Melhores momentos

AULA 5

Recorrências

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 6n + 5 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T(n)$	1	19	43	67	97	127	157	187	223	259

Vimos que:

$T(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

Conclusão

O consumo de tempo do MERGE-SORT é $\Theta(n \lg n)$ no pior caso.

Exercício. Mostre que:

O consumo de tempo do MERGE-SORT é $\Theta(n \lg n)$.

Hmmmm. . . Qual a diferença entra as duas afirmações?

Classe O da solução de uma recorrência

Não faço questão de solução exata: basta solução aproximada (em notação O; melhor ainda Θ)

Exemplo:

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16, \ldots \end{aligned}$$

Solução exata: $G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$

Solução aproximada: $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$ ($G(n) = \Theta(n \lg n)$!)

Em geral, é mais fácil obter e provar solução aproximada que solução exata

Dica prática (sem prova)

A solução da recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

está na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T'(1) &= 1 \\ T'(n) &= 2T'(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 2^2, 2^3, \ldots \end{aligned}$$

e na mesma classe Θ que a solução de

$$\begin{aligned} T''(4) &= 10 \\ T''(n) &= 2T''(n/2) + n \quad \text{para } n = 2^3, 2^4, 2^5, \ldots \end{aligned}$$

Recorrências com O do lado direito

A "recorrência"

$$T(n) = 2T(n/2) + \mathrm{O}(n)$$

representa todas as recorrências da forma $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ em que $f(n)$ é $\mathrm{O}(n)$.

Melhor: representa todas as recorrências do tipo

$$\begin{aligned} T'(n) &\leq a \quad \text{para } n = k, k+1, \ldots, 2k-1 \\ T'(n) &\leq 2T'(\lfloor n/2 \rfloor) + b\,n \quad \text{para } n \geq 2k \end{aligned}$$

quaisquer que sejam a, $b > 0$ e $k > 0$
(poderíamos tomar $n_0 = 1$; veja ex ??.I)

Exemplo com O

Recorrência com O do lado direito

Na análise do consumo de tempo do MERGE-SORT tinhamos:

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \mathrm{O}(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \mathrm{O}(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução aproximada: $T(n)$ é $\mathrm{O}(n \lg n)$.

Exemplo com Θ

Recorrências com Θ do lado direito

Na análise do consumo de tempo do MERGE-SORT tinhamos:

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução aproximada: $T(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

Teorema Ban-Ban-Ban

Teorema Mestre (Master Theorem, CLRS, sec. 4.3, p.73):

Suponha

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

para algum $a \geq 1$ e $b > 1$ e onde n/b significa $\lceil n/b \rceil$ ou $\lfloor n/b \rfloor$. Então, em geral,

se $f(n) = \mathrm{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$	então	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	então	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$	então	$T(n) = \Theta(f(n))$

para qualquer $\epsilon > 0$.

AULA 6

Técnicas em projeto de algoritmos

Programming Pearls: Algorithm Design Techniques,

Jon Bentley, Addison-Wesley, 1986

Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é um qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

	1									n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Segmento de soma máxima

Um segmento de um vetor $A[1\,..\,n]$ é um qualquer subvetor da forma $A[e\,..\,d]$.

Problema: Dado um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros, determinar um segmento $A[e\,..\,d]$ de soma máxima.

Entra:

	1									n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Sai:

	1		3				7			n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

$A[e\,..\,d] = A[3\,..\,7]$ é segmento de soma máxima.

$A[3\,..\,7]$ tem soma 187.

Segmento de soma máxima

Problema (versão simplificada): Determinar a maior soma máxima de um segmento de um dado um vetor $A[1\,..\,n]$.

Entra:

	1									n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Sai:

	1		3				7			n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

A soma máxima é 187.

Algoritmo café-com-leite

Algoritmo determina um segmento de soma máxima de $A[1\,..\,n]$.

```
SEG-MAX-3 (A, n)
 1   somamax ← 0
 2   e ← 0    d ← −1    ▷ A[e..d] é vazio
 3   para i ← 1 até n faça
 4       para f ← i até n faça
 5           soma ← 0
 6           para k ← i até f faça
 7               soma ← soma + A[k]
 8           se soma > somamax então
 9               somamax ← soma    e ← i    d ← f
10   devolva e, d e somamax
```

Correção

Relação invariante chave:

(i0) na linha 3 vale que: $A[e\,..\,d]$ é um segmento de soma máxima com $e < i$.

	e		i				d			n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Correção

Relação invariante chave:

(i0) na linha 3 vale que: $A[e\,..\,d]$ é um segmento de soma máxima com $e < i$.

	e		i				d			n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Mais relações invariantes:

(i1) na linha 3 vale que:

$$somamax = A[e] + A[e+1] + A[e+2] + \cdots + A[d];$$

(i2) na linha 6 vale que:

$$soma = A[i] + A[i+1] + A[i+2] + \cdots + A[k-1].$$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1-2	$=$	2	$= \Theta(1)$
3	$=$	$n+1$	$= \Theta(n)$
4	$=$	$(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1$	$= \Theta(n^2)$
5	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$= \Theta(n^2)$
6	$=$	$(2+\cdots+(n+1))+(2+\cdots+n)+\cdots+2$	$= \Theta(n^3)$
7	$=$	$(1+\cdots+n)+(1+\cdots+(n-1))+\cdots+1$	$= \Theta(n^3)$
8	$=$	$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$	$= \Theta(n^2)$
9	$\leq$	$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1$	$= \mathrm{O}(n^2)$
10	$=$	1	$= \Theta(1)$
total	$=$	$\Theta(2n^3+3n^2+n+2)+\mathrm{O}(n^2)$	$= \Theta(n^3)$

Algoritmo arroz-com-feijão

Algoritmo determina um segmento de soma máxima de $A[1\,..\,n]$.

```
SEG-MAX-2 (A, n)
1   somamax ← 0
2   e ← 0   d ← −1   ▷ A[e..d] é vazio
3   para i ← 1 até n faça
4       soma ← 0
5       para f ← i até n faça
6           soma ← soma + A[f]
7           se soma > somamax então
8               somamax ← soma   e ← i   d ← f
9   devolva e, d e somamax
```

Correção

Relação invariante chave:

(i0) na linha 3 vale que: $A[e\,..\,d]$ é um segmento de soma máxima com $e < i$.

	e						d	i		n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Mais relações invariante:

(i1) na linha 3 vale que:

$$somamax = A[e] + A[e+1] + A[e+2] + \cdots + A[d];$$

(i2) na linha 5 vale que:

