3. Intersecção de semiplanos

Trataremos nesta seção do *Problema da Intersecção de Semiplanos*: *dados*: semiplanos $h_1, h_2, \ldots, h_n$; *encontrar:* a intersecção destes semiplanos.

A construção de da intersecção de n semiplanos consiste em encontrar a região do plano que é solução de um sistema formado por n desigualdades lineares da forma

$$a_i x + b_i y \leq c_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

(Cada semiplano é dado através de uma tripla de números (a, b, c).) Uma solução do sistema acima é chamada de uma *solução viável*, e a região do plano formada pelas soluções viaveis é a *região viável*. (A Figura 8 ilustra as definições.) O tipo de saída que desejamos de um algoritmo que resolva o problema é um polígono (estamos aqui chamando de polígono uma região do plano determinada por semiretas e segmentos de reta—i.e. é possível que a região seja infinita).

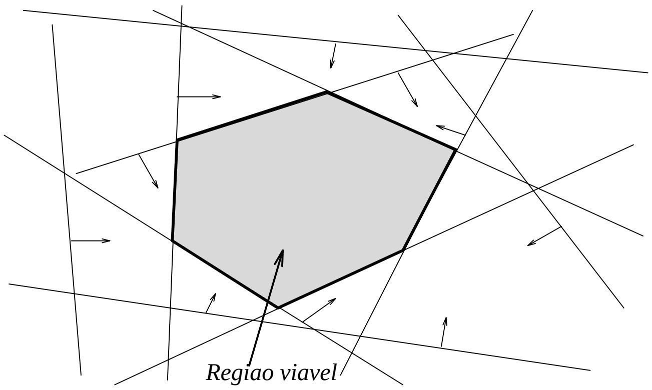

Figura 8. A região viável formada por um conjunto de semiplanos.

Existe uma algoritmo (incremental) quadrático simples para calcular a intersecção de semiplanos. O passo básico do algoritmo consiste do seguinte. Assuma que já construímos a intersecção dos primeiros k semiplanos $h_1, \ldots, h_k$. A região viável correspondente a estes k semiplanos é um subconjunto convexo do plano contendo no máximo k arestas limitado por no máximo k arestas. Para obtermos a intersecção desta região com o semiplano h_{k+1} basta obtermos os pontos de interseção das arestas da região com a reta que determina o semiplano h_{k+1} (temos dois ou zero pontos de intersecção). A partir destes no máximo dois pontos de intersecção podemos obter a região viável corresponte aos semiplanos $h_1, \ldots, h_k, h_{k+1}$. Este passo pode ser feito em tempo $O(k)$. Logo a complexidade deste algoritmo é $O(n^2)$.

Nesta seção estudaremos um algoritmo de divisão-e-conquista que constrói a intersecção de n semiplanos em tempo ótimo $O(n \log n)$.

Observação. O material desta seção foi extraído do Capítulos 8 de [1] e Capítulo 7 de [4].

3.1. **Cota inferior.** Antes de apresentarmos um algoritmo ótimo para o Problema da Intersecção de Semiplanos observaremos aqui que este problema tem cota inferior $\Omega(n \log n)$. Para isto nós mostraremos uma redução que em tempo linear transforma o Problema de Ordenação (que sabemos ter cota inferior $\Omega(n \log n)$) ao Problema da Interseção de Semiplanos. Dados números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, uma instância do Problema de Ordenação, seja h_i o semiplano contendo a origem e definida pela reta tangente ao ponto (x_i, x_i^2) da parábola $y = x^2$, i.e. a reta $y = 2x_i x - x_i^2$ (veja Figura 9). A intersecção desses semiplanos é a região convexa cujas arestas estão ordenadas pelo seu ângulo polar. Uma vez que esta região viável é formada podemos obter os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em ordem crescente em tempo linear (nós devemos simplesmente percorrer a fronteira da região). Note que estamos usando aqui que a região viável correspondente aos semiplanos $h_1, h_2, \ldots, h_n$ devolvida por um algoritmo para o Problema da Intersecção de Semiplanos deve ter uma certa estrutura, e.g. deve ser um cadeia (linha poligonal).

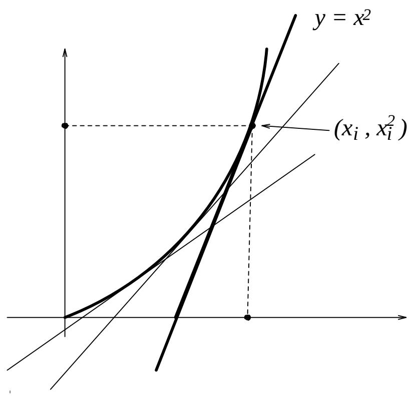

FIGURA 9. Ilustração da redução do Problema de Ordenação ao Problema da Intersecção de Semiplanos.

3.2. **O algoritmo.** Denotaremos por H o conjunto dado $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ de semiplanos e por $I(H)$ a região viável determinada pelos semiplanos em H. É possível aplicarmos facilmente o método de divisão-e-conquista para o Problema da Intersecçaõ de Semiplanos pois intersecção é associativa. Assim temos que

$$I(H) = (h_1 \cap h_2 \cap \cdots \cap h_k) \cap (h_{k+1} \cap \cdots \cap h_n),$$

para $k = 1, \ldots, n-1$. Logo, para qualquer partição de H em subconjunto não vazios H_1 e H_2 temos que

$$I(H) = I(H_1) \cap I(H_2).$$

Portanto para construirmos $I(H)$ usando o método da divisão-e-conquista, nós primeiro particionamos H em subconjunto H_1 e H_2 com aproximadamente o mesmo número de semiplanos (i.e. $\lceil n/2 \rceil$ e $\lfloor n/2 \rfloor$) e então construimos recursivamente $I(H_1)$ e $I(H_2)$. No passo `Combinar` construímos $I(H_1) \cap I(H_2)$. Na base da recursão ($n = 1$) nós simplesmente retornamos o semiplano em H. Abaixo encontra-se uma descrição do algoritmo.

Algoritmo `Intersecção-de-Semiplanos`(H).
`Entrada:` Um conjunto H com $n \geq 1$ semiplanos.
`Saída:` A intersecção $I(H)$ de todos os semiplanos em H.
1. **if** $n = 1$
2.   **then return** o semiplano em H.
3.   **else**
4.   `(Divisão)` Particione H em subconjuntos H_1 e H_2 com aproximadamente o mesmo tamanho.
5.   `(Conquista)` Construa recursivamente $I(H_1)$ e $I(H_2)$.
6.   `(Combinar)` Construa $I(H) = I(H_1) \cap I(H_2)$.
7.   **return** $I(H)$.

Note que o passo `Combinar` pode ser feito em tempo linear por uma pequena variação do Algoritmo `Intersecção-de-Polígonos-Convexos`.

3.3. **Análise do algoritmo.** Se $T(n)$ denota a função complexidade de tempo do Algoritmo `Intersecção-de-Semiplanos` então nós temos que $T(1)$ é constante e

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + cn,$$

onde c é uma constante. Logo $T(n) = O(n \log n)$ e portanto o algoritmo acima é ótimo.

Teorema 3. *A intersecção de n semiplanos pode ser construída em tempo ótimo $O(n \log n)$.* ∎