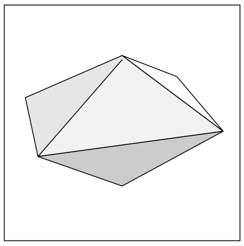
MAC 747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

FECHO CONVEXO TRIDIMENSIONAL

1. Introdução



Estudaremos agora a construção do fecho convexo de um dado conjunto de ponto S em E^3. Veremos algumas possiveis maneiras de representarmos conv(S) (em termos de estrutura de dados). Discutiremos o método do embrulho para presente de Chand & Kapur [2] para construir o fecho convexo (este método é uma generalização do Algoritmo de Jarvis para encontrar o fecho convexo de um conjunto de pontos no plano). Veremos também um algoritmo incremental para o problema.

Começaremos tentando adquirir alguma intuição sobre poliedros (seguindo os passos feitos em O'Rourke [10]) e depois trataremos de politopos regulares e Fórmula de Euler. Da Fórmula de Euler deduziremos limites superiores para o número de arestas e faces do fecho convexo de um conjunto de n pontos em E^3 (limites estes que são importantes para a análise de algoritmos).

Observação. Os tópicos que cobriremos foram extraídos do: Capítulo 3 de [6]; Capítulo 4 de [8], Capítulo 3 de [10]; Capítulos 3 de [11]; e

2. Poliedro

Um *poliedro* é uma generalização natural de um polígono para o espaço tridimensional: é a região do espaço cuja fronteira é formada por um número finito de faces poligonais, qualquer par das quais são ou disjuntas, ou tem um vértice e comum ou tem uma aresta em comum. Esta descrição é vaga e é uma tarefa delicada descrever a classe exata desses objetos.

A definição que encontramos na página 19 do livro de Preparata & Shamos [11] é a seguinte:
Poliedro. Um poliedro em E^3 é a região do espaço limitada por uma conjunto finito de polígonos (planos) tal que cada polígono cada arestas do polígono é compartilhada por exatamente um outro polígono (por um *polígono adjacente*) e nenhum subconjunto dos polígonos tem a mesma propriedade. Os vértices e arestas do polígono são os *vértices* e *arestas* do poliedro; os polígonos são as *faces* do poliedro.

Vamos desenvolver um pouco mais a intuição sobre o que é um poliedro como é feito em O'Rourke[10]. A fronteira do poliedro é formada por três tipos de objetos: pontos (vértices) de dimensão zero; segmentos (arestas) de dimensão um; e polígonos (faces) de dimensão dois. As vezes é conveniente exigirmos que os polígonos sejam convexos (nesse caso permitimos que duas

Date: 10 de outubro de 1997.

faces sejam coplanares). Portanto, da mesma maneira que aconteceu quando definimos um polígono, um poliedro é dado através da relação entre os seus componentes. Em um poliedro temos que:

1. Componentes se intersectam 'propriamente.' Para cada par de faces nós exigimos que:
   (a) elas são disjuntas;
   (b) elas tem um único vértice em comum;
   (c) elas tem dois vértices e a arestas ligando eles em comum.

   Intersecção imprópria eliminam objectos em quqe uma face 'atravessa' a outra e também o objecto mostrado na Figura 1 onde a intersecçao de duas faces não é uma aresta.

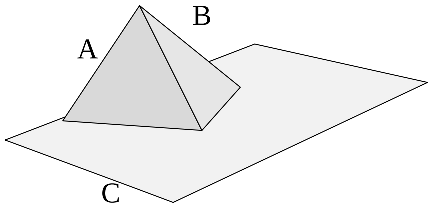


FIGURA 1. A face A e B não intersectam C propriamente.

2. A topologia local é 'própria.' A topologia local é como a superfície (fronteira) do poliedro se parece na vizinhança de um ponto. Na vizinhança de cada ponto a superfície de um poliedro deve ser indistinguível de um disco (círculo) a menos de dobrar e esticar a superfície como se esta fosse feita de um material moldável (não podemos cortar a superfície). Com isto estamos excluindo os objetos da Figura 2 de serem um poliedro.

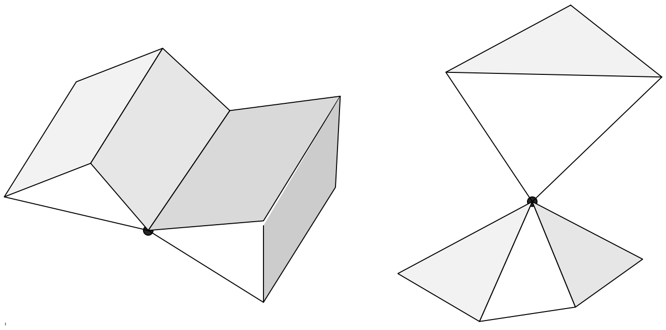


FIGURA 2. Na vizinhança dos ponto indicados a superfície não se parece com um círculo.

3. A topologia global é 'própria.' A superfície deve ser conexa, fechada e limitada. A superfície é conexa no sentido em que de qualquer ponto da superfície uma formiguinha pode andar, sem sair da superfície, até qualquer outro ponto. Combinatoriamente isto é equivalente a dizer que o *1-esqueleto* (*1-skeleton*, o grafo formado pelos vértices e arestas dos polígonos) seja conexo.

Estamos admitindo aqui que um poliedro tenha buracos (como um pneu ou *donut*; veja Figura 3. O número de burados é chamado de o *genus* da superfície. Poliedros de genus zero são topologicamente equivalente a uma esfera e muitas vezes são chamados de *poliedros simples*.

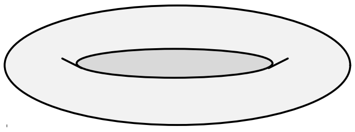


FIGURA 3. Um superfície de genus 1; um torus.

Resumindo, a fronteira de um poliedro e uma coleção finita de polígonos planares convexos limitados (as faces do polígono) tal que:

1. As faces se intersectam propriamente;
2. A vizinhaça de cada ponto é topologicamente um disco aberto;
3. A superfície é conexa, ou equivalentemente o 1-esquelo é conexo

A fronteira é fechada é contám no seu interior uma porção limitada do espaço. Cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces; essas faces são ditas *adjacente*.

Poliedros convexos são chamados de *politopos*. Poliedros convexos podem ser caracterizados por condições locais de duas maneiras:

1. Os ângulos diedrais são convexos: $\leq \pi$. Um ângulo *diedral* com relação a uma aresta e de um poliedro P é o âgulo entre os planos formados pelas faces de P que compartilham e. (Veja Figura 4

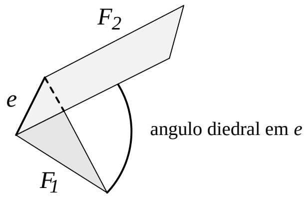


FIGURA 4. Ângulo diedral entre duas faces.

2. A soma dos ângulos facias em cada vértice é $\leq 2\pi$.