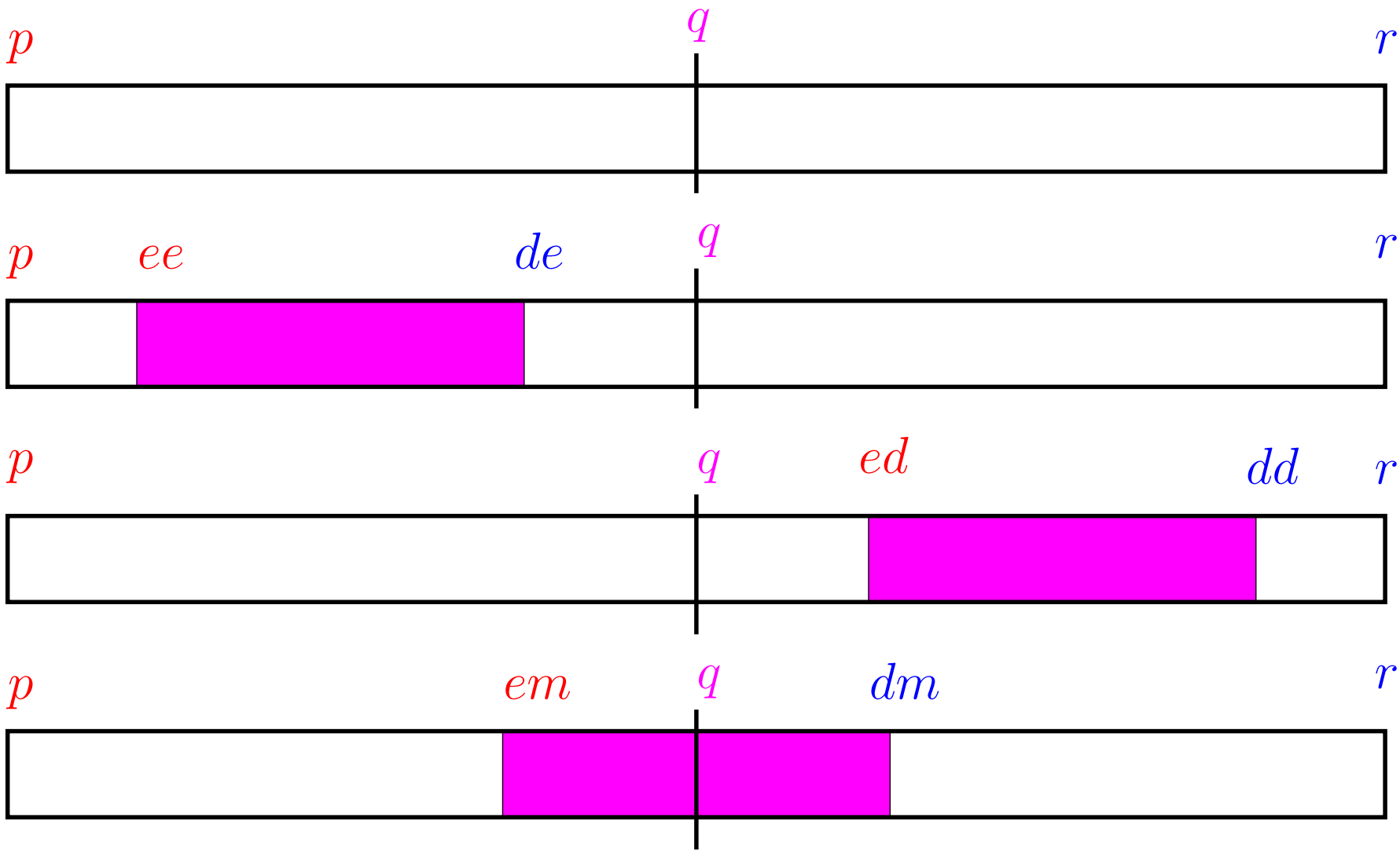
$$soma = A[i] + A[i+1] + A[i+2] + \cdots + A[f-1];$$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1-2	$=$	2	$= \Theta(1)$
3	$=$	$n+1$	$= \Theta(n)$
4	$=$	n	$= \Theta(n)$
5	$=$	$(n+1)+n+\cdots+2$	$= \Theta(n^2)$
6	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$= \Theta(n^2)$
7	$=$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$= \Theta(n^2)$
8	$\leq$	$n+(n-1)+\cdots+1$	$= \mathrm{O}(n^2)$
9	$=$	1	$= \Theta(1)$
total	$=$	$\Theta(3n^2+2n+2)+\mathrm{O}(n^2)$	$= \Theta(n^2)$

Solução de divisão-e-conquista



Algoritmo de divisão-e-conquista

Algoritmo determina soma máxima de um seg. de $A[p\,..\,r]$.

```
SEG-MAX-DC (A, p, r)
 1  se p = r então devolva max(0, A[p])
 2  q ← ⌊(p + r)/2⌋
 3  maxesq ← SEG-MAX-DC(A, p, q)
 4  maxdir ← SEG-MAX-DC(A, q + 1, r)
 5  max2esq ← soma ← A[q]
 6  para i ← q − 1 decrescendo até p faça
 7        soma ← soma + A[i]
 8        max2esq ← max(max2esq, soma)
 9  max2dir ← soma ← A[q + 1]
10  para f ← q + 2 até r faça
11        soma ← soma + A[f]
12        max2dir ← max(max2dir, soma)
13  maxcruz ← max2esq + max2dir
14  devolva max(maxesq, maxcruz, maxdir)
```

Correção

Veri£que que:

- $maxesq$ é a soma máxima de um segmento de $A[p\,..\,q]$;
- $maxdir$ é a soma máxima de um segmento de $A[q+1\,..\,r]$; e
- $maxcruz$ é a soma máximo de um segmento da forma $A[i\,..\,f]$ com $i \leq q$ e $q+1 \leq f$.

Conclua que o algoritmo devolve a soma máxima de um segmento de $A[p\,..\,r]$.

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1-2	$=$	2	$=\Theta(1)$
3	$=$	$T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$	$=T(\lceil \frac{n}{2} \rceil)$
4	$=$	$T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$	$=T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
5	$=$	1	$=\Theta(1)$
6	$=$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$	$=\Theta(n)$
7-8	$=$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$=\Theta(n)$
9	$=$	1	$=\Theta(1)$
10	$=$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$=\Theta(n)$
11-12	$=$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$=\Theta(n)$
13-14	$=$	2	$=\Theta(1)$
total	$=$	$T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)+T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)+\Theta(4n+4)$	

Consumo de tempo

$T(n) :=$ consumo de tempo quando $n = r - p + 1$

Na análise do consumo de tempo do SEG-MAX-DC chegamos a (já manjada) recorrências com Θ do lado direito:

