Melhores momentos

AULA 3

Análise da intercalação

Problema: Dados $A[p \mathinner{.\,.} q]$ e $A[q+1 \mathinner{.\,.} r]$ crescentes, rearranjar $A[p \mathinner{.\,.} r]$ de modo que ele fique em ordem crescente.

Entra:

	p				q				r
A	22	33	55	77	99	11	44	66	88

Sai:

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Intercalação

INTERCALA (A, p, q, r)

$\triangleright$ $B[p \,.\,.\, r]$ é um vetor auxiliar

para $i \leftarrow p$ **até** q **faça**

    $B[i] \leftarrow A[i]$

para $j \leftarrow q + 1$ **até** r **faça**

    $B[r + q + 1 - j] \leftarrow A[j]$

$i \leftarrow p$

$j \leftarrow r$

para $k \leftarrow p$ **até** r **faça**

    se $B[i] \leq B[j]$

        então $A[k] \leftarrow B[i]$

            $i \leftarrow i + 1$

        senão $A[k] \leftarrow B[j]$

            $j \leftarrow j - 1$

Consumo de tempo

Se a execução de cada linha de código consome 1 unidade de tempo o consumo total é ($n := r - p + 1$):

linha		todas as execuções da linha
1	$=$	$q - p + 2 \ = \ n - r + q + 1$
2	$=$	$q - p + 1 \ = \ n - r + q$
3	$=$	$r - (q + 1) + 2 \ = \ n - q + p$
4	$=$	$r - (q + 1) + 1 \ = \ n - q + p - 1$
5	$=$	1
6	$=$	1
7	$=$	$r - p + 2 \ = \ n + 1$
8	$=$	$r - p + 1 \ = \ n$
9–12	$=$	$2\,(r - p + 1) \ = \ 2n$
total	$=$	$8n - 2(r - p + 1) + 5 = \ 6n + 5$

Consumo de tempo

Quanto tempo consome em função de $n := r - p + 1$?

linha	consumo de todas as execuções da linha
1–4	$\mathrm{O}(n)$
5–6	$\mathrm{O}(1)$
7	$n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$
8	$n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$
9–12	$n\mathrm{O}(1) = \mathrm{O}(n)$
total	$\mathrm{O}(4n + 1)$ = $\mathrm{O}(n)$

Conclusão:

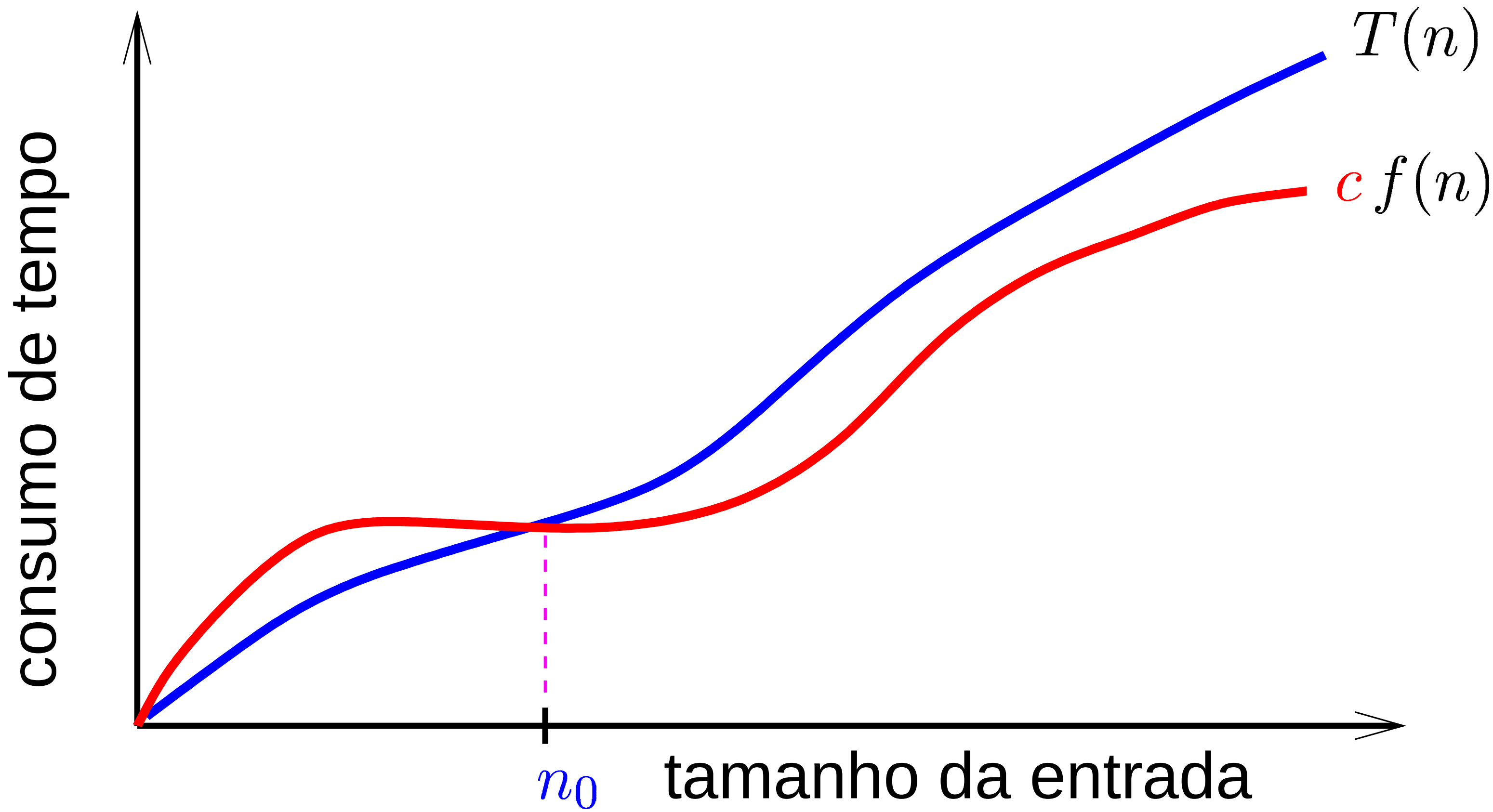
$\boxed{\text{O algoritmo consome } \mathrm{O}(n) \text{ unidades de tempo.}}$

