## 2. Definições

Seja $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ um conjunto de pontos em $E^2$ (espaço Euclidiano de dimensão dois). Os pontos em $S$ serão chamados de *sítios*. A *região de Voronoi* $V(p_i)$ do sítio $p_i$ consiste de todos pontos do plano que estão tão próximos de $p_i$ quanto de qualquer outro sítio em $S$, ou seja:

$$V(p_i) := \{x \mid \operatorname{dist}(p_i, x) \leq \operatorname{dist}(p_j, x) \text{ para } j = 1, \ldots, n\},$$

onde $\operatorname{dist}(p, q)$ denota a distância (Euclidiana) entre dois pontos $p$ e $q$ de $E^2$. $V(p_i)$ também é chamado de *polígono de Voronoi associado a* $p_i$ (cf. [9]). Abaixo chamaremos $V(p_i)$ de um polígono de Voronoi mesmo que $V(p_i)$ for uma região não-limitada (nesse caso algumas arestas de $V(p_i)$ podem ser semi-retas). A Figura 1 mostra um exemplo de uma região de Voronoi.

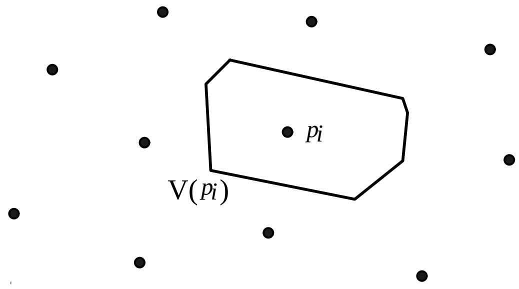


Figura 1. Exemplo de uma região (polígono) de Voronoi.

Observemos que alguns pontos do plano têm mais do que um sítio mais-próximo (pertencem a mais de uma região de Voronoi). Os pontos do plano que têm mais do que um sítio mais-próximo formam o *diagrama de Voronoi* do conjunto $S$, denotado por $Vor(S)$. A Figura 2 mostra exemplos de diagramas de Voronoi.

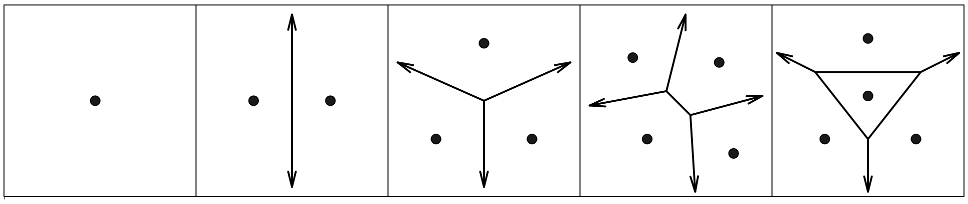

Figura 2. Alguns diagramas de Voronoi com até 4 sítios.

Para um par de sítios distintos $p_i$ e $p_j$ denotaremos por $B(p_i, p_j)$ a reta bisetora ortogonal ao segmento $p_ip_j$ (a reta mediatriz do segmento $p_ip_j$). Os pontos em $B(p_i, p_j)$ são equidistantes de $p_i$ e $p_j$. A Figura 3 mostra um diagrama de Voronoi para três pontos não colineares $p_1, p_2$ e $p_3$. Note que as retas mediatrizes se intersectam em um único ponto—o circuncentro da circunferência circuscrita ao triângulo $\triangle(p_1, p_2, p_3)$; i.e. centro da única circunferência que passa sobre os sítios $p_1$, $p_2$ e $p_3$.

Seja $H(p_i, p_j)$, $i \neq j$, o semiplano fechado com fronteira $B(p_i, p_j)$ e contendo o sítio $p_i$. Logo, $H(p_i, p_j)$ é o conjunto dos pontos do plano que estão

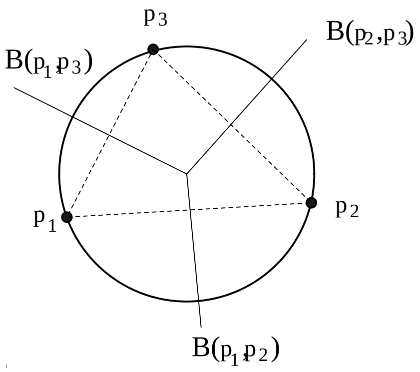


Figura 3. As retas mediatrizes $B(p_1, p_2)$, $B(p_1, p_3)$ e $B(p_2, p_3)$ se intersectam no centro da circunferência.

tão próximos de $p_i$ quanto de $p_j$. Como $V(p_i)$ é o conjunto dos pontos do plano que estão tão próximos de $p_i$ quanto de qualquer outro sítio em $S$ temos então que:

$$V(p_i) = \cap_{j \neq i} H(p_i, p_j),$$

onde a intersecção é tomada sobre todo $j$ tal que $j \neq i$. Desta igualdade concluímos uma propriedade importante dos diagramas de Voronoi: cada região de Voronoi é convexa (já que a intersecção de conjuntos convexo é um conjunto convexo). Quando a região é limitada ela forma um polígono convexo. As arestas das regiões são chamadas de *arestas de Voronoi* e os vértices de *vértices de Voronoi*. Observe que um ponto no interior de uma aresta de Voronoi tem dois sítios mais-próximos e um vértice de Voronoi tem pelo menos três sítios mais-próximos.

Ao longo de toda a discussão que faremos será assumido que nenhum subconjunto de quatro pontos de $S$ são cocirculares (pertencem a uma mesma circunferência).

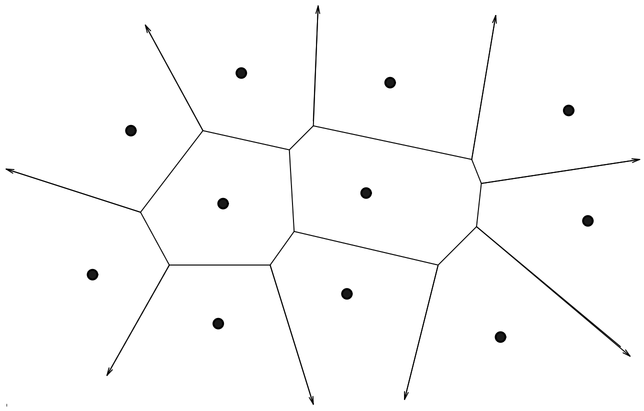

Figura 4. O diagrama de Voronoi de um conjunto $S$ de pontos do plano.