6. Uma primitiva geométrica: InCircle

Observação. O material desta seção foi extraído do artigo de Guibas & Stolfi [5].

Dados quatro pontos a, b, c, d o predicado (primitiva) `InCircle`(a, b, c, d) é verdadeiro se o ponto d está na face esquerda da circunferência orientada pelo triângulo $\triangle(a, b, c)$. A face esquerda é a face interior (limitada) da circunferência se o triângulo $\triangle(a, b, c)$ estiver orientado positivamente, caso contrário a face esquerda é o exterior da circunferência. Logo, se o tomamos a, b e c de tal forma que o triângulo $\triangle(a, b, c)$ esteja orientado positivamente então a primitiva `InCircle` decide se o ponto d está no círculo determinado por pelos pontos a, b e c. (Veja Figura 16.)

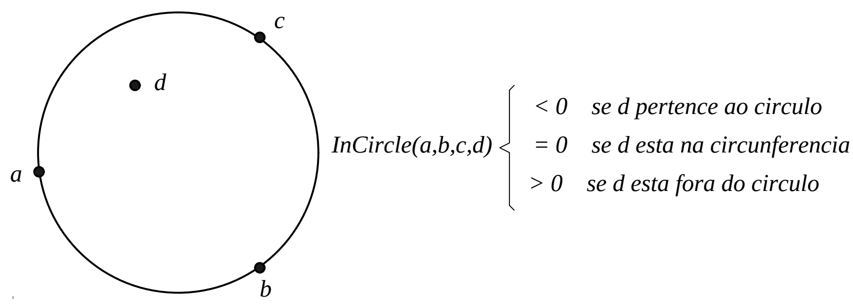

Figura 16. A primitiva `InCircle`.

Notemos que uma situação degenerada ocorre se d pertence a circunferência determinada por a, b e c. Curiosamente a situação não é degenerada se a, b e c são colineares e d esta fora da reta determinada por estes pontos.

Teorema 14. *O valor da primitiva* `InCircle`(a, b, c, d) *é dado pelo sinal do determinante*

$$\mathcal{D}(a, b, c, d) := \begin{vmatrix} x_a & y_a & x_a^2 + y_a^2 & 1 \\ x_b & y_b & x_b^2 + y_b^2 & 1 \\ x_c & y_c & x_c^2 + y_c^2 & 1 \\ x_d & y_d & x_d^2 + y_d^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Prova. Considere a seguinte função que leva pontos do plano xy no parabolóide $z = x^2 + y^2$ (A Figura 17 ilustra esta função.)

$$\lambda : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2).$$

Primeiro mostraremos que a, b, c e d são cocirculares se e somente se $\lambda(a)$, $\lambda(b)$, $\lambda(c)$ e $\lambda(d)$ são coplanares.

Suponha primeiro que a, b, c e d sejam cocirculares. Se nós temos o caso degenerado onde os pontos são colineares então o determinante é zero como podemos verificar através da expansão da terceira coluna. Mas o valor do determinante também é igual ao volume sinalizado do tetraedro definido por $\lambda(a)$, $\lambda(b)$, $\lambda(c)$ e $\lambda(d)$. Como o volume é zero então os pontos devem ser coplanares. Caso contrário seja (p, q) o centro da circunferência de raio r que contém os pontos a, b, c e d. Nos temos que

$$(x_a - p)^2 + (y_a - q)^2 = r^2,$$

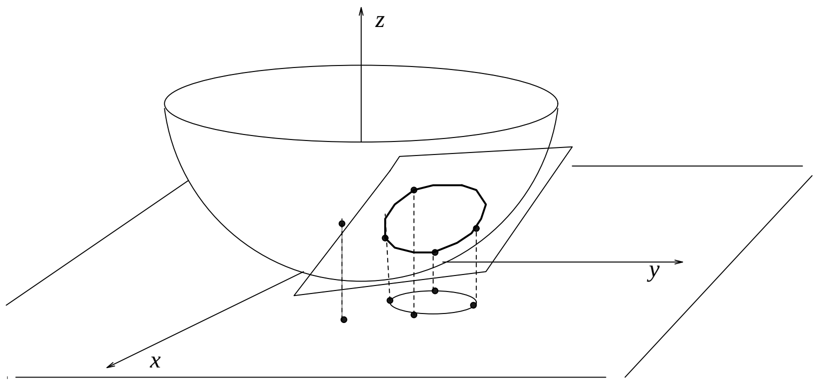

FIGURA 17. O parabolóide usado para calcula a primitiva `InCircle`.

ou equivalentemente

$$-2p \cdot x_a - 2q \cdot y_a + 1 \cdot (x_a^2 + y_a^2) + (p^2 + q^2 - r^2) \cdot 1 = 0. \tag{1}$$

Relações análogas se verificam para os pontos b, c e d, e portanto nós temos uma dependência linear entre as colunas da matriz acima, o que implica que $\mathcal{D}(a, b, c, d) = 0$. Assim, concluímos novamente que $\lambda(a), \lambda(b), \lambda(c)$ e $\lambda(d)$ são coplanares.

Agora, reciprocamente, suponha que $\lambda(a), \lambda(b), \lambda(c)$ e $\lambda(d)$ são coplanares. Se os pontos a, b, c e d são colineares não há o que provar. Logo suponha que (digamos) a, b, c são não-colineares. Seja (p, q) o centro da circunferência de raio r determinada pelo triângulo $\triangle(a, b, c)$. Então a, b e c satisfazem a Equação 1 (as respectivas versões). Como a, b e c são não-colineares então as três linhas correspondentes da matriz acima são linearmente independentes. Como o determinante é nulo então a quarta linha da matriz (correspondente ao ponto d) deve ser combinação linear das três primeiras linhas, e portanto d também satisfaz a Equação 1, ou seja, d está na circunferência determinada por a, b e c.

O que acabamos de provar mostra que a projeção de seções planares do parabolóide $z = x^2 + y^2$ no plano xy determinam circunferências. O parabolóide é uma superfície convexa (para 'cima') então em uma seção de um plano com o parabolóide a parte do parabolóide abaixo do plano tem sua projeção no plano xy no interior do círculo determinado por a, b e c e os pontos do parabolóide tem sua projeção fora deste círculo. A partir disto vemos que para decidir se um ponto está dentro ou fora do círculo determinado pelos pontos a, b, c e d basta aplicarmos a primitiva `Teste-de-Orientação`$(\lambda(a), \lambda(b), \lambda(c), \lambda(d))$, que corresponde ao volume sinalizado do tetraedro determinado pelos pontos $\lambda(a), \lambda(b), \lambda(c)$ e $\lambda(d)$. O resultado da primitiva `Teste-de-Orientação`$(\lambda(a), \lambda(b), \lambda(c), \lambda(d))$ é dado através do sinal do determinante $\mathcal{D}(a, b, c, d)$. ∎