Definição

Dizemos que $T(n)$ é $\Omega(f(n))$ se existem constantes positivas c e n_0 tais que

$$c\, f(n) \;\leq\; T(n)$$

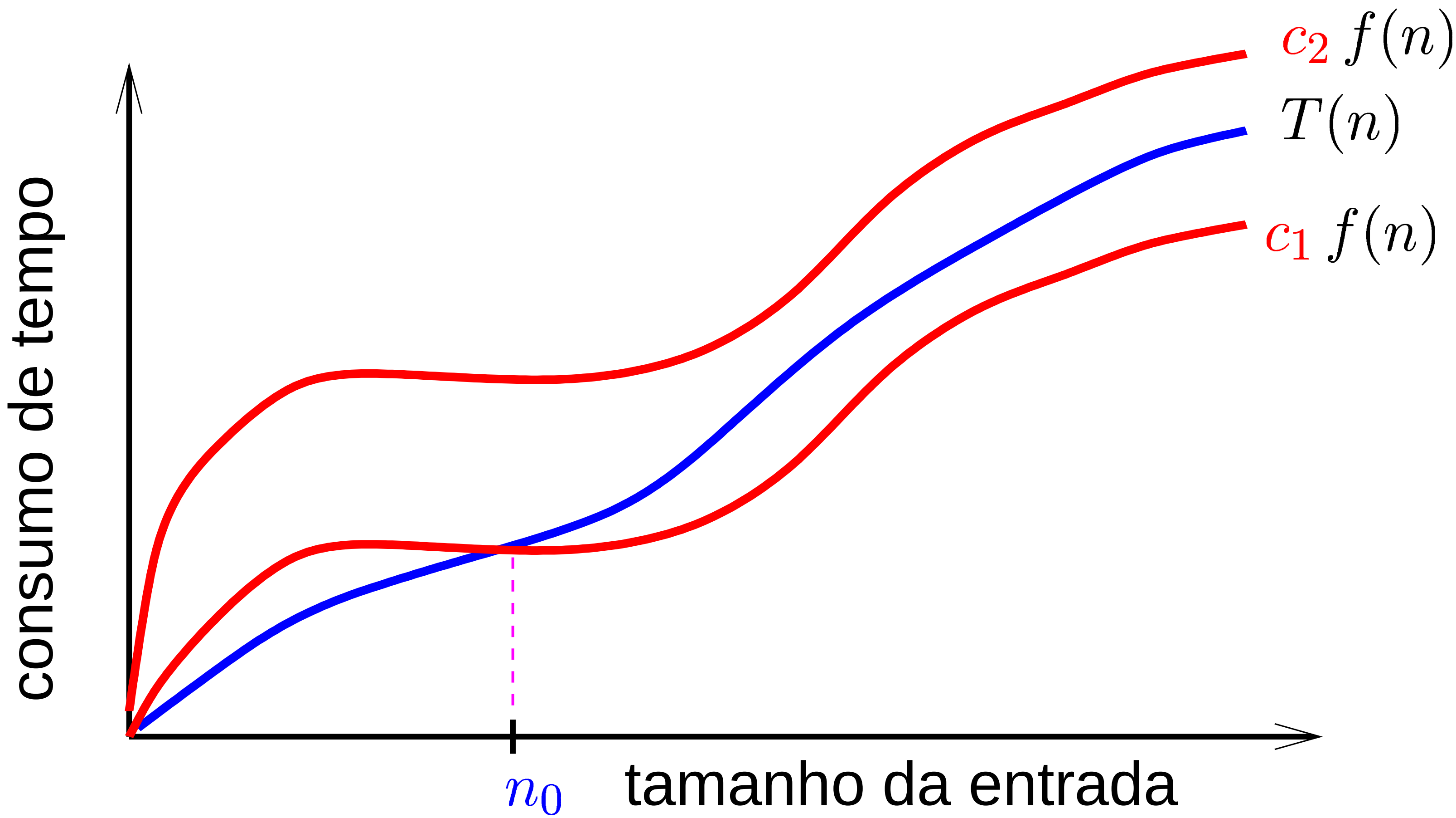
para todo $n \geq n_0$.



