2. Combinatória de arranjos

Um arranjo de retas é chamado *simples* se cada par de retas se intersecta em um ponto e não existem três retas que se inersectam num mesmo ponto. Se H é um conjunto de n retas no plano então denotaremos por V, E e F o número de vértices, arestas e faces (células) do arranjo $\mathcal{A}(H)$, respectivamente.

Teorema 1. *Seja $\mathcal{A}$ um arranjo formado por n retas. Então o número de vértices, arestas e faces de $\mathcal{A}$ é $\binom{n}{2}$, n^2 e $\binom{n}{2}+n+1$, respectivamente. Além disso nenhum arranjo não-simples tem mais do que esse número de vértices, arestas ou faces.*

Prova. Denotaremos por V, E e F o número de vértices, arestas e faces do arranjo $\mathcal{A}$. Como o arranjo é simples temos imediatamente que $V = \binom{n}{2}$. A fórmula para E pode ser facilmente provada por indução. Suponha que um arranjo $\mathcal{A}'$ com $n-1$ retas tem $(n-1)^2$ arestas. Uma nova reta l colocada neste arranjo $\mathcal{A}'$ divide $n-1$ arestas do arranjo em duas além disso a reta l é dividida em n arestas. Logo, o número de arestas do arranjo $\mathcal{A}$ formado por $\mathcal{A}$ acrescido da reta l é é $(n-1)^2 + (n-1) + n = n^2$.

Para obtermos a fórmula para F usaremos a Fórmula de Euler ($V - E + F = 2$.) Não prodemos usar diretamente a Fórmula de Euler pois $\mathcal{A}$ não é um grafo. Entretanto se adicionarmos um vértice a $\mathcal{A}$ e ligarmos todas as extremidade 'infinita' das arestas de $\mathcal{A}$ com este vértice obteremos um grafo G planar com $V+1$ vértices, E arestas e que tem o mesmo número de faces de $\mathcal{A}$ (veja Figura 1). Aplicando a Fórmula de Euler a este grafo temos que $(V+1) - E + F = 2$, ou $F = 1 + E - V$. Como $V = \binom{n}{2}$ e $E = n^2$ então $F = 1 + n^2 - \binom{n}{2} = \binom{n}{2} + n + 1$.

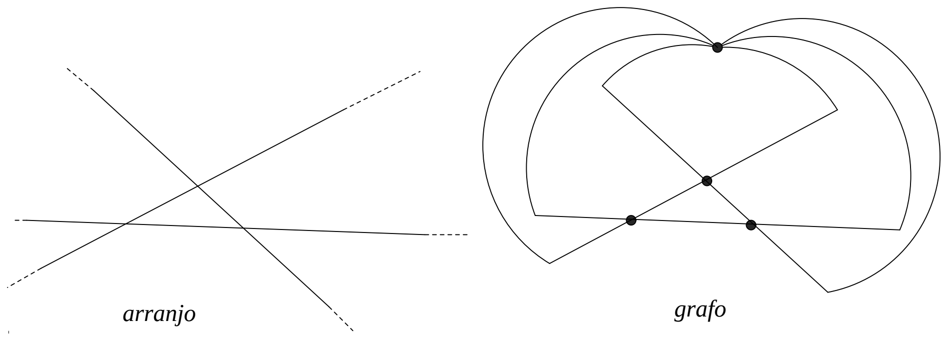

Figura 1. Transformado um arranjo em um grafo planar.

Para notar que nenhum arranjo não-simples tem mais do que o número acima vértices, arestas ou faces basta observar que se o arranjo for não simples e nós perturbarmos o arranjo para que le se transforme em um arranjo o número de vértices arestas e faces do novo arranjo é maior do que o do arranjo original. (Veja Figura 2.) ∎

O teorema acima implica que qualquer algoritmo para construir um arranjo deve ter complexidade de tempo $\Omega(n^2)$.

