3. Propriedades do diagrama de Voronoi

Neste seção listaremos algumas propriedades importantes de diagramas de Voronoi. Assumiremos que $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ é o conjunto dado de sítios.

Teorema 1. *Cada região de Voronoi $V(p_i)$ é conexa.* ∎

Teorema 2. *Se v é um vértice de Voronoi (i.e. vértice de um diagrama de Voronoi) então v está na intersecção de três arestas de Voronoi (i.e. v está na junção de três regiões de Voronoi).*

Prova. Um vértice de Voronoi é uma intersecção de arestas de Voronoi. Sejam $e_0, e_1, \dots, e_{k-1}$ $(k \geq 3)$ as arestas, em sentido anti-horário, incidentes a um vértice v (veja Figura 5). A aresta e_i é compartilhada pelos polígonos $V(p_{i-1})$ e $V(p_i)$ $(i = 0, 1, \dots, k-1)$. Como v pertence a e_i então v é eqüidistante a p_{i-1} e p_i $(i = 0, \dots, k-1)$. Logo v é eqüidistante a $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ e portanto estes pontos são cocirculares. Como assumimos que em S não existem quatro pontos cocirculares temos que $k \leq 3$. Suponha $k = 2$. Então e_0 e e_1 são arestas compartilhadas por $V(p_0)$ e $V(p_1)$ e ambas as arestas pertencem a reta mediatriz do segmento p_1p_2 e portanto e_0 e e_1 não se intersectam no vértice v, uma contradição. Logo $k = 3$ e v está na intersecção de três arestas. ∎

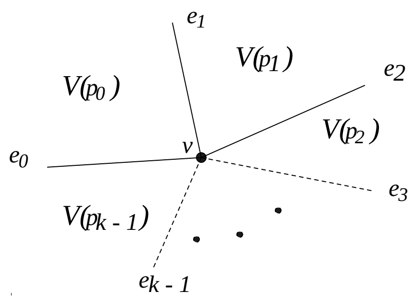

Figura 5. Arestas de Voronoi incidentes a um vértice de Voronoi.

O teorema acima é equivalente ao fato de que se v é um vértice de Voronoi na junção das regiões de Voronoi $V(p_1)$, $V(p_2)$ e $V(p_3)$ então v é o centro de um círculo $C(v)$ determinado por p_1, p_2 e p_3.

Teorema 3. *Para cada vértice de Voronoi v o interior do círculo $C(v)$ não contém sítio algum. (Observe que a fronteira contém exatamente três sítios.)*

Prova. Sejam p_1 p_2 e p_3 os três pontos de S determinando o círculo $C(v)$. Se $C(v)$ contém outro sítio, digamos p_4, então v é mais-próximo de p_4 do que de p_1, p_2 e p_3. Uma contradição, pois assumimos que v era um ponto comum a $V(p_1), V(p_2)$ e $V(p_3)$. (Veja Figura 6.) ∎

Note que o teorema acima estabelece uma relação bijetora entre centro de círculos contendo três sítios na fronteira e vértices de Voronoi. Isto nos fornece um algoritmo para encontrarmos todos os vértices de voronoi de $\mathrm{Vor}(S)$ para um dado conjunto S: para toda tripla de sítios (p_i, p_j, p_k), $1 \leq i < j < k \leq n$, se o círculo que contém p_i, p_j e p_k na sua fronteira não contém nenhum outro sítio em seu interior então o centro do círculo é um vértice de Voronoi.

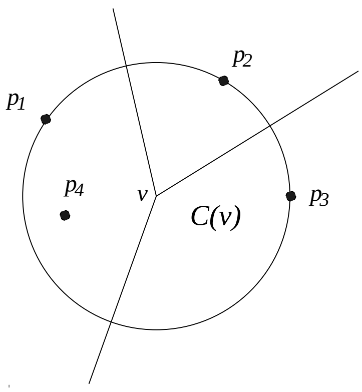

FIGURA 6. O círculo $C(v)$ não contém sítios em seu interior.

Teorema 4. *Sejam p_i e p_j dois sítios de S, $i \neq j$. As regiões $V(p_i)$ e $V(p_j)$ possuem uma aresta em comum se e somente se existe um círculo contendo p_i e p_j tal que todos os demais sítios de S são exteriores ao círculo.*

Prova. Os polígonos $V(p_i)$ e $V(p_j)$ possuem uma aresta em comum se e somente se existem pontos que são equidistantes de p_i e p_j e além disso são mais-próximos de p_i e p_j do que qualquer outro sítio de S. Isto implica que $V(p_i)$ e $V(p_j)$ têm uma aresta em comum se e somente se existe um círculo que contém p_i e p_j e exclui todos os outros demais sítios (considere um círculo $C(x)$ com centro em um ponto x no interior da aresta compartilhada por $V(p_i)$ e $V(p_j)$ e com raio $\text{dist}(x, p_i) = \text{dist}(x, p_j)$). ∎

