb$?
3. Seja (N, A) uma rede simétrica, c uma função–custo simétrica, u uma função–capacidade e y uma função–potencial. Suponha que

   $$y(j) - y(i) \leq c_{ij} \text{ para cada arco } ij \text{ tal que } u_{ij} > 0$$

   Seja R o conjunto dos arcos pq para os quais $u_{pq} > 0$. Defina a função–custo c^y em R da maneira usual: $c^y_{pq} = c_{pq} - y(q) + y(p)$ para cada arco pq em R.

   Seja s um elemento de N e suponha que existe uma caminho orientado de s a cada um dos demais nós na rede (N, R). Para cada nó i da rede, seja $d(i) = \min_P c^y(P)$, onde o mínimo é tomado sobre todos os caminhos orientados P de s a i na rede (N, R).

   Seja T um caminho orientado na rede (N, R) que começa em s e termina num nó t e suponha que $c^y(T) = d(t)$.

   Defina uma nova função–capacidade u' na rede (N, A) da seguinte maneira para cada ij em A:

- se ij está em T então $u'_{ij} = u_{ij} - 1$;
- se ji está em T então $u'_{ij} = u_{ij} + 1$;
- caso contrário, $u'_{ij} = u_{ij}$.

Seja y' a função $y - d$. Mostre que para cada (i, j) em A,

$$u'_{ij} > 0 \implies y'(j) - y'(i) \leq c_{ij}.$$

4. A tabela especifica um fluxo x tal que $x \leq u$. Encontre um fluxo $x' \leq u$ tal que $cx' < cx$.

ij	x_{ij}	u_{ij}	c_{ij}
$(1,2)$	0	1	2
$(1,3)$	2	2	4
$(1,4)$	4	5	1
$(2,3)$	0	3	3
$(3,4)$	0	1	9
$(4,2)$	0	5	1
$(5,1)$	3	4	1
$(5,2)$	2	4	1

5. (Exercício 9.16 de [1]) Figura 1(b) mostra um fluxo viável x de custo mínimo para o problema ilustrado na Figura 1(a). Primeiro, verifique que x é viável.
   (a) Desenhe a rede residual determinada pelo fluxo x e mostre que esta rede não tem ciclo (orientado) de custo negativo.
   (b) Determine um função potencial π que junto com x satisfaz as condições de otimalidade envolvendo custo reduzido:

$$\begin{array}{lll} x_{ij} = 0 & \Rightarrow & c^{\pi}_{ij} \geq 0, \\ 0 < x_{ij} < u_{ij} & \Rightarrow & c^{\pi}_{ij} = 0, \\ x_{ij} = u_{ij} & \Rightarrow & c^{\pi}_{ij} \leq 0, \end{array} \tag{1}$$

   onde $c^{\pi}_{ij} = c_{ij} - \pi(j) + \pi(i)$ (c^{π}_{ij} é chamdo de custo redizido) . Mostre os custos reduzidos de cada arco da rede residual.
   (c) Verifique que o par x, π tem folgas complementares:

$$\begin{array}{lll} \pi(j) - \pi(i) & \leq & c_{ij} \quad \text{para todo } ij \text{ tal que } x_{ij} < u_{ij} \\ \pi(j) - \pi(i) & \geq & c_{ij} \quad \text{para todo } ij \text{ tal que } v_{ij} > 0 \end{array} \tag{2}$$

6. Mostre que se o par x, π tem folgas complementares (ou seja, satisfaz (2)) então a função custo reduzido c^{π} é ótima (ou seja, satisfaz (1))
7. (Exercício 9.18 de [1]) Simulando o *Cycle-Cancelling Algorithm* encontre um fluxo viável de custo mínimo na rede da Figura 2 onde $b(i) = 0$ para todo nó i.
8. Simulando o *Successive Shortest Path Algorithm* encontre um fluxo viável de custo mínimo na rede da Figura 3.
9. (Exercício 9.30 de [1]) Seja (N, A) uma rede, b uma função–suprimento, c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}\geq 0$ e u uma função–capacidade. Suponha que x é um fluxo que satisfaz b, respeita u e minimiza cx.

