5. Cota inferior

Discutiremos nesta seção sobre a cota inferior de qualquer algoritmo que constrói um diagrama de Voronoi ou uma triangularização de um dado conjunto S com n pontos.

Dado o diagrama de Voronoi $\mathrm{Vor}(S)$ não é difícil encontrarmos o par de pontos mais próximos em tempo $O(n)$: basta examinarmos as sítios cujas regiões compartilham uma aresta de Voronoi—pelo Corolário 1 sabemos que teremos que examinar $O(n)$ pares de sítios; o número de arestas de um diagrama de Voronoi de n pontos tem $O(n)$ arestas. Como sabemos que o Problema do Par Mais Próximo tem conta inferior $\Omega(n \log n)$ temos então o seguinte teorema.

Teorema 12. *Qualquer algoritmo que construa o diagrama de Voronoi de um dado conjunto com n pontos faz $\Omega(n \log n)$ operações elementares.* ∎

Como veremos, o diagrama de Delaunay $\mathrm{Del}(S)$ pode ser obtido em tempo linear a partir do diagrama de Voronoi $\mathrm{Vor}(S)$. Isto já implica que o problema de construir o diagrama de Delaunay $\mathrm{Del}(S)$ de um conjunto com n pontos tem cota inferior $\Omega(n \log n)$. Entretanto, observaremos aqui que o Problema de Ordenação pode ser reduzido ao problema de construir uma triangularização (não necessariamente a de Delaunay) de um dado conjunto de pontos. Considere um conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de n números. Dado este conjunto construiremos o conjunto S formado pelos $n + 1$ pontos

$$\{(x_1, 1), (x_2, 1), \ldots, (x_n, 1), (0, 0)$$

. Esta transformação pode ser feita em tempo linear. O conjunto S tem uma única triangularização (ilustrada na Figura 15). Dada esta triangularização (i.e. uma estrutura de dados, como a winged-edge, representando o grafo planar assoaciado à esta triangularização) podemos em tempo linear obter a ordenação dos números $x_1, \ldots, x_n$. Resumindo, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 13. *Qualquer algoritmo que construa uma triangularização de um dado conjunto com n pontos faz $\Omega(n \log n)$ operações elementares.* ∎

O teorema acima implica que, em particular, qualquer algoritmo que construa uma triangularização de Delaunay um dado conjunto com n pontos faz $\Omega(n \log n)$ operações elementares.

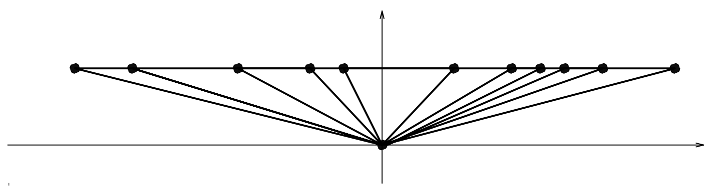

Figura 15. Ilustração da redução do Problema de Ordenação para o problema de construir uma triangularização.