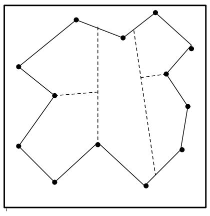
MAC 747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

PARTIÇÃO DE POLÍGONOS EM POLÍGONOS CONVEXOS

1. Introdução



Além de algoritmos eficientes para particionar um polígono em triângulos, também é de interesse o desenvolvimento de algoritmos que particionem um polígono em (digamos) polígonos monótonos, trapezóides e polígonos convexos. Uma motivação para particionarmos um polígono em partes (polígonos) convexos é reconhecimento de caracteres: um caractere pode ser representado como um polígono particionado em partes convexas.

A partição de polígonos em triângulos pode ser vista como um caso particular do problema de particionarmos um polígono em partes convexas.

Ao particionarmos um polígono em partes convexas estaremos interessados em minimizar o número de partes e construir esta partição o mais rápido possível.

Existem dois tipos de partições de um polígono P: (i) partições por diagonais, e (ii) partições por segmentos (os pontos extremos dos segmentos não são necessariamente vértices de P—mas devem pertencer a ∂P).

2. Limites

Para analisarmos a qualidade (em termos de número de partes) de um partição é útil conhecermos limites inferiores e superiores para o menor número possível de partes em uma partição.

Teorema 1. *Seja Φ o menor número de partes convexas que um polígono pode ser particionado. Para um polígono com r vértices reflexos temos que*

$$\lceil r/2 \rceil + 1 \leq \Phi \leq r + 1.$$

Prova. A prova de que $\Phi \leq r + 1$ é algorítmica.
Algoritmo Particiona (P).

1. Se P não tem vértices reflexos então **pare**. [Neste caso P já é convexo.]
2. Seja v um vértice reflexo de P.
3. Trace um segmento $s \subset P$ tendo v como uma das extremidades e a outra extremidade em ∂P que elimine este vértice reflexo.
4. Aplique o algoritmo recursivamente aos dois polígonos formados.

O número de partes convexas produzidos pelo algoritmo acima é no máximo $r + 1$. (Veja Figura 1.)

Date: 22 de setembro de 1997.

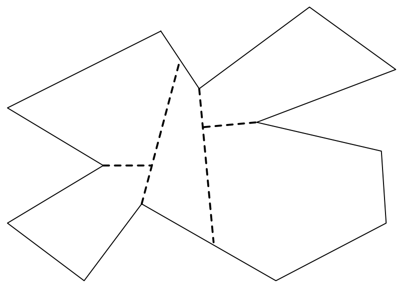


FIGURA 1. O algoritmo criou $r + 1$ partes convexas ($r = 4$).

Todos os ângulos reflexos precisam ser destruídos para produzirmos partes convexas. No máximo dois desses ângulos podem ser eliminados pela inclusão de um único segmento. Logo $\Phi \geq \lceil r/2 \rceil + 1$. (Veja Figura 2.) ∎

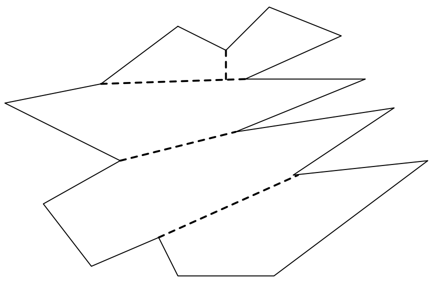


FIGURA 2. $\lceil r/2 \rceil + 1$ partes convexas ($r = 7$).

3. Algoritmo de Hertel e Mehlhorn

Hertel e Mehlhorn [5] desenvolveram um algoritmo de aproximação de complexidade de tempo linear para particionar um polígono em partes convexas por diagonais.

Em uma partição convexa de um polígono por diagonais diremos que um diagonal d é essencial para um vértice v se a remoção de d cria uma parte que é não-convexa em v (v é um vértice reflexo e d é incidente a v).

O algoritmo de Hertel e Mehlhorn consiste em: construa uma triangularização de P; remova arbitrariamente diagonais não-essenciais até que todas as diagonais restantes sejam essenciais. Este algoritmo particiona um polígono em partes convexas em tempo linear (se usarmos o algoritmo de Chazelle [2] para triangularização de polígonos).