   Seja u' a função–capacidade definida assim:

$$\text{se } x_{ij} = u_{ij} \text{ então } u'_{ij} = u_{ij} \text{ senão } u'_{ij} = u_{ij} + 999.$$

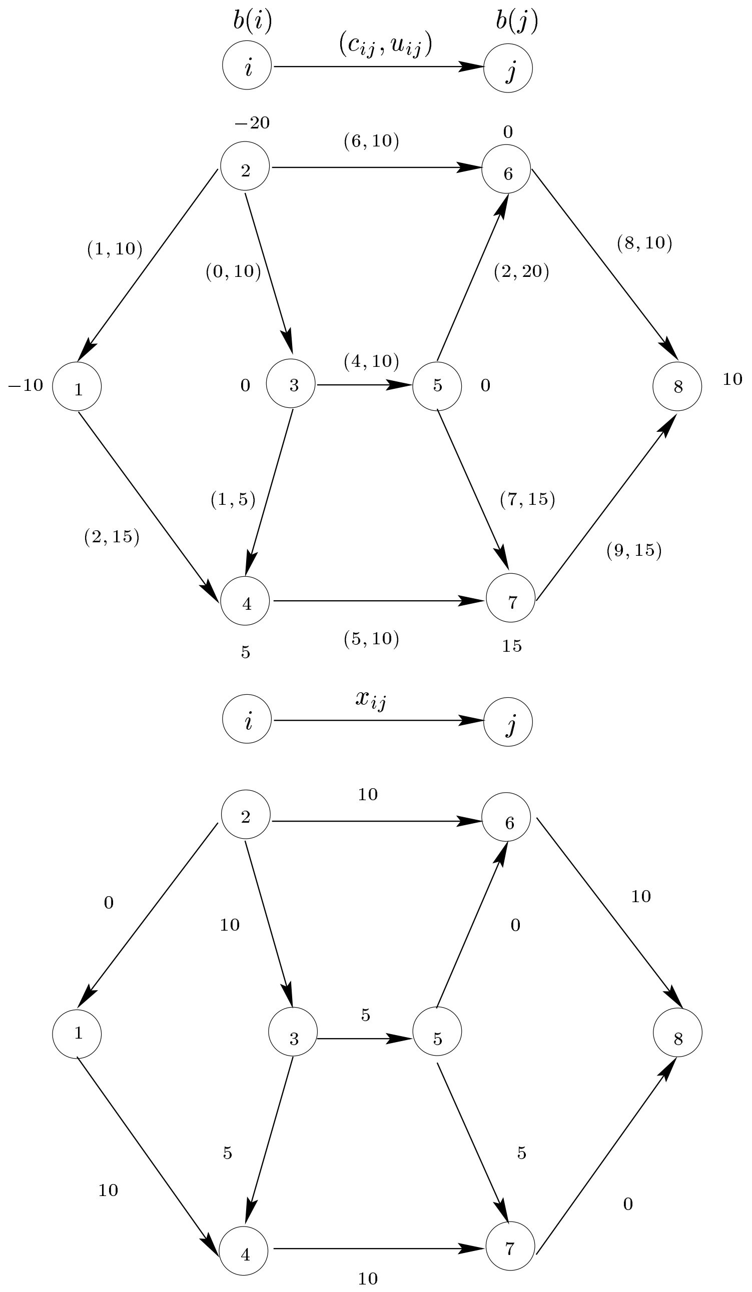


FIGURA 1. Rede do Exercício 5: (a) dados do problema; (b) fluxo viável de custo mínimo.

Prove $cx' \geq cx$ para todo fluxo x' que satisfaz b e respeita u'.

10. (Exercício 9.40 de [1]) Seja (N, A) uma rede, b uma função–suprimento, c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ e u uma função–capacidade.

