4. Diagrama de Delaunay

O que veremos a seguir estabelece uma ligação fundamental entre o diagrama de Voronoi e uma triangularização especial.

Observação. O material desta seção foi extraído de [3].

Nós já estudamos o grafo dual de uma triangularização (que era uma árvore), consideraremos agora o grafo dual do diagrama de Voronoi de um conjunto S de pontos em E^2. O grafo dual de um diagrama de Voronoi $\mathrm{Vor}(S)$ é o grafo cujos vértices são os sítios de S e dois vértices são ligados por uma aresta se as regiões correspondentes compartilham uma aresta. Consideremos agora o diagrama obtido ao representarmos estas arestas por segmentos de retas. Chamaremos este diagrama de o[1] *diagrama de Delaunay* de S (cf. [3]) e o denotaremos por $\mathrm{Del}(S)$. A Figura 9 mostra o diagrama de Delaunay correspondente ao diagrama de Voronoi da Figura 4.

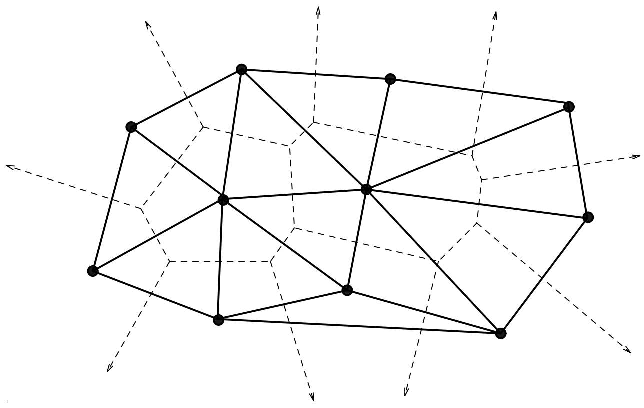

Figura 9. O diagrama de Delaunay do conjunto S da Figura 4.

Teorema 7. *Seja $S = \{p_1, \dots, p_n\}$. O diagrama de Delaunay de S é uma realização de um grafo planar.*

Para provarmos o Teorema 7 precisaremos do seguinte lema:

Lema 1. *Sejam pq e rs segmentos que se intersectam em um único ponto o. Existe um círculo que contém p e q e não contém r e s se e somente se $\angle(qrp) + \angle(qsp) < \pi$ (equivalentemente, $\angle(rqs) + \angle(rps) > \pi$).*

Prova. Suponhamos que exista um círculo C que contém p e q e não contém r e s. Podemos assumir que p e q estão na fronteira de C. Sejam r' e s' as intersecção de rs com C (veja Figura 10). Então $\angle(qrp) + \angle(qsp) < \angle(qr'p) + \angle(qs'p) = \pi$. Reciprocamente, se $\angle(qrp) + \angle(qsp) < \pi$ então existem pontos r' e s' sobre o segmento rs tal que $\angle(qr'p) + \angle(qs'p) = \pi$. Estes pontos, juntamente com p e q determinam um círculo que não contém r e s. ∎

[1] O artigo definido é conseqüência da nossa hipótese de não haver em S quatro sítios cocirculares—considere os sítios que são vértices de um quadrado.

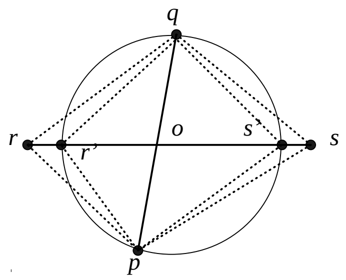

FIGURA 10. Círculo contendo p e q e excluindo r e s.

Prova do Teorema 7. Precisamos provar que as arestas de $\mathrm{Del}(S)$ não se intersectam a não ser nos vértices. Suponhamos que pq e rs sejam duas arestas de $\mathrm{Del}(S)$ que se intersectam em um ponto o. Como $V(p)$ e $V(q)$ compartilham uma aresta de Voronoi então existe um círculo contendo p e q que exclui r e s (cf. Teorema 4). Pelo lema anterior isto implica que $\angle(qrp) + \angle(qsp) < \pi$. Logo, $\angle(rqs) + \angle(rps) > \pi$ o que implica (ainda pelo lema anterior) que não existe um círculo contendo r e s que exclua p e q. Portanto, pelo Teorema 4, $V(r)$ e $V(s)$ não possuem uma aresta em comum. ∎

Contruiremos um conjunto de triângulos

$$\mathcal{T}(S) := \{T(v) \mid v \text{ é um vértice de Voronoi de } \mathrm{Vor}(S)\}$$

tal que os seus interiores sejam disjuntos e cada ponto no interior de $\mathrm{conv}(S)$ pertence a um destes triângulos.