Lema 1. *Existem no máximo duas diagonais essenciais para cada vértice reflexo.*

Prova. Seja v um vértice reflexo e v_+ e v_- os vértices adjacentes a ele. Existe no máximo uma diagonal essencial no semiplano H_+ à esquerda de (v, v_+); se existirem duas a que está mais perto de (v, v_+) pode ser removida sem criarmos um vértice não-convexo em v. (Veja Figura 3.) Analogamente, existe no máximo uma diagonal essencial no semiplano H_- à esquerda de

(v,v). Juntos esses semiplanos cobrem o ângulo interior formado pelas aresta vv_- e vv_+. Logo existem no máximo duas diagonais essencias para v. ∎

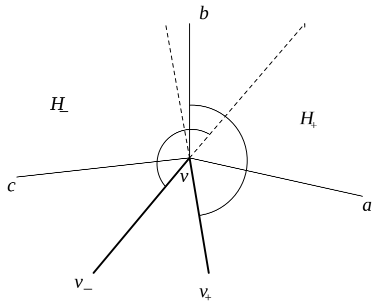


FIGURA 3. Diagonais essencias. A diagonal a é não-essencial pois b também está em H_+. Analogamente, c é não-essencial.

Teorema 2. *O algoritmo de Hertel-Mehlhorn fornece uma partição que nunca tem mais do que quatro vezes o número de partes convexas de uma partição ótima por diagonais (i.e. uma partição por diagonais com o número mínimo de partes).*

Prova. Quando o algoritmo para, toda diagonal é essencial para algum vértice (reflexo). Pelo Lema 1, cada vértice reflexo pode ser responsável por no máximo duas diagonais essenciais. Logo, o número de diagonais essenciais não pode ser maior do que $2r$, onde r é o número de vértices reflexos (pode ser menor se alguma diagonal for essencial para ambos os seus vertices extremos). Logo o número M de partes convexas produzidas pelo algoritmo satisfaz $2r + 1 \geq M$. Como $\Phi \geq \lceil r/2 \rceil + 1$ pelo Teorema 1, então $4\Phi \geq 2r + 4 > 2r + 1 \geq M$. ∎

4. Notas

O primeiro algoritmo para encontrar uma partição ótima de um polígono em partes convexas é devido a Greene [4]: a complexidade de tempo deste algoritmo é $O(r^2n^2) = O(n^4)$. Isto foi melhorado por Keil [6] que desenvolveu um algoritmo de complexidade de tempo $O(r^2 n \log n) = O(n^3 \log n)$. (Ambos utilizavam programação dinâmica.)

Se a partição pode ser formada por segmentos arbitrários o problema é mais difícil ainda (a partição pode usar segmentos cujos extremos não intersectam a fronteira do polígono—estes pontos extremos são chamados de *Steiner points*). Em 1980, em sua tese de doutorado, Chazelle [1] resolveu este problema propondo um algoritmo de complexidade de tempo $O(n+r^3) = O(n^3)$. (Veja também Chazelle & Dobkin [3].)

O que foi tratado nestas páginas foi extraído do Capítulo 1 de [7] e Capítulo 2 de [8].

Referências

1. B. Chazelle, *Computational geometry and convexity*, Ph.D. thesis, Yale University., 1980.

2. ———, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete and Computational Geometry **6** (1991), 485–524.
3. B. Chazelle and D.P. Dobkin, *Optimal convex decompositions*, J. ACM **34** (1987), 1–27.
4. D.H. Greene, *The decomposition of polygons in convex parts*, Advances in Computing Research (F.P. Preparata, ed.), JAI Press, 1983, pp. 235–259.
5. S. Hertel and K. Mehlhorn, *Fast triangulation of simple polygons*, Proc. 4th Internat. Conf. Found. Comput. Theory, Lecture Notes in Computer Science, vol. 158, 1983, pp. 207–218.
6. J.M. Keil, *Decomposing a polygon into simpler components*, SIAM J. Comp. **14** (1985), 799–817.
7. J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.
8. ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.