Definição

Sejam $T(n)$ e $f(n)$ funções dos inteiros no reais.
Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se

$$T(n) \text{ é } \mathrm{O}(f(n)) \text{ e } T(n) \text{ é } \Omega(f(n)).$$

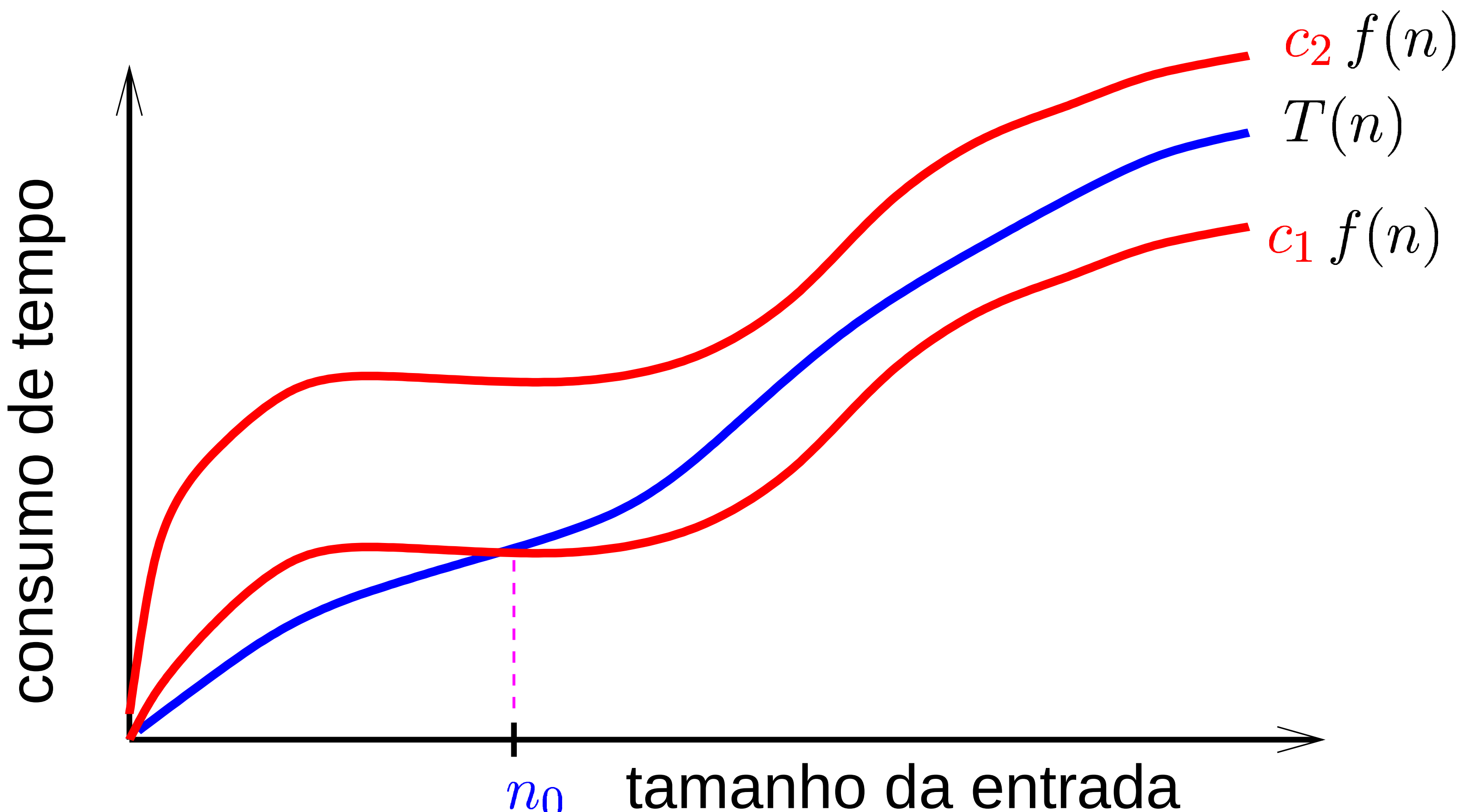


Definição

Dizemos que $T(n)$ é $\Theta(f(n))$ se se existem constantes positivas c_1, c_2 e n_0 tais que