    Suponha que

    - existe um fluxo viável,

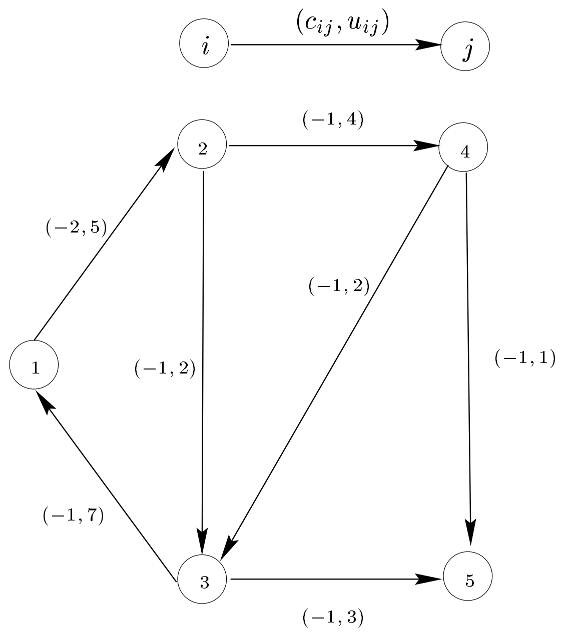


Figura 2. Rede do Exercício 7.

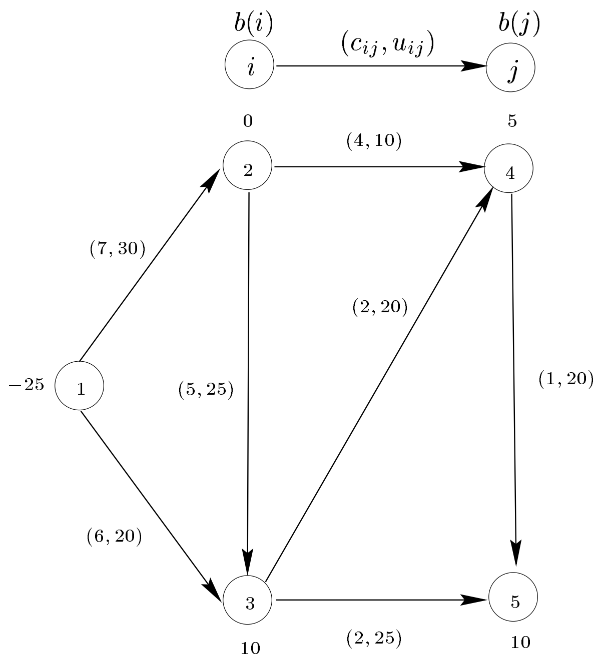


Figura 3. Rede do Exercício 8.

- $b(i)$ é par para cada cada i,
- u_{ij} é par para cada ij.

É verdade que existe um fluxo viável x que minimiza cx tal que x_{ij} é par para cada ij? Prove ou dê um contra-exemplo.

11. Seja (N, A) uma rede, b uma função–suprimento/demanda, u uma função–potencial, c uma função–custo ≥ 0.

    Suponha que x é um fluxo que satisfaz b, respeita u e minimiza cx.

    Suponha que c' é uma função–custo que difere de c apenas num arco pq:

$$c'_{pq} = c_{pq} + 1 \quad \text{e}$$
$$c'_{ij} = c_{ij} \text{ para todo arco } ij \text{ distinto de } pq.$$

    Descreva um algoritmo eficiente para calcular (a partir de x) um fluxo x' que satisfaz b, respeita u e minimiza $c'x'$. Justifique.

    (Sugestão: Encontre um fluxo de valor máximo.)

12. Seja (N, A) uma rede e c uma função–custo (não necessariamente $c \geq 0$).

    DEFINIÇÃO: Uma função–potencial π **respeita** c se $\pi(j) - \pi(i) \leq c_{ij}$ para todo arco ij da rede.

    Seja π uma função–potencial que respeita c. Seja c^π a função–custo definida da seguinte maneira[1]: $c^\pi_{ij} = c_{ij} - \pi(j) + \pi(i)$ para cada arco ij.