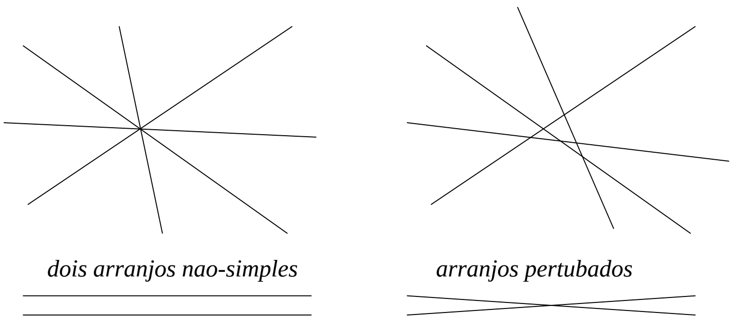

FIGURA 2. Pertubação das retas de um arranjo para torna-lo simples. Observe que o néumero de vértices, arestas e faces do novo arrnajo é maior do que a do original.

2.1. **The Zone Theorem.** Seja $\mathcal{A}(H)$ (ou simplesmente $\mathcal{A}$ um arranjo de um conjunto H de n retas no plano e seja l uma reta que não está em H. Assuma que $\mathcal{A}(H \cup \{l\})$ é um arranjo simples. A *zona* de l em $\mathcal{A}$, denotada por $Z_{\mathcal{A}}(l)$ (ou simplesmente $Z(l)$), é o conjunto de faces (células) intersectadas por l. Por exemplo, na Figura 3, temos que $Z(l)$ é formada pelas faces destacadas.

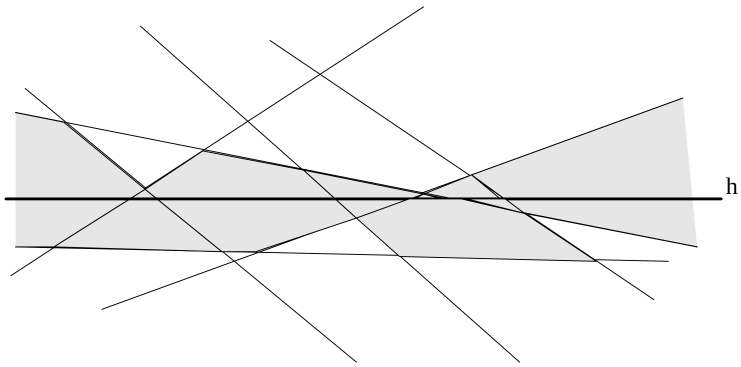

FIGURA 3. A zona de l em $\mathcal{A}$.

Denotaremos a soma do número de arestas em cada uma das células de uma zona $Z(l)$ por $z(l)$ (na Figura 3 $z(h) = 5 + 3 + 6 + 3 + 5 + 3 + 3 = 28$). Seja z_n o máximo valor possível para $z(l)$ onde o máximo é tomado sobre todos os arranjos $\mathcal{A}(H)$ formados por um conjunto H com n retas e sobre todas as possiveis escolhas de retas l.

A complexidade de um algoritmo incremental para construir um arranjo formado por n retas depende deste número z_n. (O problema que estamos tratando consiste em: *dado:* um conjunto H de n retas no plano; *construir*: o arranjo $\mathcal{A}(H)$. Por construir entenda-se que o algoritmo deve dar como resposta o arranjo representado como (digamos) um grafo planar—podemos usar a estrutura winged-edge para isto. Note que os dados de entrada do problema podem para cada reta $y = mx + b$ o par ordenado (m, b) (i.e. coeficiente ângular e linear de cada reta).)

Agora apresentaremos o *Zone Theorem* que afirma que $z_n O(n)$. Este resultado foi provado por Chazelle, Guibas & Lee [1] e Edelsbrunner, O'Rourke & Seidel [3].

Teorema 2. *O número total de arestas intersectadas por uma reta em uma arranjo determinado por n retas é $O(n)$. Mais precisamente $z_n \leq 6n$.* ∎