3. Politopos regulares

Para continuar desenvolver mais a nossa intuição vamos discutir sobre o assunto que é tratado na Seção 1.2 de O'Rourke [10].

Um *polígono regular* é um que tem ângulos iguais em cada vértices e comprimento iguais de arestas. É claro que existem infinitos polígonos regulares: triângulo equilátero; quadrado; pentágono; hexágono; heptágono; etc.

Um extensão natural deste conceito de regularidade para o espaço tridimensional é considerarmos politopos regulares. Um *politopo regular* é um politopo onde as faces são polígonos regulares congruentes e o número de faces incidentes a cada vértices é o mesmo.

Ao contrário do que ocorre na versão bidimensional, existem somente cinco politopos regulares: os chamados *sólidos Platônicos*, pois isto é conhecido desde os tempos de Platão e aparece em seus escritos *Timaeus*.

A prova é elementar (uma outra prova pode ser obtida da Fórmula de Euler que será discutida na próxima seção). A intuição é que os ângulos internos de um polígono regular aumentam com o número de vértices, mas não existe muito espaço (no máximo 2π) para colocarmos esses ângulos ao redor de um vértice do poliedro.

Seja P um poliedro regular com p vértices em cada uma de suas faces (polígonos regulares). A soma do ângulo internos de uma face é igual a $(p-2)\pi$. Logo o ângulo interno em cada vértice da face é $(1-2/p)\pi$.

Seja r o número de arestas incidentes a cada vértice de P. Sabemos que a soma dos ângulos facias em cada vértice de P é no máximo 2π. Logo,

$$\begin{aligned} r(1-2/p)\pi < 2\pi &\Rightarrow 1-2/p < 2/r \\ &\Rightarrow pr < 2r + 2p \\ &\Rightarrow pr - 2r - 2p + 4 < 4 \\ &\Rightarrow (p-2)(r-2) < 4. \end{aligned}$$

como um polígono tem pelo menos três vértices temos que $p \geq 3$. Pelo menos três faces devem ser incidentes a cada vértice do poliedro P logo $r \geq 3$. A tabela abaixo mostra todas as soluções das desigualdades obtidas.

p	r	$(p-2)(r-2)$	Nome	Descrição
3	3	1	tetraedro	3 triângulos incidentes a cada vértice
4	3	2	cubo	3 quadrados incidentes a cada vértice
3	4	2	octaedro	4 triângulos incidentes a cada vértice
5	3	3	dodecaedro	3 pentâgonos incidentes a cada vértice
3	5	3	icosaedro	5 triângulos incidentes a cada vértice

Os polígonos resultantes são mostrados na Figura 5.

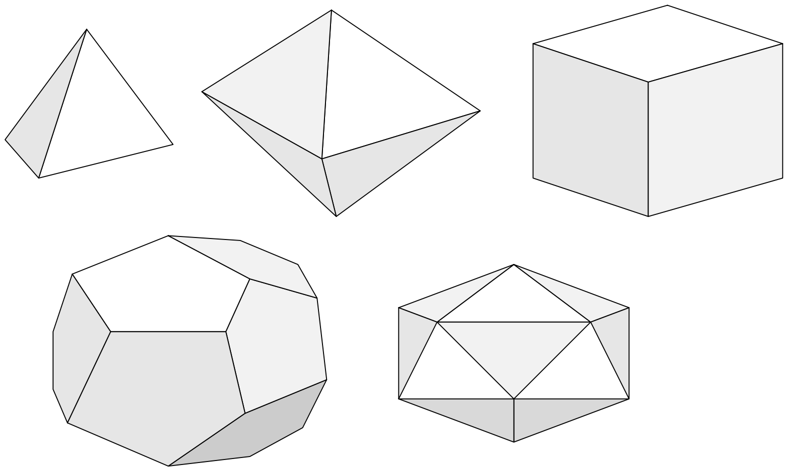

Figura 5. Os cinco sólidos Platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.