MAC 5781+325 OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1. Instruções

Entregue os exercícios ???? até o dia 27 de novembro, segunda-feira. Os alunos da graduação podem fazer a lista em duplas (de no máximo dois alunos ;-)). Para os alunos da pós-graduação a lista é individual.

2. Exercícios

1. É verdade que $\sum_{j \in S} x(j, N-j) = x(S, N-S)$ para toda parte S de N?
2. Digamos que x é um fluxo e seja N' o conjunto dos nós j tais que $\Delta(x, j) \neq 0$. Mostre que se $|N'| \leq 2$ então x é um fluxo de s a t para algum par s, t.
3. (Exercício 6.20 de [1]) Mostre como transformar um problema de fluxo máximo tendo várias fontes e vários sorvedouros em um problema contendo apenas uma fonte e um sorvedouro.
4. (Exercício 6.25 de [1]) Em algumas redes, além da capacidades nos arcos, cada nó i distinto de s e t possui uma capacidade $w(i) \geq 0$ sobre o fluxo que pode passar através daquele do nó i. Por exemplo, os nós podem representar aeroportos com capacidade limitada de aterrissagens e decolagens ou circuitos em uma rede com um número limitado de *ports*. Nessas redes estamos interessados em determinar o fluxo máximo satisfazendo as capacidades nos arcos e nos nós. Transforme este problema no problema padrão do fluxo máximo. Do ponto de vista de análise assintótica do pior caso, este problema com capacidades nos arcos e nós é mais difícil do que o problema com capacidades apenas nos arcos?
5. (Exercício 6.28 de [1]) Suponha que temos disponível um fluxo máximo de s a t em uma rede $(N.A)$. Mostre como, usando este fluxo, podemos determinar um corte de capacidade mínima separando s de t em tempo $O(m)$. Suponha que, desta feita, temos um corte de capacidade mínima separando s de t. Usando este corte você sabe como obter um fluxo máximo mais rapidamente usando algum algoritmo de fluxo máximo?
6. Determine um fluxo máximo de s a t na rede da Figura 1, simulando o Algoritmo dos Caminhos Aumentadores (Ford e Fulkerson). Na sua simulação destaque claramente cada caminho aumentante encontrado e o valor do fluxo correspondente. Prove que o fluxo final encontrado é máximo. Comece a simulação a partir do fluxo indicado na rede. O rótulo do tipo u, x próximo a cada arco indica que a capacidade do arco é u e o fluxo corrente é x.
7. (Exercício 7.2 de [1]) Usando o *Capacity Scaling Algorithm* encontre um fluxo máximo na rede da Figura 2.

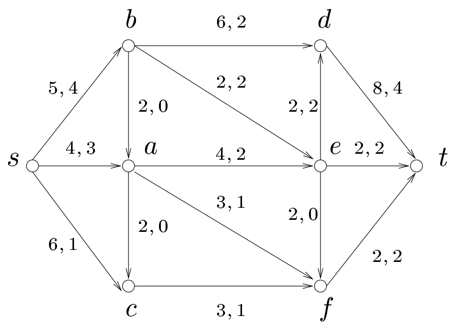

FIGURA 1. Rede do Exercício 6.

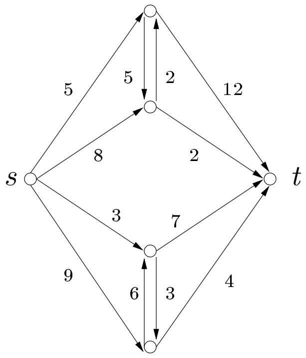

FIGURA 2. Rede do Exercício 7.

8. (Exercício 7.3 de [1]) Usando o *Shortest Augmenting Path Algorithm* encontre um fluxo máximo na rede da Figura 3.

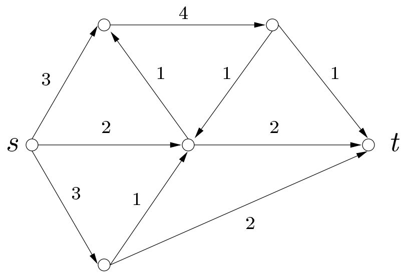

FIGURA 3. Rede do Exercício 8.

9. (Exercício 7.4 de [1]) Usando o *Preflow-Push Algorithm* encontre um fluxo máximo na rede da Figura 4.
10. (Pseudofluxos) Suponha que (N, A) é uma rede simétrica. Seja $A, \tilde{A}$ é uma partição de A tal que (1) $ij \in A$ se e só se $ji \in \tilde{A}$; (2) $u_{ji} = 0$ para cada ji em $\tilde{A}$. Suponha que x é um fluxo que respeita u. Calcule o pseudofluxo determinado por x.