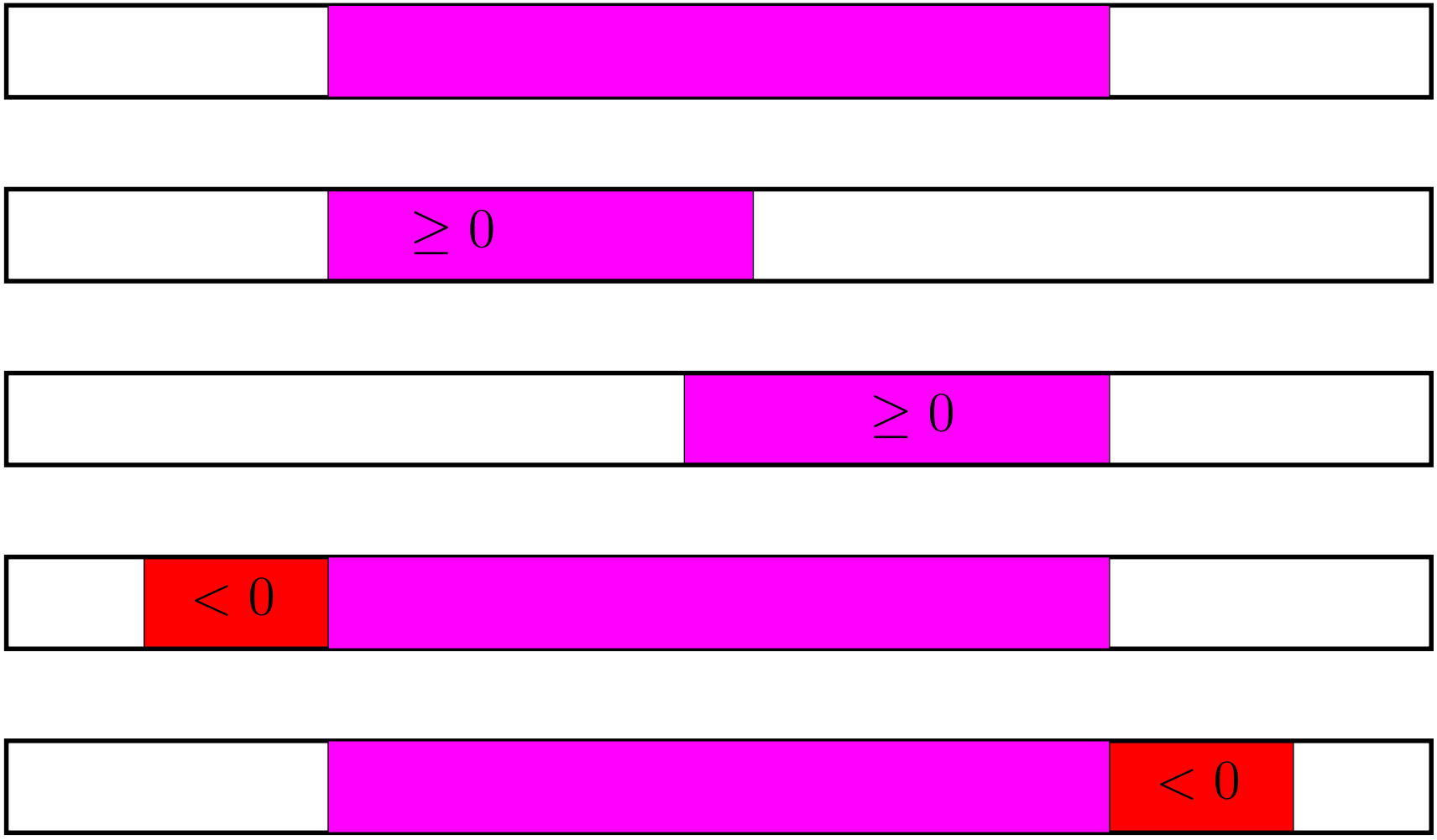
$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

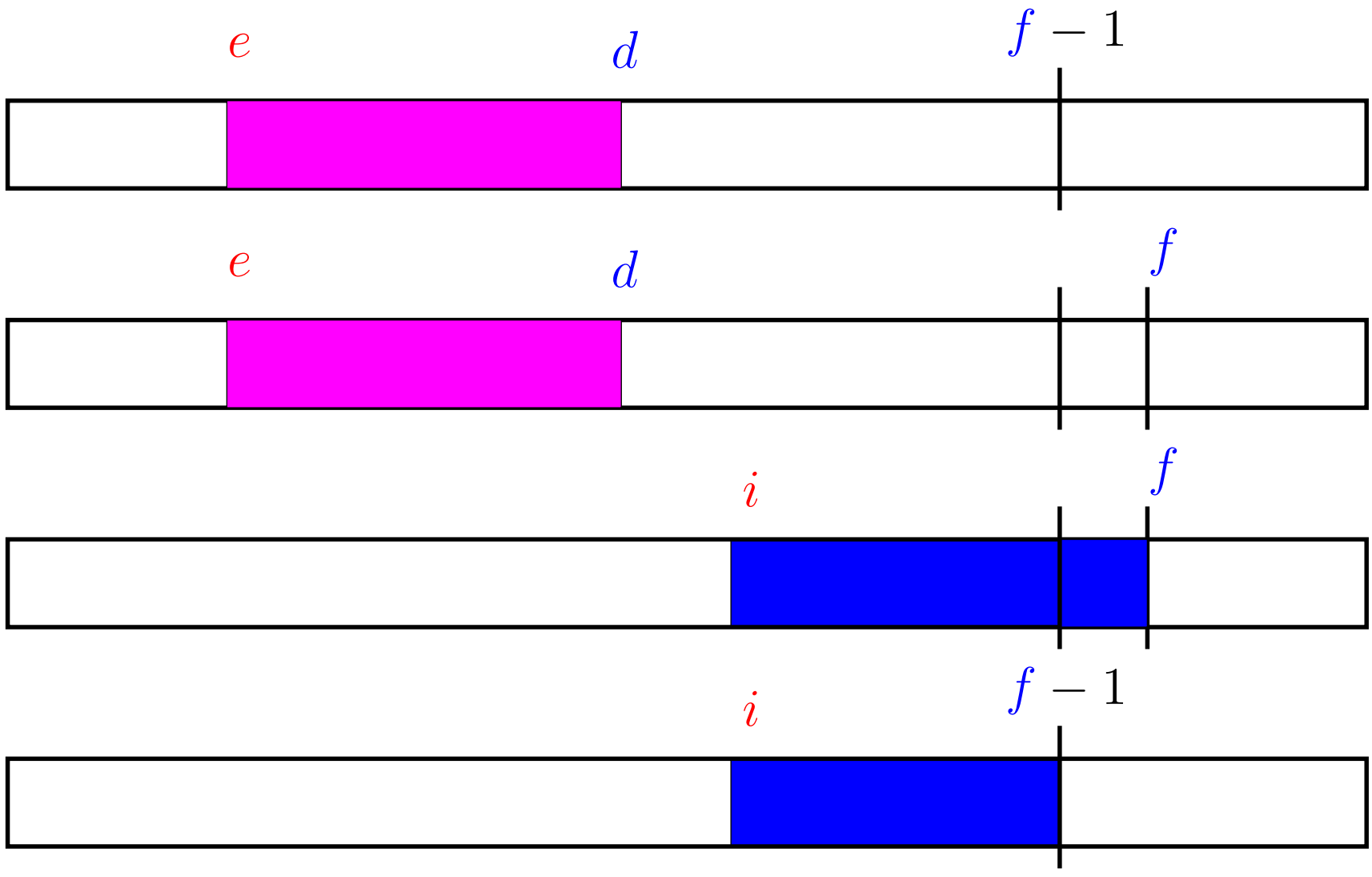
Solução aproximada/assintótica: $T(n)$ é $\Theta(n \lg n)$.