Seja v um vértice de Voronoi e sejam $p_{v,1}, p_{v,2}, p_{v,3}$ os sítios de S tal que $V(p_{v,1}), V(p_{v,2})$ e $V(p_{v,3})$ são as três regiões de $\mathrm{Vor}(S)$ que compartilham o vértice v (cf. Teorema 2). (Veja Figura 11.) Definimos $T(v)$ como sendo o triângulo cujos vértices são $p_{v,1}, p_{v,2}, p_{v,3}$. Temos que $T(v)$ é um triângulo do diagrama de Delaunay e $T(v) \subseteq \mathrm{conv}(S)$ para todo vértice de Voronoi v, (prova deste fato usa o Teorema 4).

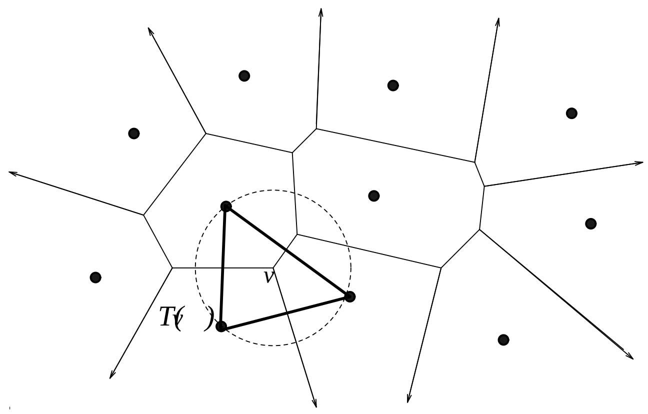

FIGURA 11. O triângulo $T(v)$ correspondente ao vértice de Voronoi v.

Teorema 8. *Sejam v e u vértices distintos de Vor(S). Então os interiores de $T(v)$ e $T(u)$ são disjuntos.*

Prova. Considere agora dois triângulos $T(v_1)$ e $T(v_2)$ de $\mathcal{T}(S)$, $v_1 \neq v_2$. Mostraremos que os interiors de $T(v_1)$ e $T(v_2)$ não se intersectam. Se $C(v_1)$ e $C(v_2)$ são disjuntos então $T(v_1)$ e $T(v_2)$ também são disjuntos. (Lembremos que $C(v)$ denota o círculo que tem $p_{v,1}, p_{v,2}$ e $p_{v,3}$ na fronteira.) Assuma então que $C(v_1)$ e $C(v_2)$ se intersectam. Pelo Teorema 3 temos que $C(v_1) \not\subset C(v_2)$ e $C(v_2) \not\subset C(v_1)$. Assim a fronteira de $C(v_1)$ e $C(v_2)$ se intersectam em dois pontos q_1 e q_2. Seja l a reta determinada pelo segmento q_1q_2; esta reta também separa v_1 de v_2. (Veja Figura 12.) Afirmamos que l também separa o interior de $T(v_1)$ do interior de $T(v_2)$. De fato, assuma, por contradição, que existe um ponto de $T(v_1)$ no lado de l onde esta v_2. (Veja a área sombreada da Figura 12.) Como $T(v_1) \subset C(v_1)$ temos então que um vértice de $T(v_1)$ está no interior de $C(v_2)$ o que contradiz o Teorema 3. Logo, os interiores de $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são disjuntos. ∎

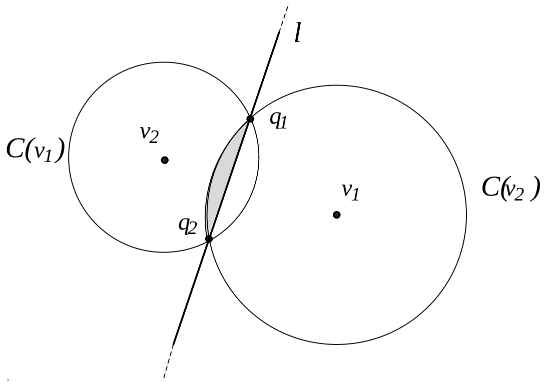

FIGURA 12. Não existe ponto de $T(v_1)$ no interior da região sombreada.

Teorema 9. *Seja pq uma aresta do diagrama de Delaunay e seja $r \in S$. Então os sítios p, q e r formam um triângulo de $\mathcal{T}(S)$ se e somente se $\angle(prq)$ é máximo dentre todos os ângulos da forma $\angle(psq)$, onde $s \in S$ está no mesmo semiplano de r em relação a pq.*

Prova. Suponhamos que $s \in S$ está no mesmo semiplano de r em relação a pq e que $\angle(psq) > \angle(prq)$. Então s é interior ao círculo contendo p, q e r na fronteira, o que contradiz o fato de $\triangle(p, q, r)$ ser um triângulo de $\mathcal{T}(S)$. (Veja Figura 13.) ∎

Teorema 10. *Os triângulos em $\mathcal{T}(S)$ cobrem o fecho convexo dos sítios em S.*

Prova. Notemos primeiro que $T(v) \subset \text{conv}(S)$, o que implica que a união dos triângulos em $\mathcal{T}(S)$ está contida em conv(S).

Se p_ip_j é segmento na fronteira de conv(S) então p_ip_j é uma aresta do diagrama de Delaunay (isto segue do Teorema 4).