$$c_1\, f(n) \ \leq \ T(n) \ \leq \ c_2\, f(n)$$

para todo $n \geq n_0$.



Exercícios

Exercício 6.A
Já sabemos que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\mathrm{O}(n^2)$.
Mostre que o algoritmo é $\Omega(n)$.

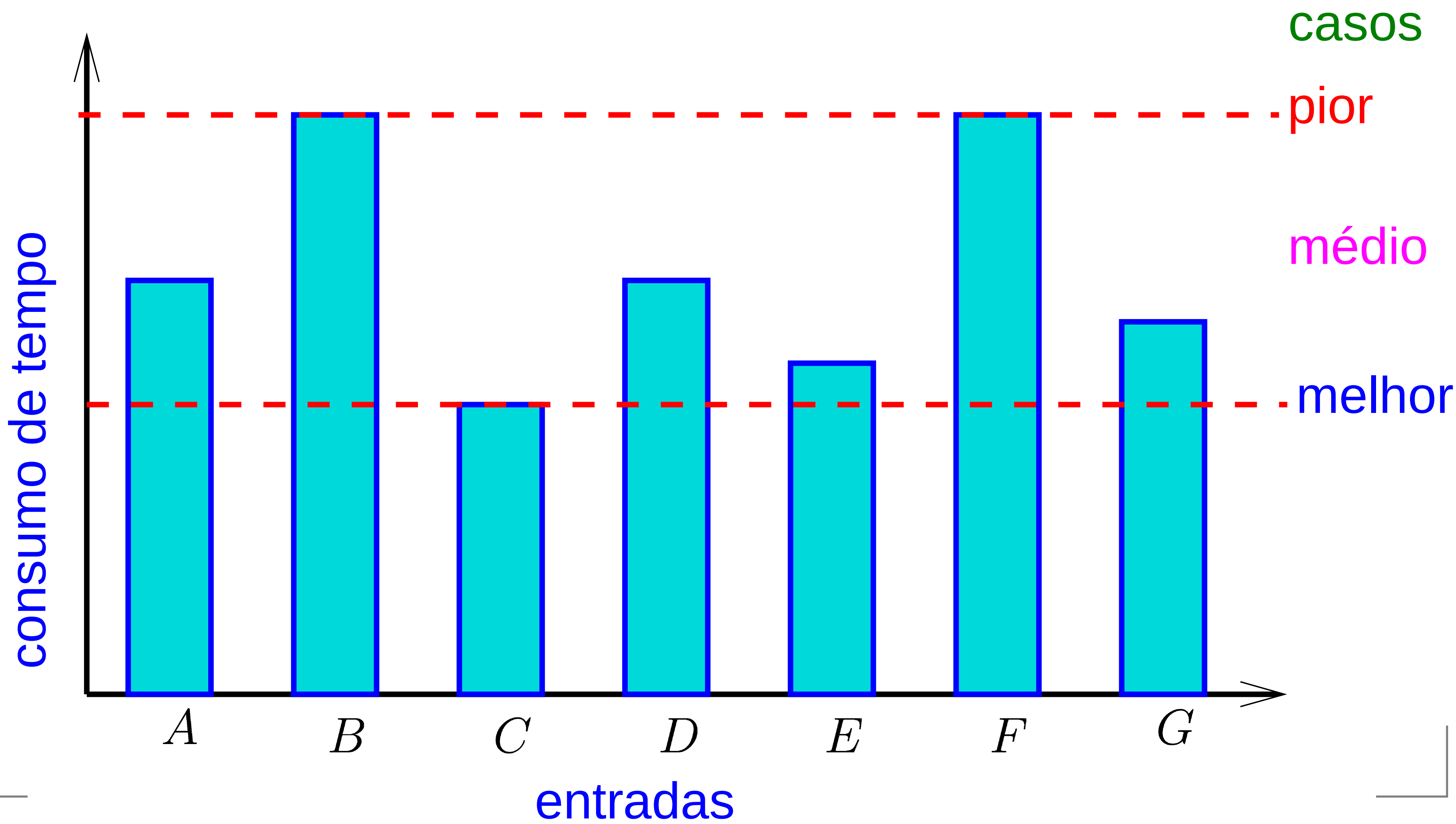
Exercício 6.B
Mostre que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\Omega(n^2)$
no pior caso.