Cara da solução

Solução



Solução indutiva



Algoritmo linear

Algoritmo determina um segmento de soma máxima de $A[1\,..\,n]$ (por Jay Kadane).

```
SEG-MAX-1 (A, n)
 1   somamax ← 0
 2   e ← 0    d ← −1     ▷ A[e..d] é vazio
 3   i ← 1
 4   soma ← 0
 5   para f ← 1 até n faça
 6         se soma < 0
 7               então i ← f     soma ← A[f]
 8               senão soma ← soma + A[f]
 9         se soma > somamax então
10               somamax ← soma    e ← i    d ← f
11   devolva e, d e somamax
```

Correção

Relação invariante chave:

(i0) na linha 5 vale que: $A[e\,..\,d]$ é segmento de soma máxima com $d < f$.

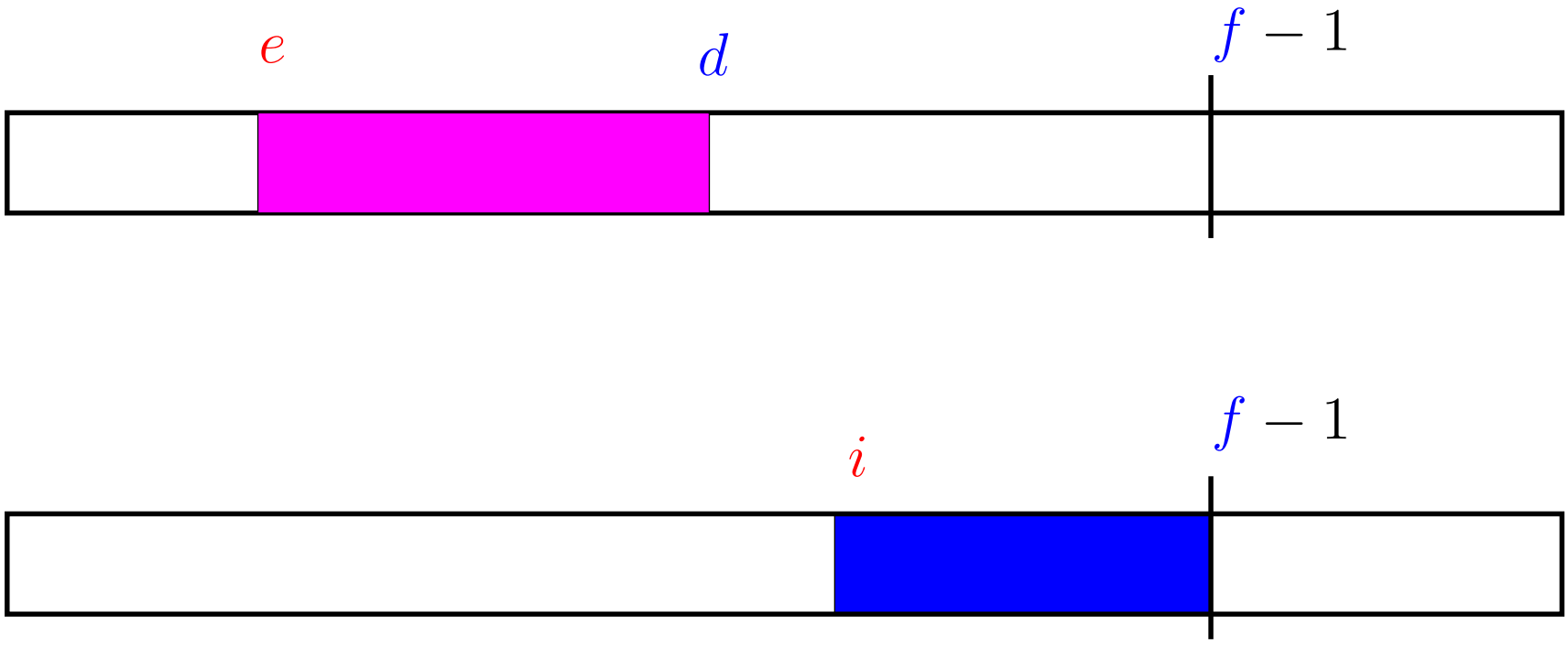
			e	d		f				n
A	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

Mais uma relação invariante:

(i1) na linha 5 vale que:

$$somamax = A[e] + A[e+1] + A[e+2] + \cdots + A[d].$$

Invariantes (i0) e (i3)



Correção (continuação)

Mais relações invariantes.
Na linha 5 vale que:

(i2) $A[i\,..\,f-1]$ é segmento de soma máxima com termino em $f-1$;
(i3) $soma = A[i] + A[i+1] + A[i+2] + \cdots + A[f-1]$;
(i4) $A[i] + A[i+1] + \cdots + A[k] \geq 0$
para todo $k = i, i+1, \ldots, f-2$;

Na linha 7 vale que:

(i5) $soma = A[i] + A[i+1] + \cdots + A[f-1] < 0$

As relações invariantes (i4) e (i5) implicam que na linha 7:

(i6) $A[k] + A[k+1] + \cdots + A[f-1] < 0$
para todo $k = i, i+1, \ldots, f-1$;

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é:

linha		todas as execuções da linha	
1-2	$=$	2	$=\Theta(1)$
3-4	$=$	2	$=\Theta(1)$
5	$=$	$n+1$	$=\Theta(n)$
6	$=$	n	$=\Theta(n)$
7-8	$=$	n	$=\Theta(n)$
9	$=$	n	$=\Theta(n)$
10	$\leq$	n	$=\mathrm{O}(n)$
11	$=$	1	$=\Theta(1)$
total	$=$	$\Theta(4n+3)+\mathrm{O}(n)$	$=\Theta(n)$

Conclusões

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-3 é $\Theta(n^3)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-2 é $\Theta(n^2)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-DC é $\Theta(n \lg n)$.

O consumo de tempo do algoritmo SEG-MAX-1 é $\Theta(n)$.

Técnicas

- Evitar recomputações. Usar espaço para armazenar resultados a fim de evitar recomputá-los (SEG-MAX-2, SEG-MAX-1, programação dinâmica).
- Pré-processar os dados. O HEAPSORT pré-processa os dados armazenandos em uma entrutura de dados para realizar computações futuras mais eficientemente.
- Divisão-e-conquista. Os algoritmos Mergesort e SegMaxdc utilizam uma forma conhecidade dessa técnica.
- Algoritmos incrementais/varredura. Como estender a solução de um subproblema a uma solução do problema (SegMaxu).
- Delimitação inferior. Projetistas de algoritmos só dormem em paz quando sabem que seus algoritmos são o melhor possível (SegMaxu).

Análise experimental de algoritmos

"O interesse em experimentação, é devido ao reconhecimento de que os resultados teóricos, freqüentemente, não trazem informações referentes ao desempenho do algoritmo na prática."