    Mostre que uma função potencial π' respeita c^π se e só se $\pi' + \pi$ respeita c.

13. (Exercício 11.12 de [1])
    (a) Considere o fluxo viável x^0 ilustrado na Figura 4. Transforme este fluxo em um fluxo acíclico x tal que $cx \leq cx^0$.
    (b) Apresente uma estrutura arbórea associada a x.

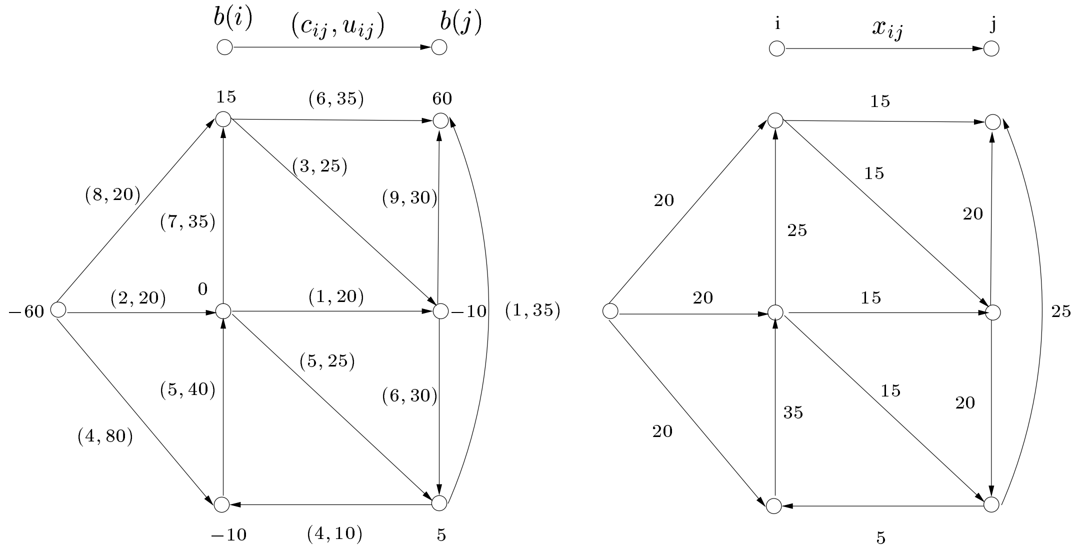
14. (Exercício 11.13 de [1]) A Figura 5 mostra duas árvores para o problema do fluxo de custo mínimo mostrado na Figura 4(a).
    (a) Suponha que todos os arcos que não estão na árvore da Figura 5(a) são arcos de L (ou seja, $x_{ij} = 0$ para todo ij que não está na árvore). Mostre o fluxo correspondente a esta estrutura arbórea ($U = \emptyset$).
    (b) Suponha que todos os arcos que não estão na árvore da Figura 5(b) são arcos de U (ou seja, $x_{ij} = u_{ij}$ para todo ij que não está na árvore). Mostre o fluxo correspondente a esta estrutura arbórea ($L = \emptyset$).

15. (Exercício 11.15 de [1]) Determine as funções-potenciais determinadas pelas árvores da Figura 5 que correspondem a rede do problema do fluxo de custo mínimo da Figura 4(a).

16. (Exercício 11.16 de [1]) Considere o problema do fluxo viável de custo mínimo ilustrado na Figura 6. Usando o Simplex-para-Redes encontre um fluxo viável de custo mínimo para o problema. Use a seguinte estrutura arbórea inicial $T = \{(1, 2), (3, 2), (2, 5), (4, 5), (4, 6)\}$, $L = \{(3, 5)\}$ e $U = \{(1, 3), (2, 4), (5, 6)\}$.

