4. Fórmula de Euler

Em 1758, Leonard Euler notou uma regularidade no número de vértices, arestas, faces de um poliedro de genus zero: o número de vértices mais o número de faces é sempre igual ao número de arestas mais dois. A tabela abaixo mostra esta relação para os cinco sólidos Platônicos.

Nome	(p, r)	V	E	F
Tetraedro	$(3, 3)$	4	6	4
Cubo	$(4, 3)$	8	12	6
Octaedro	$(3, 4)$	6	12	8
Dodecaedro	$(3, 5)$	20	30	12
Icosaedro	$(5, 3)$	12	30	20

Se denotarmos, como é usual, o número de vértices, arestas e faces de um poliedro por V, E e F, respectivamente, então a fórmula abiaxo é conhecida como *Fórmula de Euler* (para poliedros de genus zero):

$$V - E + F = 2.$$

Observação. Os material desta seção foi extrído do Capítulo 4 de [10].

4.1. Prova da Fómula de Euler.

A prova consiste em três partes:

1. Transformar o poliedro em um grafo planar.
2. Um teorema para árvores.
3. Prova por indução.

Nós primeiro ‘achataremos’ a superfície do poliedro P através de consideráveis distorções. Remova de P uma face arbitrária f deixando um buraco na superfície. Imagine que a superfície do poliedro é feita de borracha muito fina (como uma bixiga) e aumente este buraco até que o poliedro P, sem a face f, seja planar (esteja contido em um plano). Desta maneira transformamos o 1-esqueleto do poliedro P em um grafo planar: um grafo desenhado no plano sem que duas arestas cruzem. Seja G este grafo planar. Temos que os vértices de P correspondem a vértices de G, as arestas de P correspondem a arestas de G. A face f de P corresponde a fronteira do grafo G. As faces de P, exceto f, correspondem as regiões do plano delimitadas por arestas de G. Essas regiões, juntamente com a região exterior de G que corresponde a face f de P, são chamadas de faces de G. A face correpondente a f é dita a *face exterior* de G. Figura 6 mostra um possível grafo correspondente ao processo de achatamento de um cubo.

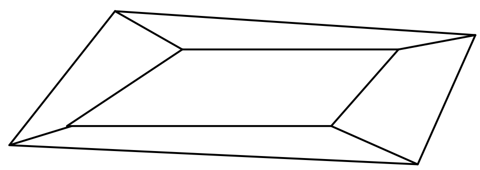

Figura 6. O 1-esqueleto de um cubo obtido pelo processo de achatamento.

Devido a correspondência bijetora entre vértice, arestas e faces de P e vértice, arestas e faces de G, respectivamente. Podemos nos concentrar em provar a Fórmula de Euler para grafos planares.

O segundo passo da prova é verificar que a Fórmula de Euler vale quando G é uma árvore. (Note que, neste caso, G não corresponde a nenhum poliedro, mas o importante é que isto será útil no próximo passo). Se g é uma árvore temos que $V = E + 1$, uma fato que assumimos, e $F = 1$, já que a única face de G é a exterior. Logo, temos que a Fórmula de Euler é válida para árvores.

O terceiro passo é provar, por indução no número E de arestas, que a Fórmula de Euler vale para qualquer grafo conexo planar G. Suponha que a Fórmula de Euler vale para todos os grafos conexos planares com no máximo $E - 1$ arestas, e seja G um grafo conexo planar com V vértices, E arestas e F faces. Se G é uma árvore estamos não há o que provar. Suponha que G tem um circuito C e seja e uma aresta deste circuito. Temos que o grafo $G' := G - \{e\}$ é conexo e tem V vértices, $E - 1$ arestas, e $F - 1$ faces (a duas faces de G incidentes a e correspondem a uma face de G'). Logo, pela hipótese de indução temos que

$$V - (E - 1) + (F - 1) = 2 = V - E + F.$$

O que conclui a nossa prova.

4.2. **Conseqüências: linearidade do número de arestas e faces.** A Fórmula de Euler implica que o número de vértices, arestas e faces de um poliedro são linearmente relacionados: se $n := V$, então $E = O(n)$ e $F = O(n)$. Isso nos será útil ao analisarmos os algoritmos que serão estudados.

Primeiro, como queremos estipular limites superiores para E e F em função de V, podemos assumir, sem perda de generalidade, que todas as faces de poliedro são triângulos (se as faces não são triângulos podemos triangulariza-las). Logo, o número E de arestas do poliedro é igual a $3F/2$. Assim temos que $2E = 3F$. Aplicando a Fórmula de Euler temos que

$$\begin{aligned} V - E + F = 2 \quad &\Rightarrow \quad V - E + 2E/3 = 2 \\ &\Rightarrow \quad V - 2 = E/3 \\ &\Rightarrow \quad E = 3V - 6 < 3V = O(n) \end{aligned}$$

e

$$F = 2E/3 \quad \Rightarrow \quad 2V - 4 < 2V = 2n = O(n).$$

Resumindo temos o seguinte teorema:

Teorema 1. *Em um poliedro com $n = V$ vértices, E arestas e F faces temos que, $V - E + F = 2$, $E = O(n)$ e $F = O(n)$.* ∎

[**Observação.** Um resultado relacionado ao teorema acima é o seguinde (veja Corollary 8.2 de [5]):

Teorema 2. *Seja P o fecho convexo de um conjunto de n pontos em E^d. O número de k-faces e o número de incidencias entre k faces e $k+1$-faces de P é $O(n^{\min\{\lfloor d/2 \rfloor, k+1\}})$, para $k = 0, \ldots, d-1$. Esses limites são assintóticamente apertados.* ∎]