Análise experimental de algoritmos

Segundo D.S. Johnson, pode-se dizer que existem quatro motivos básicos que levam a realizar um trabalho de implementação de um algoritmo:

- usar o código em uma aplicação particular, cujo propósito é descrever o impacto do algoritmo em um certo contexto;
- proporcionar evidências da superioridade de um algoritmo;
- melhor compreensão dos pontos fortes e fracos e do desempenho das operações algorítmicas na prática; e
- produzir conjecturas sobre o comportamento do algoritmo no caso-médio sob distribuições específicas de instâncias onde a análise probabilística direta é muito difícil.

Ambiente experimental

A plataforma utilizada nos experimentos é um PC rodando Linux Debian ?.? com um processador Pentium II de 233 MHz e 128MB de memória RAM .

Os códigos estão compilados com o gcc versão ?? e opção de compilação ??.

As instâncias são obtidas utilizando-se o gerador `gera.c` disponível em

`http://www.ime.usp.br/~coelho/algoritmos/tarefa1/`

As implementações comparadas neste experimento são SEG-MAX-3, SEG-MAX-2 e SEG-MAX-1.

Ambiente experimental

A estimativa do tempo é calculada utilizando-se:

```
#include <time.h>
[...]
clock_t start, end;
double time;

start = clock();

[...implementação...]

end  = clock();
time = ((double)(end - start))/CLOCKS_PER_SEC;
```

O tempo de entrada/saída é computado separadamente.

Resultados experimentais

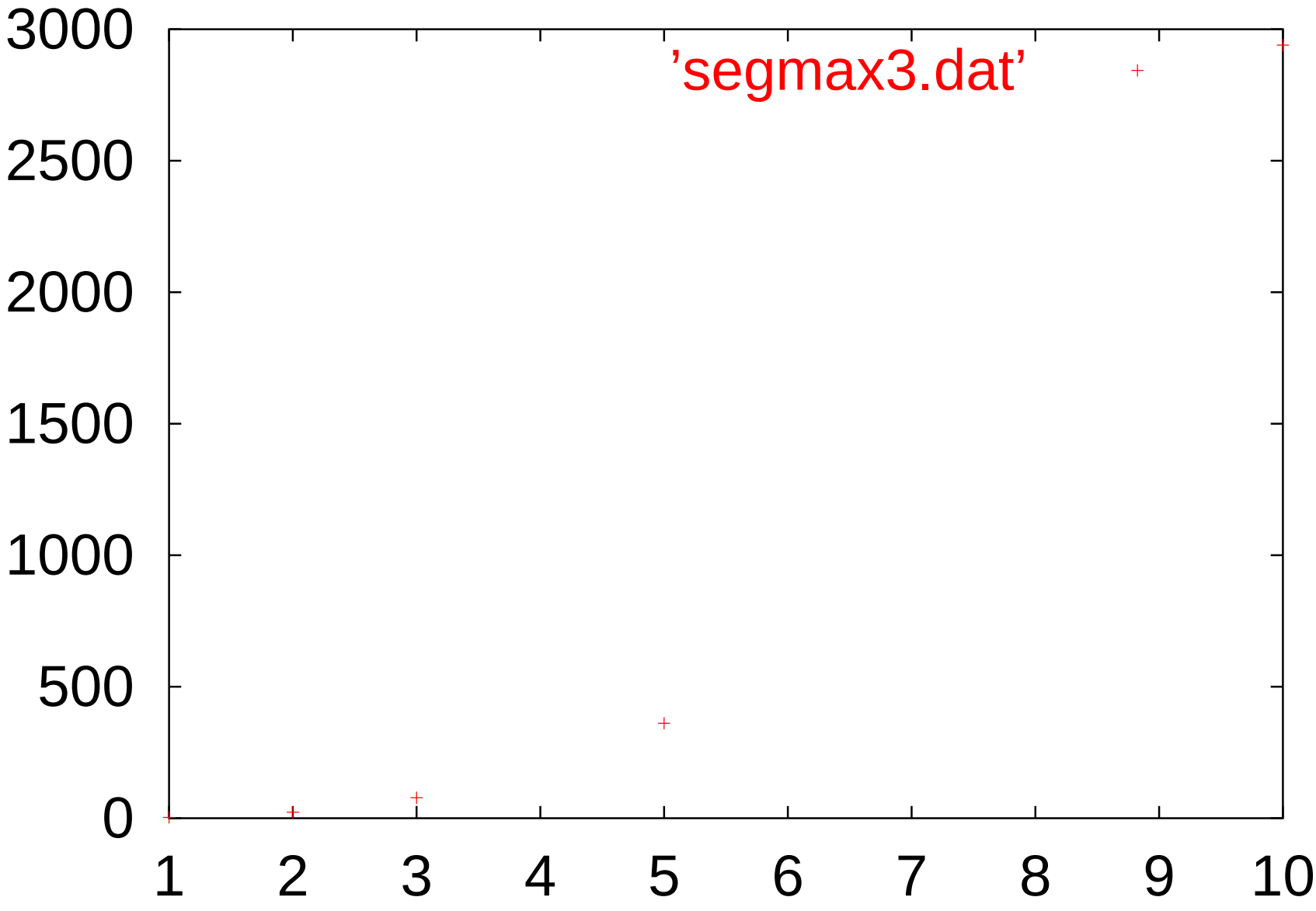
n	SEG-MAX-2		SEG-MAX-3	
	`clock`	`user time`	`clock`	`user time`
1000	0.01	0.01	2.91	2.92
2000	0.03	0.03	23.00	23.04
3000	0.08	0.08	77.58	1m17.57
5000	0.24	0.24	360.78	6m0.45s
10000	1.16	1.62	2940	49m27.32
20000	4.8	4.82	?	?
50000	42.8	42.96	?	?
100000	188.0	3m7.58s	?	?
200000	911.74	15m10.34s	?	?
400000	?	64m22.880s	?	?

