MAC 5781+325 OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

1. Instruções

Entregue os exercícios abaixo até o dia 5 de outubro, quinta-feira. Os alunos da graduação podem fazer a lista em duplas (de no máximo dois alunos ;-)). Para os alunos da pós-graduação a lista é individual.

2. Exercícios

(1) (Rede topologicamente ordenada) Uma rede (N, A) está **topologicamente ordenada** se $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ e para cada arco ij tem-se $i < j$. Neste caso é possível calcular as distâncias a partir de um dado nó s em tempo $O(m)$, *mesmo que nem todos os arcos tenham custo* ≥ 0.

Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(m)$ que recebe uma rede (N, A) topologicamente ordenada, uma função–custo c de A em $\mathbb{Z}$ e um nó s tal que, para cada i, existe pelo menos um caminho de s a i; devolve uma função d de N em $\mathbb{Z}$ e uma função ψ de N em N tal que, para cada p em N,
(1) todo caminho de s a p tem custo $\geq d(p)$;
(2) ψ descreve um caminho de s a p cujo custo é $d(p)$.

(2) (Caminho de custo mínimo em rede com custos negativos) Seja (N, A) uma rede, s um nó e c uma função de A em $\mathbb{Z}$. Problema: encontrar, para cada nó i, um caminho de custo mínimo de s a i (suponha que, para cada i, existe pelo menos um caminho de s a i). Considere o seguinte método para resolver o problema:
  (a) Seja γ o número $\min\{c_{ij} : ij \in A\}$.
  (b) Se $\gamma \geq 0$ então use o algoritmo de Dijkstra com função–custo c.
  (c) Se $\gamma < 0$ então use o algoritmo de Dijkstra com a função–custo c' definida pela expressão $c'_{ij} = c_{ij} + |\gamma|$.

Prove que o método resolve o problema ou dê um contra-exemplo.

(3) Suponha que y é uma função potencial que respeita c e que f é uma função constante. Mostre que a função $y + f$ também respeita c.

(4) Suponha que a rede de predecessores não tem ciclos. Seja (i, j) um arco qualquer da rede (não necessariamente da rede de predecessores). Escreva um algoritmozinho para decidir se a operação $\psi(j) := i$ vai produzir um ciclo orientado na rede de predecessores. Qual a complexidade de tempo do seu algoritmozinho?

(5) (Caminho de custo mínimo em rede sem ciclo negativo) Considere a rede (N, A) e a função–custo c de A em $\mathbb{Z}$ abaixo, onde o custo de um arco é dado pelo número próximo do arco.

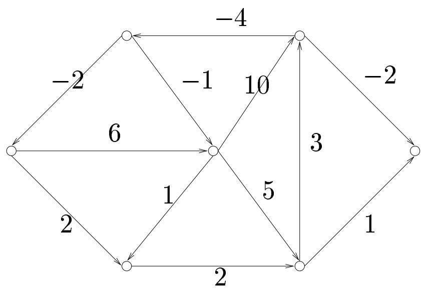

Figura 1. Rede com custo nos arcos.

(a) Para a rede dada, determine uma função potencial y que respeita c.
(b) Para a rede dada, defina a função custo c' de A em $\mathbb{Z}$ tal que
$$c'_{ij} := c_{ij} - y(j) + y(i).$$
(c) Mostre que toda função–custo definida como em (b) é não-negativa.
(d) Encontre, na rede acima, caminhos de custo mínimo de s a cada nó de $N - s$ em relação a função custo c.
(e) Encontre, na rede acima, caminhos de custo mínimo de s a cada nó de $N - s$ em relação a função custo c'.
(f) Você notou algo em (d) e (f)? Prove o que você deveria ter notado (o que será?).
(g) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo $O(mn)$ que recebe uma rede (N, A) e uma função–custo c de A em $\mathbb{Z}$ e devolve: ou (1) um ciclo negativo ou (2) um caminho de custo mínimo P_i de s a i, para todo $i \in N - s$ (suponha que, para cada i, existe pelo menos um caminho de s a i).