MAC 5781+325 OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

LISTA DE EXERCÍCIOS 1

1. Instruções

Entregue os exercícios abaixo até o dia 25 de setembro, quinta-feira. Os alunos da graduação podem fazer a lista em duplas (de no máximo dois alunos ;-)). Para os alunos da pós-graduação a lista é individual.

2. Exercícios

1. (Caminho não-orientado) Notação: para qualquer caminho P, seja $\overline{P}$ o conjunto dos arcos diretos de P e $\underline{P}$ o conjunto dos arcos reversos de P.

   Suponha agora que $\overline{r}$ e $\underline{r}$ são duas funções–capacidade de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Diremos que um caminho P é **válido** se $\overline{r}_{ij} > 0$ para cada ij em $\overline{P}$ e $\underline{r}_{ij} > 0$ para cada ij em $\underline{P}$.

   Chamaremos uma função–potencial y de **viável** se
   (1) $y(j) - y(i) \leq 0$ para cada arco ij tal que $\overline{r}_{ij} > 0$ e
   (2) $y(j) - y(i) \geq 0$ para cada arco ij tal que $\underline{r}_{ij} > 0$.

   > **Problema.** Dada uma rede (N, A), dois nós s e t e funções–capacidade $\overline{r}$ e $\underline{r}$, encontrar um caminho válido P de s a t.

   Prove que existe um caminho válido de s a t se e só se para toda função–potencial viável y temos que $y(t) - y(s) \leq 0$.
2. (Função potencial que respeita c) Seja (N, A) uma rede, s um nó, e c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}$. Para cada nó i, seja $d(i)$ o custo de um caminho de custo mínimo que começa em s e termina em i (suponha que, para cada i, existe pelo menos um caminho de s a i). Mostre que $d(j) - d(i) \leq c_{ij}$ para todo arco ij.
3. (Subcaminho de caminho de custo mínimo) Seja (N, A) uma rede e c uma função–custo de A em $\mathbb{Z}$. Suponha que i_1—i_2—$\cdots$—i_q é um caminho de custo mínimo. É verdade que, para todo índice p entre 1 e q, o caminho i_1—i_2—$\cdots$—i_p tem custo mínimo? Prove ou de um contra-exemplo.
4. (Caminho de maior capacidade) Considere uma rede (N, A). Dada uma função–capacidade de u de A em $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, a **capacidade** de um caminho orientado P é o número $\min u_{ij}$, onde o mínimo é tomado sobre todos os arcos ij de P. A capacidade de um caminho P será denotada por $u(P)$.

   Um **caminho viável** é um caminho orientado P de s a t tal que $u(P) > 0$.

Descreva um algoritmo que recebe uma rede (N, A), dois nós s e t e uma função–capacidade u; e devolve (1) um caminho orientado de capacidade máxima de s a t e (2) uma prova de que a resposta em (1) está correta.máxima.

Para resolver está questão você deve:

(a) obter uma condição de otimalidade;
(b) descrever o algoritmo;
(c) apresentar os invariantes que provam a corretude do algoritmo;
(d) mostrar que os invariantes de fato provam a corretude do algoritmo;
(e) analisar o algoritmo mostrando um limite para o número de iterações do algoritmo; (estou aceitando aqui um algoritmo cujo número de iterações seja limitado por um polinômio em m, n e $U := \max_{ij\in A} u_{ij}$.
(f) analisar a eficiência do seu algoritmo no pior caso (note que para descrever a eficiência você deverá especificar a estrutura de dados e descrever o seu algoritmo em um nível 'mais baixo'.)