Teorema 5. *Todo sítio mais-próximo de um sítio p_i de S determina uma aresta de Voronoi do polígono $V(p_i)$.*

Prova. Seja p_j um sítio mais-próximo de p_i e seja v o ponto do meio do segmento $p_i p_j$. Mostraremos que v pertence a $V(p_i)$. Suponha por contradição que v não pertence a $V(p_i)$. Neste caso temos que o segmento $p_i v$ intersecta alguma aresta de $V(p_i)$, digamos que a aresta contida na mediatriz de $p_i p_k$ em um ponto u. (Veja Figura 7.) Assim temos que $\text{dist}(p_i, u) < \text{dist}(p_i, v)$ e portanto $\text{dist}(p_i, p_k) \leq 2\text{dist}(p_i, u) < 2\text{dist}(p_i, v) = \text{dist}(p_i, p_j)$, uma contradição. Logo o círculo com centro em v e raio $\text{dist}(p_i, v)$ não contém nenhum sítio além de p_i e p_j e portanto, pelo Teorema 4, os polígonos $V(p_i)$ e $V(p_j)$ possuem uma aresta em comum. ∎

Teorema 6. *A região de Voronoi $V(p_i)$ é limitada se e somente se p_i pertence ao interior do fecho convexo de S ($conv(S)$).*

Prova. Suponhamos que p_i pertence ao interior de $\text{conv}(S)$. Então existem sítios p_1, p_2 e p_3 em S tais que p_i pertence ao interior do triângulo $\triangle(p_1, p_2, p_3)$. Consideremos os círculos $C_{1,2}, C_{1,3}$ e $C_{2,3}$ determinados por p_i e cada um dos três pares de sítios $\{p_1, p_2\}$, $\{p_1, p_3\}$ e $\{p_2, p_3\}$, respectivamente. (Veja Figura 8.) Cada um deste círculos tem raio finito. Seja $A_{j,k}$ o arco circular entre na fronteira de $C_{j,k}$ entre p_j e p_k que não contém p_i ($1 \leq j < k \leq 3$). Seja c um círculo que contém $C_{1,2}, C_{1,3}$ e $C_{2,3}$. Seja C um círculo contendo $C_{1,2}, C_{1,3}$ e $C_{2,3}$. Afirmamos que todo ponto x exterior

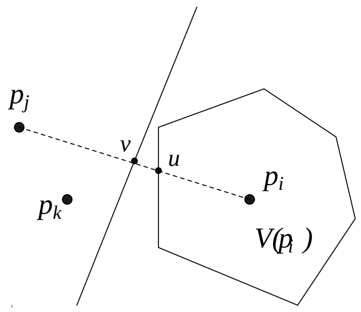

FIGURA 7. Cada sítio mais próximo de p_i determina uma aresta de $V(p_i)$.

a C está mais perto de um dos sítios p_1, p_2 e p_3 do que do sítio p_i. De fato, considere o segmento xp_i para algum ponto x que não pertença a C. Pelo Teorema de Jordan temos que xp_i intersecta um dos lados do triângulo $\triangle(p_1, p_2, p_3)$, digamos p_1p_2. Logo xp_i intersecta $A_{1,2}$ em um ponto u que está mais próximo de p_1 ou p_2 do que de p_i. Temos assim que todo ponto x externo a C é mais-próximo de um dos sítios p_1, p_2, p_3 do que de p_i, o que implica que a região $V(p_i)$ está contida em C e portanto é limitada.

Reciprocamente, suponha que a região $V(p_i)$ é limitada (i.e. $V(p_i)$ é um polígono) e sejam $e_1, e_2, \ldots, e_k$ ($k \geq 3$) as arestas de $V(p_i)$ listadas em sentido anti-horário. Cada aresta e_j ($j = 1, \ldots, k$) está contida em alguma mediatriz de um segmento $p'_j p_i$, $p'_j \in S$. Assim temos que p_i é um vértice no interior de conv$\{p'_1, p'_2, \ldots, p'_k\}$. ∎

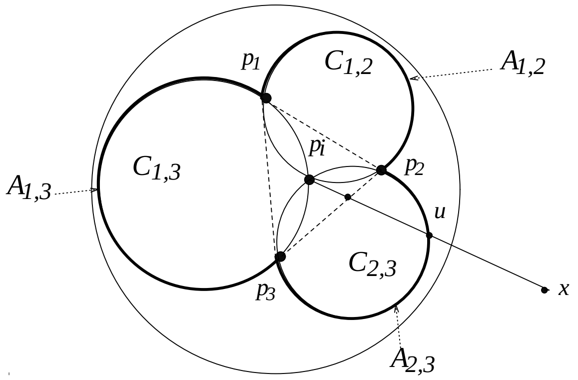

FIGURA 8. Como p_i é um ponto do interior de conv(S) temos que a região $V(p_i)$ é limitada.