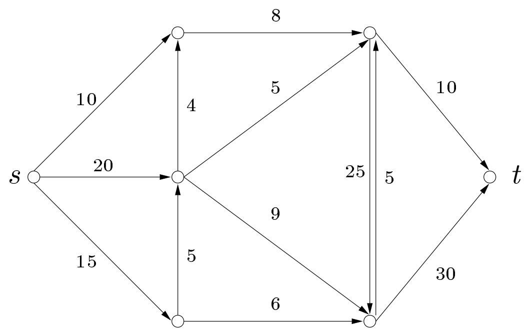

FIGURA 4. Rede da questão 9.

Pseudofluxo

Um **pseudofluxo** numa rede simétrica (N, A) é uma função f de A em $\mathbb{Z}$ tal que

$$f_{ij} = -f_{ji}$$

para todo arco ij. Investigaremos a relação entre fluxos e pseudofluxos.

O pseudofluxo **determinado por** um fluxo x é a função $\check{x}$ definida da seguinte maneira: para cada arco ij,

$$\check{x}_{ij} = x_{ij} - x_{ji}.$$

É óbvio que $\check{x}$ é, de fato, um pseudofluxo. Intuitivamente, $\check{x}_{ij}$ é a quantidade total de fluxo que está transitanto de i para j *ao longo do par de arcos* ij, ji. Analogamente, $\check{x}_{ji}$ é a quantidade total de fluxo que está transitanto de j para i ao longo do par de arcos ji, ij.

O saldo de um fluxo num nó pode ser confortávelmente expresso em termos do correspondente pseudofluxo. Se $\check{x}$ é o pseudofluxo determinado por um fluxo x então é óbvio que, para todo nó i,

$$\Delta(x, i) = \textstyle\sum_j \check{x}_{ij},$$

onde a soma se estende a todos os nós j tais que ij (e portanto também ji) é um arco.

Considere agora a obtenção de um fluxo a partir de um pseudofluxo. O fluxo, digamos w, **determinado por** um pseudofluxo f é definido da seguinte maneira: para cada arco ij,

$$w_{ij} = \max\{0, f_{ij}\}.$$

É óbvio w é, de fato, um fluxo (pois $w \geq 0$). É fácil verificar que $f = \check{w}$, ou seja, que o pseudofluxo f é determinado pelo fluxo w. De fato, para cada arco ij há duas alternativas: ou $w_{ij} = f_{ij}$ e $w_{ji} = 0$ ou $w_{ij} = 0$ e $w_{ij} = f_{ji}$. Logo, $f_{ij} = w_{ij} - w_{ji}$ para cada arco ij.

Suponha agora que x é um fluxo, que $\check{x}$ é o pseudofluxo determinado por x e que w é o fluxo determinado por $\check{x}$. Qual a relação entre x e w? Os dois fluxos podem ser diferentes, mas *w e x são equivalentes*. De fato, como

$$w_{ij} - w_{ij} = \check{x}_{ij} = x_{ij} - x_{ji},$$

temos $\Delta(w,i) = \sum_j \check{x}_{ij} = \Delta(x,i)$ para todo nó i.

Suponha ainda que x respeita uma função–capacidade u. Então o fluxo w que definimos no parágrafo anterior *também respeita* u. De fato, se $w_{ij} = 0$ então é claro que $w_{ij} \le u_{ij}$; caso contrário,

$$w_{ij} = \check{x}_{ij} = x_{ij} - x_{ji} \le x_{ij} \le u_{ij}.$$

11. Sejam (N, A) uma rede u uma função–capacidade e s e t dois nós distintos de N. Mostre que se X e Y são partes de N tais que $s \in X$, $t \in N - X$, $s \in Y$ e $t \in N - Y$ então

$$u(X, N-X) + u(Y, N-Y) \ge u(X \cap Y, N - (X \cap Y)) + u(X \cup Y, N - (X \cup Y)).$$

12. Sejam (N, A) uma rede, u uma função–capacidade e s e t dois nós distintos de N. Suponha que $(X, N-X)$ e $(Y, N-Y)$ são cortes de capacidade mínima separando s de t. Mostre que $(X \cap Y, N - (X \cap Y))$ e $(X \cup Y, N - (X \cup Y))$ são cortes de capacidade mínima separando s de t.
13. Suponha que P é um caminho orientado de s a t e seja δ um inteiro não-negativo. Seja w o fluxo definido pelas seguintes equações: $w_{ij} = \delta$ para todo arco ij de P e $w_{ij} = 0$ para todo os demais arcos.

    Seja u uma função capacidade e x um fluxo arbitrário. Qual deve ser o valor de δ para que w respeite $u - \check{x}$?

