2. Definições de convexidade e fecho convexo

Existem várias definições equivalentes de fecho convexo de um conjunto de pontos. Daremos aqui algumas dessas definições. Note que algumas dessas definições têm um natureza mais construtiva (algorítmica) e que algumas das definições serão dadas para o espaço Euclidiano d-dimensional E^d.

1. Um conjunto X em E^d é *convexo* se $x \in X$ e $y \in X$ implica que o segmento (fechado) $xy \subseteq X$. Note que um polígono com um vértice reflexo não é convexo. (Veja Figura 1.)

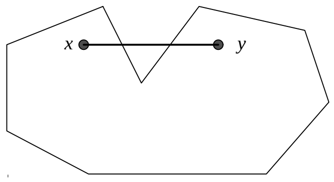

FIGURA 1. Um polígono com vértice reflexo não é convexo.

2. (Segmento do ponto de vista algébrico) Dados dois pontos distintos x e y em E^d o segmento xy é o conjunto dos pontos $\lambda x + (1-\lambda)y$, com $\lambda \geq 0$.
3. Uma *combinação convexa* de um conjunto de pontos $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ em E^d uma soma da forma $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k$, com $\alpha_i \geq 0$ (i=1, ... ,k) e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. Logo um segmento de reta consiste do conjunto de pontos que podem ser escritos como combinação convexa dos extremos do segmento e um triângulo consiste do conjunto de pontos que podem ser escritos como combinação convexa dos seus vértices.
4. O *fecho convexo* de um conjunto $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ de pontos em E^d é conjunto de todos os pontos que são combinação convexa dos pontos em S, ou seja,

$$\mathrm{conv}(S) := \{\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \text{ e } \alpha_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, k)\}.$$

5. (Teorema de Carathéodory) O fecho convexo de um conjunto S de pontos em E^d é o conjunto de todos os pontos que são combinação convexa de $d+1$ pontos de S. Logo, o fecho convexo de um conjunto de pontos no plano é o conjunto de combinações convexas dos seus subconjuntos de três pontos (se os pontos forem não colineares o fecho convexo desses três pontos é um triângulo).
6. O *fecho convexo* de um conjunto S de pontos é a intersecção de todos os conjuntos convexos contendo S. (Esta definição não depende de combinação convexa—logo é menos algébrica e mais *set-theoretical.*)
7. O *fecho convexo* de um conjunto S de pontos em E^d é a intersecção de todos os semi-espaços contendo S. Um semi-espaço no plano é um *semiplano.*
8. O *fecho convexo* de um conjunto S de pontos no plano é o menor polígono convexo contendo P que contém S; menor no sentido de que não existe outro polígono P' talque $P \supset P' \supseteq S$.
9. O *fecho convexo* de um conjunto S de pontos no plano é o polígono convexo P com menor área tal que $P \supseteq S$.

10. O fecho convexo de um conjunto S de pontos no plano é a união de todos os triângulos determinados por pontos em S.