Toda arestas p_ip_j do diagrama de Delaunay Del(S) delimita uma ou duas regiões. Se p_ip_j delimita uma região do diagrama então existe um triângulo

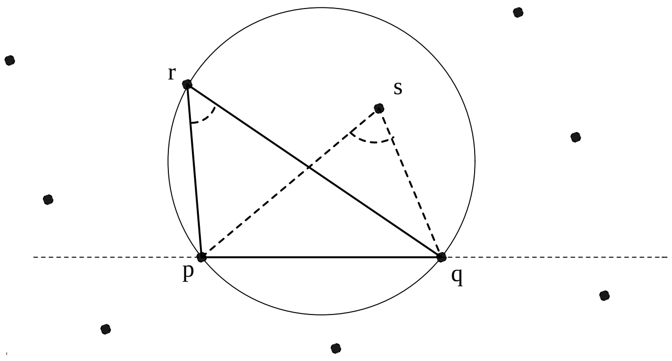

Figura 13. O triângulo $\triangle(p, q, r)$ pertence a $\mathcal{T}(S)$.

em $\mathcal{T}(S)$ incidente a $p_i p_j$: o triângulo formado por p_i, p_j e pelo sítio p_k que máxima o ângulo $\angle(p_i p_k p_j)$ (cf. Teorema 9). Se $p_i p_j$ não fizer parte da fronteira de conv(S) então existem dois triângulos de $\mathcal{T}(S)$ incidentes a $p_i p_j$, novamente determinados pelos sítios que formam ângulos máximos com $p_i p_j$; um em cada semiplano determinado pela reta que contém $p_i p_j$.

Seja agora p um ponto arbitrário de conv(S). Pelo que foi exposto acima sabemos que se p pertence a alguma aresta de Del(S) então p pertence a algum triângulo de $\mathcal{T}(S)$. Assim podemos supor que p não pertence a uma aresta de Del(S). Seja l uma semi-reta que tenha a sua extremidade em p e não contenha nenhum outro sítio de S. Seja $p_i p_j$ a 'primeira' arestas de Del(S) que tem intersecção não vazia com l. (Veja Figura 14.) Afirmamos que p pertence ao triângulo T de $\mathcal{T}(S)$ formado pela aresta $p_i p_j$ e pelo sítio p_k tal que $\angle(p_i p_k p_j)$ seja máximo. De fato, se p não pertence a T então a semi-reta l deveria intersectar alguma outra aresta de $T4$ e não somente $p_i p_j$. Este ponto de intersecção seria necessariamente anterior ao ponto de intersecção com $p_i p_j$, o que contradiz a escolha da aresta $p_i p_j$. Desta forma temos que os triângulos em $\mathcal{T}(S)$ cobrem conv(S). ∎

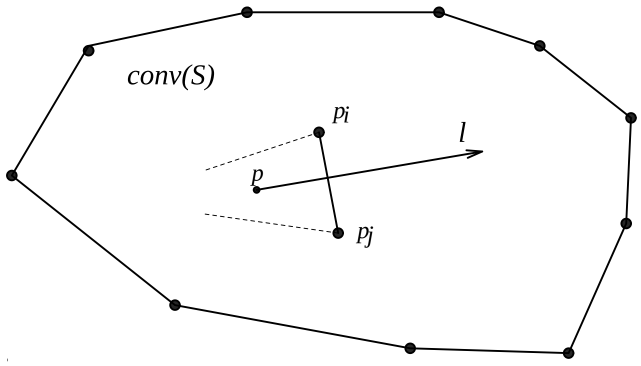

Figura 14. Ilustração da prova do Teorema 10.

Em 1934, B. Delaunay mostrou que o diagrama Del(S) produz uma triangularização do conjunto S de sítios. Esta triangularização é chamada de *triangularização de Delaunay* de S.

Teorema 11. *(Delaunay [2]) O diagrama de Delaunay é uma triangularização do conjunto de sítios S.*

Prova. Cada triângulo de $\mathcal{T}(S)$ é formado por arestas do diagrama de Delaunay de S. Pelo Teorema 8 a intersecção entre os interiores de dois triângulos distintos de $\mathcal{T}(S)$ é vazia e pelo Teorema 10 os triângulos em $\mathcal{T}(S)$ cobre conv(S). Logo as regiões (faces) limitadas do diagrama de Delaunay formam triângulos com interiores disjuntos que cobrem conv(S). ∎

Corolário 1. *O diagrama de Voronoi um conjunto S de n sítios tem no máximo $2n-5$ vértices e $3n-6$ arestas.*

Prova. Cada aresta do diagrama de Delaunay Del(S) corresponde a uma única arestas de Voronoi de Vor(S). Como Del(S) é uma triangularização de S temos, pela Fórmula de Euler, que Del(S) tem no máximo $3n-6$ arestas e $2n-4$ faces. Logo o número de arestas de Voronoi de Vor(S) é no máximo $3n-6$ e o número de vértices de Voronoi é no máximo $2n-5$ (a face ilimitada de del(S) não corresponde a um vértice de Voronoi). ∎