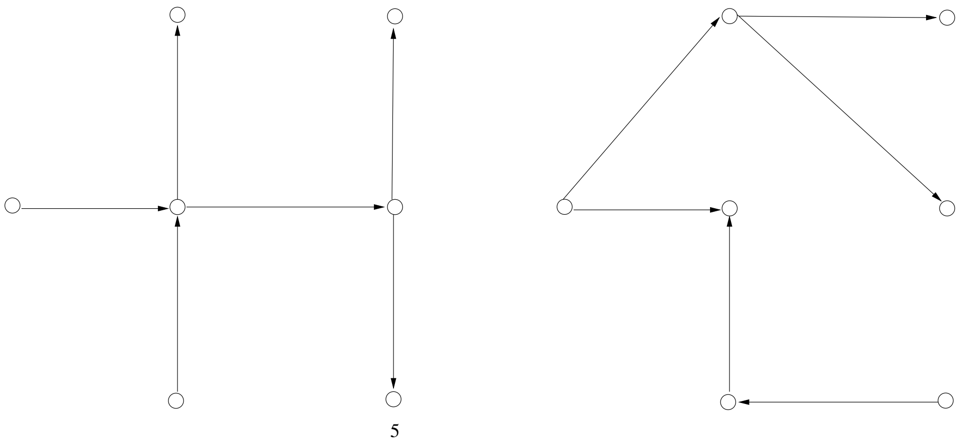
17. Seja (N, A) uma rede e T uma parte de A tal que (N, T) é uma árvore. Seja π uma função–potencial tal que $c_{ij} = \pi(j) - \pi(i)$ para todo arco ij em T.

---
[1] trata-se do "custo reduzido"



(a) (b)

Figura 4. Rede do Exercício 13: (a) dados do problema; (b) fluxo viável.



(a) (b)

Figura 5. Duas árvores correspondentes a rede da Figura 4.

Seja pq um elemento de T e rs um elemento de $A - T$. Seja T' o conjunto

$$(T - \{pq\}) \cup \{rs\}.$$

Suponha que (N, T') é uma árvore.

Explique de modo conceitual (sem detalhes computacionais) como é possível obter, a partir de π, uma função–potencial π' tal que $c_{ij} = \pi'(j) - \pi'(i)$ para todo ij em T'. Justifique.

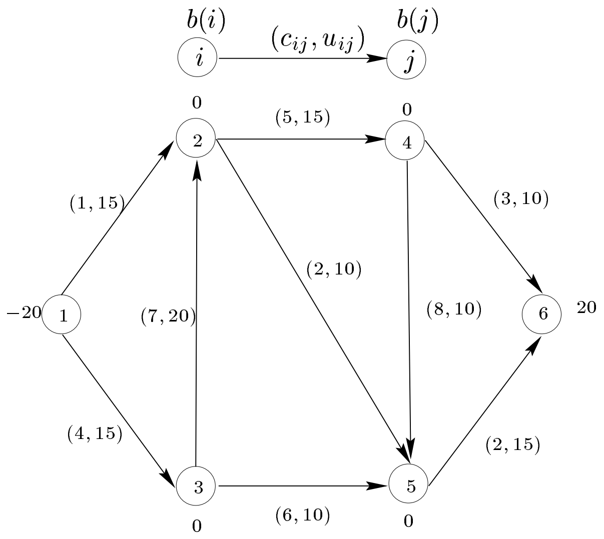


FIGURA 6. Rede para o Exercício 16.

18. Seja (N, A) uma rede e T uma parte de A tal que (N, T) é uma árvore. Seja b uma função–suprimento/demanda, c uma função–custo ≥ 0, e π uma função–potencial.

    Suponha que x é um fluxo que satisfaz b. Suponha que $x_{ij} = 0$ para todo arco ij em $A - T$ e $c_{ij} = \pi(j) - \pi(i)$ para todo arco ij em T.

    Dê condições suficientes para que x minimize cx (isto é, para que $cx' \geq cx$ para todo fluxo x' que satisfaz b). Justifique.

REFERÊNCIAS

[1] R.K. Ahuja, T.L Magnanti e J.B. Orlin, *Network flows: Theory, algorithms and applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.