Resultados experimentais

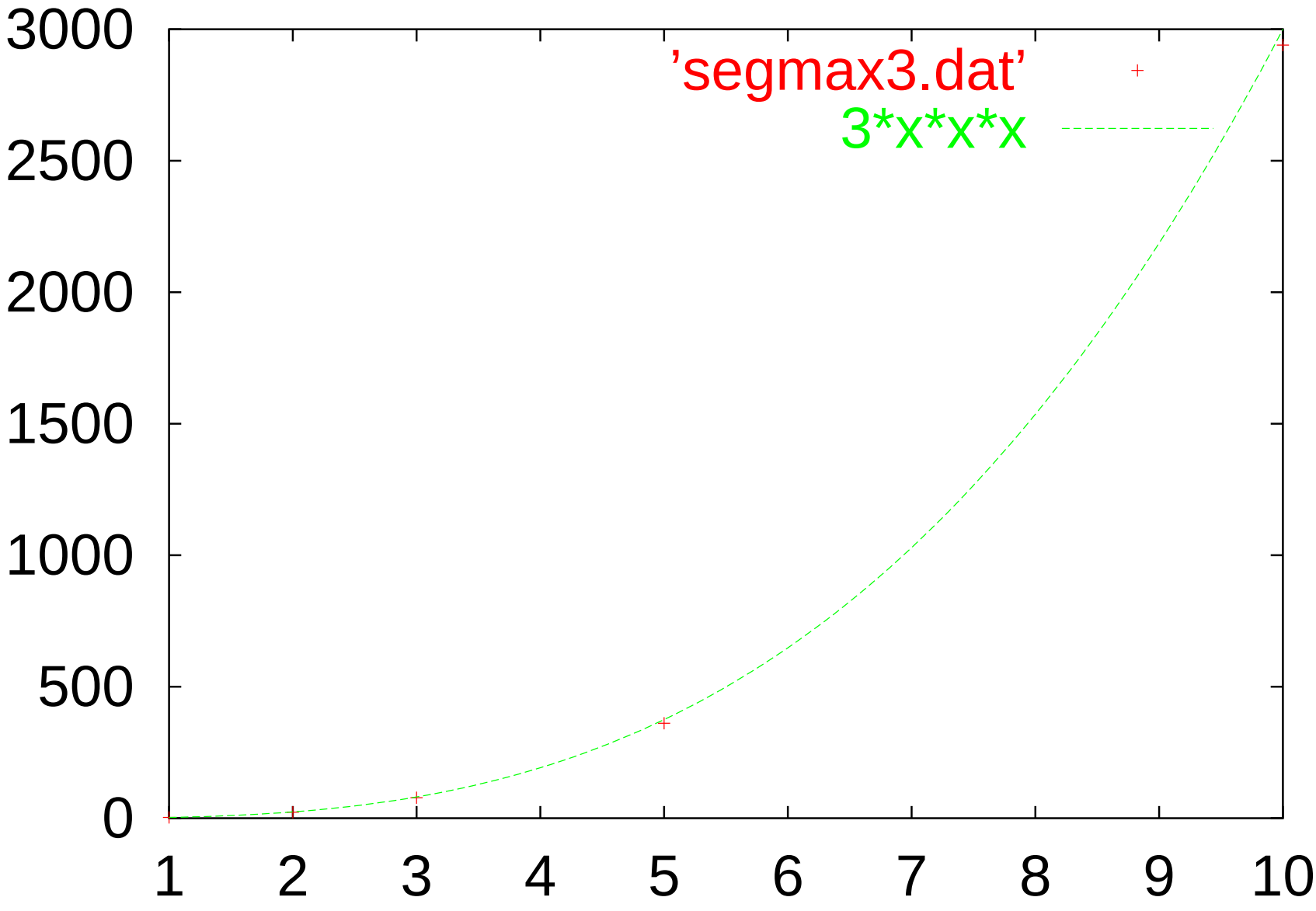
n	SEG-MAX-1 A		SEG-MAX-1 B	
(M)	`clock`	`user time`	`clock`	`user time`
1	0.06	0.11	0.08	0.07
2	0.11	0.23	0.15	0.06
3	0.16	0.28	0.30	0.12
6	0.32	0.63	0.56	0.29
8	0.43	0.80	0.71	0.43
10	0.55	1.03	1.00	0.52
15	0.82	1.55	1.37	0.64
20	1.08	2.03	2.17	0.95
25	1.37	2.52	2.44	1.38
30	1.70	3.13	3.28	1.68

Todos os tempos estão em segundos.