    Suponha que z é o fluxo determinado pelo pseudofluxo $\check{x} + \check{w}$. Escreva z_{ij} explicitamente em termos de x_{ij}, x_{ji} e δ.
14. Tenho uma rede (N, A) que contém um par de arcos $(i,j), (j,i)$. Quero resolver o problema do fluxo máximo com dados N, A, s, t, u, mas o algoritmo de que disponho exige rede anti-simétrica. Faço o seguinte: se $u_{ij} \ge u_{ji}$ então retiro arco (j,i) e faço $u_{ij} := u_{ij} - u_{ji}$; caso contrário, retiro arco (i,j) e faço $u_{ji} := u_{ji} - u_{ij}$. Agora aplico o algoritmo. Vou obter resposta correta?
15. Uma **banana** é um par y, z onde y é uma função–potencial e z é uma função–custo ≥ 0. Uma banana é **viável** se $y(j) - y(i) \le z_{ij}$. Mostre que pra qualquer fluxo viável x e qualquer banana viável y, z temos $zu \ge (y(t) - y(s))\Delta(x)$.

    (Portanto, para provar que um fluxo tem valor máximo basta exibir uma banana viável tal que $zu = (y(t) - y(s))\Delta(x)$.)
16. Seja (N, A) uma rede, b uma função–suprimento/demanda de N em $\mathbb{Z}$ e u uma função–capacidade.

    DEFINIÇÃO: Um fluxo x **satisfaz** b se $\Delta(x,i) = b(i)$ para cada nó i.

    DEFINIÇÃO: Um fluxo é **viável** se satisfaz b e respeita u.

    DEFINIÇÃO: Uma **banana** é um par y, z onde y é uma função–potencial e z é uma função–custo ≥ 0. Uma banana é **viável** se $y(j) - y(i) \le z_{ij}$ para todo arco (i,j) da rede.

    1. Exiba uma banana viável (a mais simples que puder).
    2. Suponha que existe um fluxo viável. Prove (*de maneira simples e direta*) que

$$yb \le zu$$

para toda banana viável y, z. Deduza daí que $-u(N-Y, Y) \leq b(Y) \leq u(Y, N-Y)$ para toda parte Y de N. Deduza daí que $b(N) = 0$ e $b(Y) \leq u(Y, N-Y)$ para toda parte Y de N.

3. A recíproca do item 2 é verdadeira? Ou seja, é verdade que se $yb \leq zu$ para toda banana viável y, z então existe fluxo viável?

17. Sejam s e t dois nós distintos em uma rede (N, A). Problema: Encontrar um fluxo x de s a t tal que $x_{ij} \leq 999$ para cada arco ij e x tem valor máximo. Qual o algoritmo mais eficiente (do ponto de vista de eficiência de pior caso) que você conhece para resolver o problema?
18. (Teorema de Hoffman '60) Uma circulação em uma rede é um fluxo sem origem e destino. Mais precisamente, seja (N, A) uma rede seja x um fluxo. Nos dizemos que x é uma circulação se x satisfaz a lei de conservação do fluxo (*Kirchhoff's current law*) para cada nó i de N, ou seja.

$$\Delta(x, i) = 0 \quad \text{para cada nó } i \text{ de } N.$$

Dadas funções l e u de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $l_{ij} \leq u_{ij}$ para cada ij em A nós dizemos que uma circulação x satisfaz a 'capacidade inferior' l e a função–capacidade u (ou simplesmente que x é viável) se

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{para cada } ij \text{ em } A.$$

Prove que existe uma circulação satisfazendo l e u se e somente se

$$l(X, N-X) \leq u(N-X, X) \quad \text{para cada parte } X \text{ de } N.$$

[Sugestão: note que a necessidade da condição é trivial dado que em uma circulação viável a função l força que pelo menos $l(X, N-X)$ unidades de fluxo vá de X para $N-X$ e que a função u permite que no máximo $u(N-X, X)$ unidades dse fluxo vá de $N-X$ para X. Para provar a suficiência construa uma rede auxiliar (N', A') onde

$$N' := N \cup \{s, t\} \quad \text{e} \quad A' := A \cup \{(s, j) \mid j \in N\} \cup \{(i, t) \mid i \in N\},$$

e defina a seguinte função–capacidade u' para os arcos de A':

$$u'_{ij} := \begin{cases} l(N, j) & \text{se } i = s; \\ l(i, N) & \text{se } j = t; \\ u_{ij} - l_{ij} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então a relação

$$x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$$

determina uma correspondência entre a circulação viável x em (N, A) e o fluxo viável x' em (N', A') de valor $l(V, V)$. Agora use o teorema do fluxo máximo e corte mínimo para provar o Teorema de Hoffman.]

Referências

[1] R.K. Ahuja, T.L Magnanti e J.B. Orlin, *Network flows: Theory, algorithms and applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.