5. Uma primitiva geométrica

Um triângulo é determinado por três pontos não colineares. Um vetor perpendicular a um dado plano π é chamado de um vetor *normal* ou *ortogonal* a π. Dados 3 pontos não-colineares p_0, p_1 e p_2 em um plano π, uma vetor normal a π é dado pelo produto vetorial $a \times b$ (ou $a \wedge b$), onde $a = p_1 - p_0$ e $b = p_2 - p_0$. Seja $a := (x_a, y_a, b_a)$ e $b := (x_b, y_b, z_b)$, o produto vetorial é definido por:

$$a \times b = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Para mostrarmos que o produto vetorial $a \times b$ é perpendicular ao plano gerado pelos vetores a e b basta verificarmos que $a \cdot (a \times b) = 0$ e $b \cdot (a \times b) = 0$.

A direção do produto vetorial é mostrada na Figura 7. Quando visto a partir do ponto determinado por $a \times b$, o triângulo $\triangle(\mathbf{0}, a, b)$ é orientado positivamente. O vetor normal tendo o mesmo comprimento mas direção oposta é dado por $-a \times b = b \times a$.

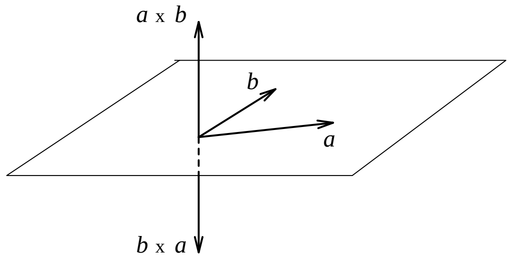

Figura 7. O produto vetorial $a \times b$.

Como já vimos se a e b pertencem ao plano xy, então o comprimento do produto vetorial é $||a \times b|| = |x_a y_b - y_a x_b|$, a área do parelelogramo com vértices $\mathbf{0}, a, b$ e $a + b$.

O plano determinado por um triângulo (orientado) divide o espaço em dois semi-espaços. O semi-espaço para onde o vetor normal ao triângulo está apontando é chamado de *semi-espaço positivo* do triângulo (pois os pontos deste semi-espaço vêem o triângulo orientado positivamente. O outro semi-espaço é chamado de *semi-espaço negativo*.

Dados pontos p_0, p_1, p_2 e p_3 em E^3 se estamos interessados em saber de qual lado do plano π, gerado pelos vetores $a := p_1 - p_0$ e $b := p_2 - p_0$, o ponto p_3 está, nós consideramos uma orientação de π dada pelo triâgulo orientado (digamos) $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ (o que nós estamos fazendo aqui é orientar o plano π através da sua base orientada (a, b)) e verificamos se o produto escalar entre $c := p_3 - p_0$ e o vetor $(a \times b)$ é: maior que zero; zero; ou menor que zero. Se $c \cdot (a \times b) > 0$ então o ponto p_3 está no semi-espaço positivo do triângulo $\triangle(p_0, p_1, p_2)$. Se $c \cdot (a \times b) = 0$ então o ponto p_3 está no plano π. Finalmente, se $c \cdot (a \times b) < 0$ então o ponto p_3 está no semi-espaço negativo do triângulo $\triangle(p_0, p_1, p_2)$. Logo, dados pontos p_0, p_1, p_2, p_3 em E^3, a operação primitiva `Teste-de-Orientação`(p_0, p_1, p_2, p_3) (ou `Left`(p_0, p_1, p_2, p_3)) decide em qual semi-espaço do plano orientado π (orientado pelo triângulo $\triangle(p_0, p_1, p_2)$), o ponto p_3 está. De maneira similar ao que vimos no caso bidimensional, se

$p_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ então o resultado do teste de orientação é dado pelo sinal do determinante

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor absoluto deste determinte é $1/6$ do volume sinalizado do tetraedro cujos vértices são (p_0, p_1, p_2, p_3). Chamaremos de `Volume6` a função que calcula o valor de seis vezes o volume do tetrahedro (em analogia a função `Area2`).

[**Observação.** A orientação descrita acima pode ser generalizada para uma dimensão d arbitrária. O que nós estamos fazendo aqui é orientar bases do espaço E^d da mesma maneira que isto é feito em um curso de Álgebra Linear.]