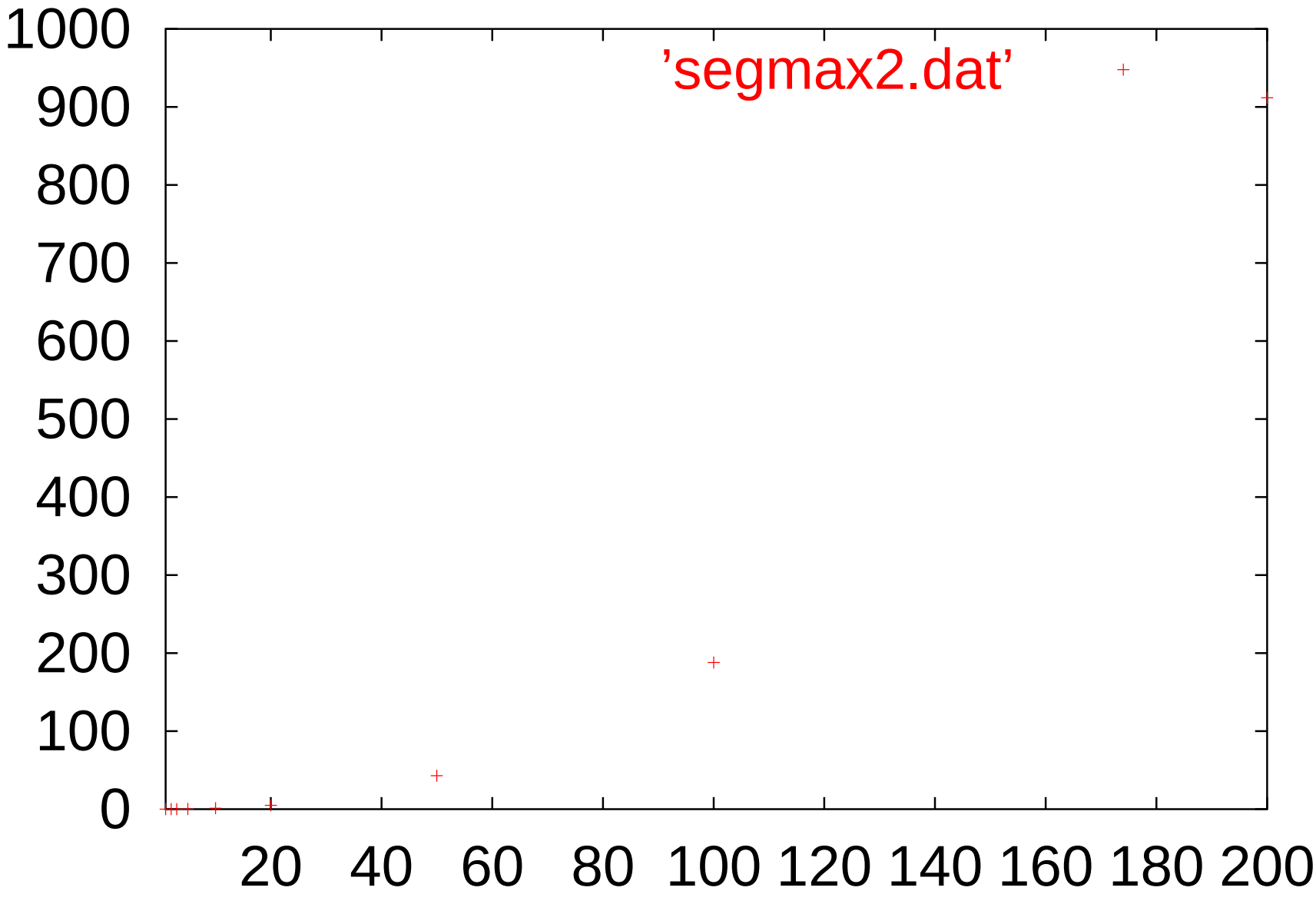
SEG-MAX-3



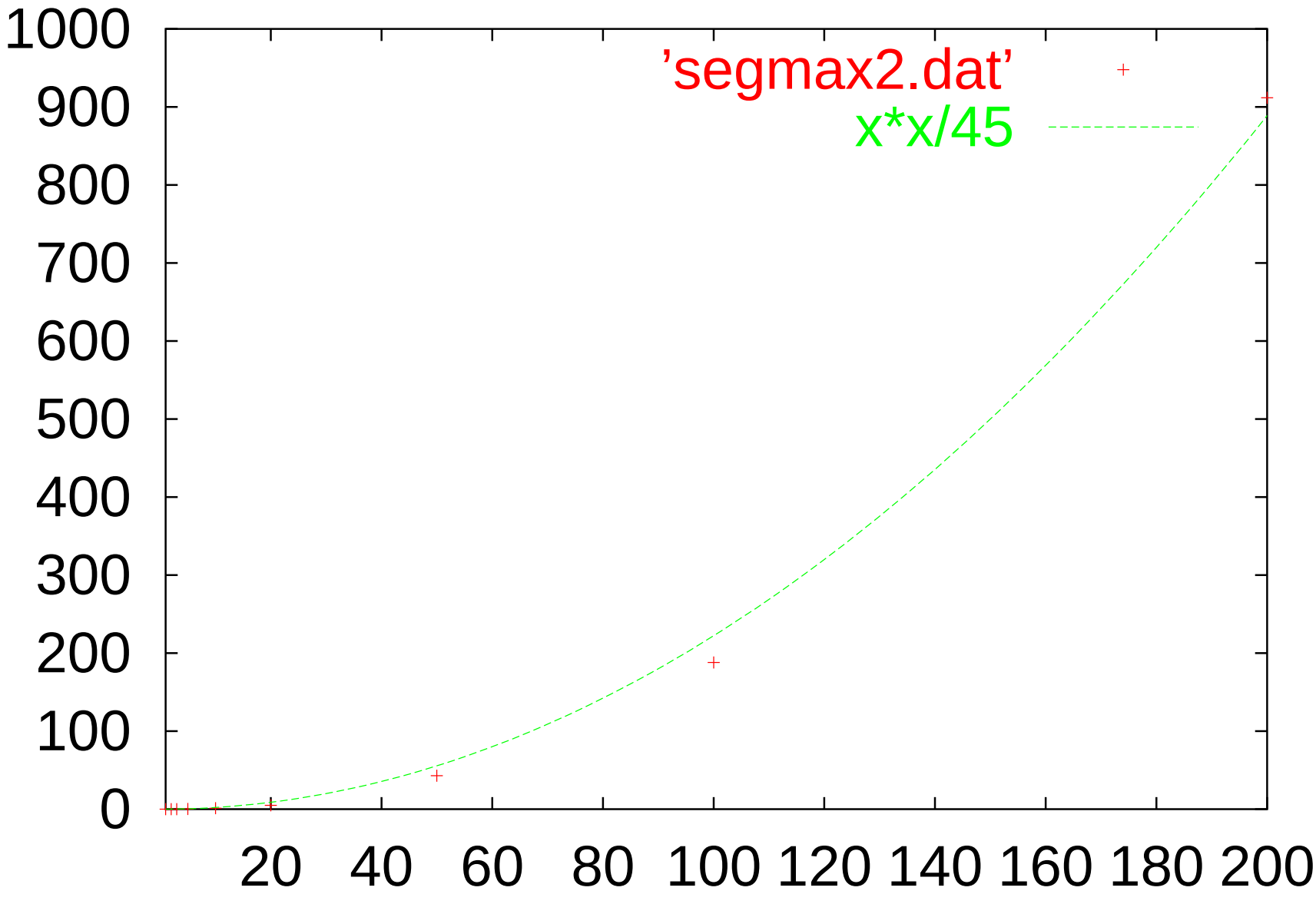
SEG-MAX-3



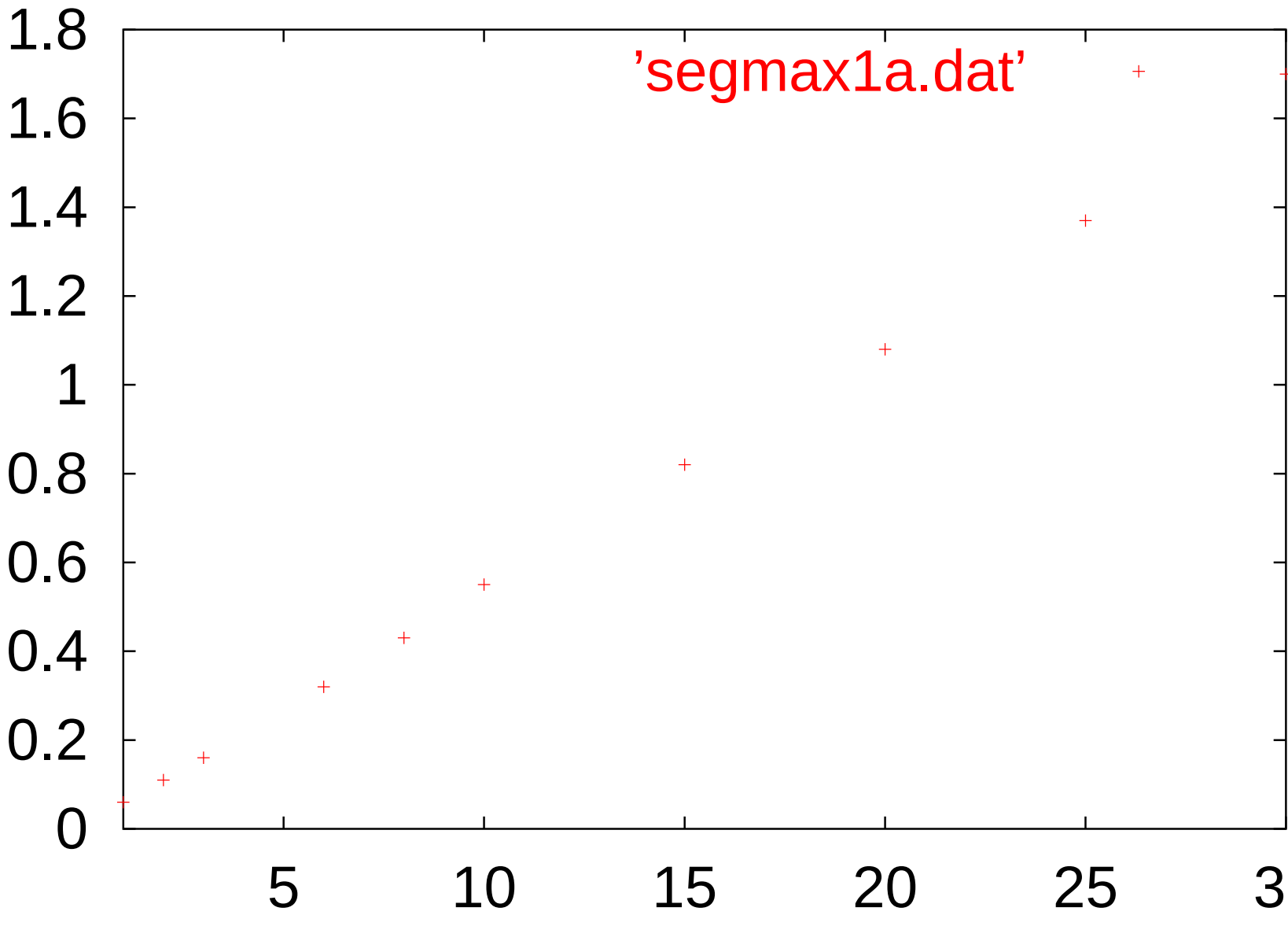
Seg-Max-2


'segmax2.dat'
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

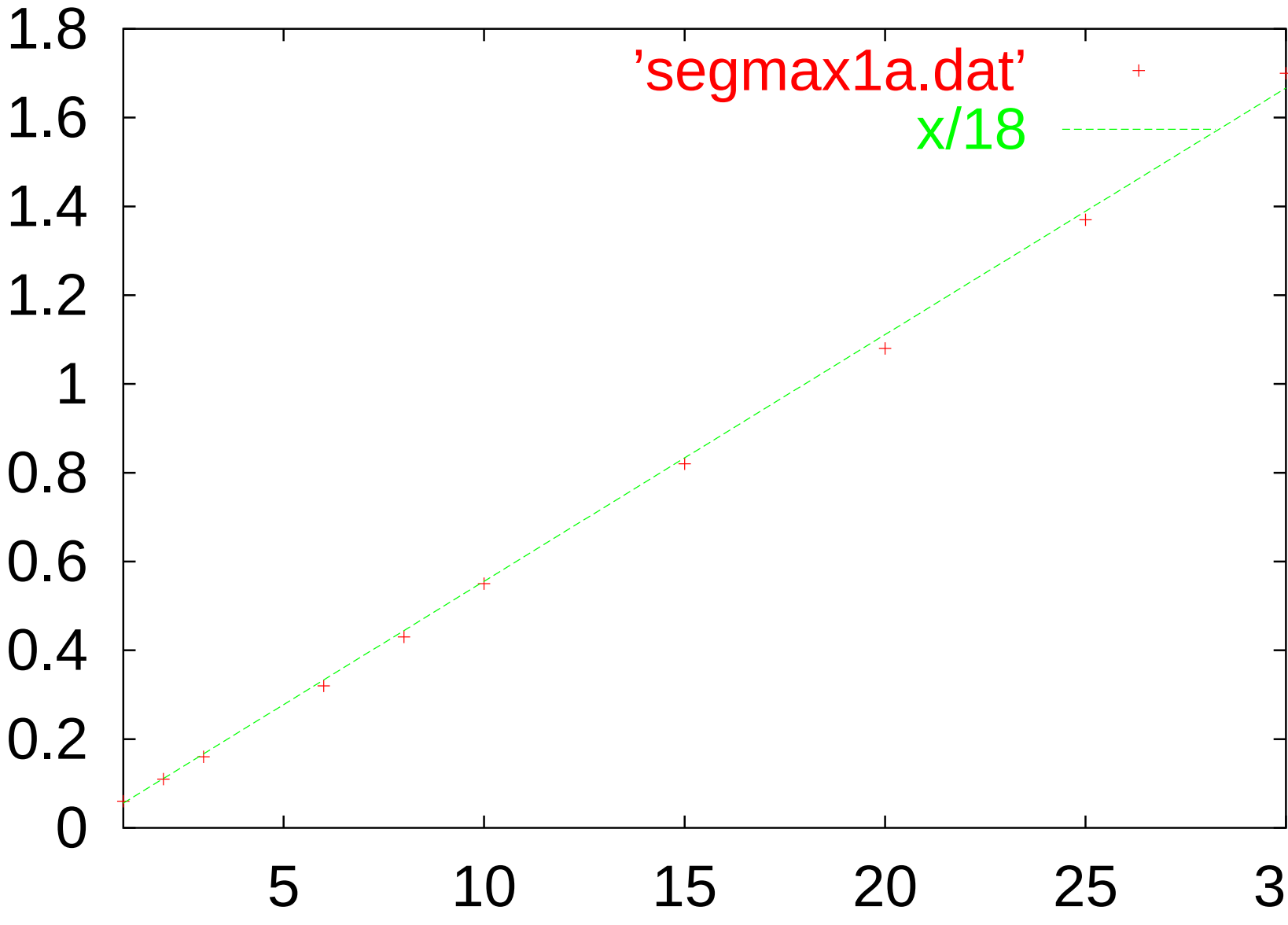
SEG-MAX-2


1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
'segmax2.dat'
x*x/45

SEG-MAX-1



SEG-MAX-1



Exercícios

Exercício 10.A

Nos algoritmos convencionamos o segmento vazio como sendo o de soma máxima se $A[1\,..\,n]$ tem apenas números negativos. Suponha que em vez disso tivéssemos decidido que nesse caso o maior elemento de $A[1\,..\,n]$ é o segmento de soma máxima. Como isto alteraria s quatro algoritmos?

Exercício 10.B

Suponha que desejamos determinar um segmento como soma mais próxima de zero, em vez do de soma máxima. Projete um algoritmo para esta tarefa. Qual é o consumo de tempo do seu algoritmo? E se estivéssemos interessados em um algoritmo para encontrar um segmento de soma mais próxima de um dado valor?

Exercício 10.C

No problema do retângulo de soma máxima é dada uma matriz $A[1\,..\,n, 1\,..\,n]$ de números inteiros e deseja-se determinar um retângulo de soma máxima. Projete um algoritmo para este problema. Qual o consumo de tempo do seu algoritmo?

Exercício 10.D

Modifique o algoritmo SEG-MAX-DC para que seu consumo de tempo seja linear.

Mais exercícios

Exercício 10.E

Demonstre que qualquer algoritmo para o problema do segmento de soma máxima deve examinar cada um dos n elementos do vetor. (Algoritmos para alguns problemas podem, corretamente, ignorar alguns dos dados; o algoritmo de Boyer e Moore para busca de padrões é um exemplo.)

Exercício 10.F

Projete um algoritmo que recebe um vetor $A[1\,..\,n]$ de números inteiros e um número inteiro m e devolve um índice i tal que $1 \leq i \leq n - m$ e a soma $A[i] + \cdots + A[i + m]$ seja próxima de zero. Qual o consumo de tempo do seu algoritmo.

Exercício 10.G

Resolva a recorrência

$$T(1) = 0$$
$$T(n) = 2\,T(n/2) + n \quad \text{para } n = 2, 4, 8, \ldots$$

Demonstre por indução que a sua solução está correta.