Exercício 6.C
Mostre que ORDENA-POR-INSERÇÃO é $\mathrm{O}(n)$
no melhor caso.

Consumo de tempo

Mínimo, médio ou máximo?

Melhor caso, caso médio, pior caso?



AULA 4

Recursão (continuação)

CLRS 2.3
AU 2.6, 2.7, 2.9

"To understand recursion, we must first understand recursion.”

Merge-Sort

Rearranja $A[p \,..\, r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
se $p < r$
  então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
    MERGE-SORT (A, p, q)
    MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
    INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	55	33	66	44	99	11	77	22	88

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
se $p < r$
  então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
    MERGE-SORT (A, p, q)

    MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
    INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	77	22	88

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	33	44	55	66	99	11	22	77	88

Merge-Sort

Rearranja $A[p \,..\, r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

	p				q				r
A	11	22	33	44	55	66	77	88	99

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

O algoritmo está correto?

Merge-Sort

Rearranja $A[p\,..\,r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
    se $p < r$
        então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
            MERGE-SORT (A, p, q)
            MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
            INTERCALA (A, p, q, r)

O algoritmo está correto?
A correção do algoritmo, que se apóia na correção do INTERCALA, pode ser demonstrada por indução em $n := r - p + 1$.

Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{.\,.} r]$, com $p \leq r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
se $p < r$
  então $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
    MERGE-SORT (A, p, q)
    MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
    INTERCALA (A, p, q, r)

Consumo de tempo?

Merge-Sort

Rearranja $A[p \mathinner{..} r]$, com $p \le r$, em ordem crescente.

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGE-SORT (A, p, q)
4 MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

Consumo de tempo?

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

Merge-Sort

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGE-SORT (A, p, q)
4 MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

linha	consumo na linha
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$T(n) = ?$

Merge-Sort

MERGE-SORT (A, p, r)
1 **se** $p < r$
2 **então** $q \leftarrow \lfloor (p + r)/2 \rfloor$
3 MERGE-SORT (A, p, q)
4 MERGE-SORT $(A, q + 1, r)$
5 INTERCALA (A, p, q, r)

linha	consumo na linha
1	$\Theta(1)$
2	$\Theta(1)$
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	$\Theta(n)$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n + 2)$$

Merge-Sort

$T(n)$:= consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Demonstração: ...

Merge-Sort

$T(n) :=$ consumo de tempo máximo quando $n = r - p + 1$

$$T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + \Theta(n) \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Solução: $T(n)$ é $\Theta(???)$.

Demonstração: $\ldots$

Veremos, mas antes estudaremos Recorrências.

Exercícios

Exercício 7.A

Problema: verificar se v é elemento de $A[p \mathinner{.\,.} r]$.
(Para quais valores de p e r faz sentido?)
Escreva um algoritmo recursivo que resolve o problema. O algoritmo deve devolver i tal que $A[i] = v$.

Exercício 7.B

Problema: verificar se v é elemento de vetor crescente $A[p \mathinner{.\,.} r]$. Escreva algoritmo recursivo de busca “linear” e outro de busca “binária”.

Exercício 7.C

Escreva versão recursiva da ordenação por inserção. O algoritmo deve rearranjar em ordem crescente qualquer vetor dado $A[p \mathinner{.\,.} r]$.

Mais exercícios

Exercício 7.D (Versão sofisticada de busca)
Problema: verificar se v é elemento de vetor crescente $A[p \mathrel{..} r]$. Escreva um algoritmo que devolva j tal que

$$A[j] \leq v < A[j+1] \, .$$

Quais os possíveis valores de j? Escreva duas versões: uma “linear” e uma “binária”. Prove que os seus algoritmos estão corretos.

Exercício 7.E
Escreva uma versão recursiva do algoritmo de ordenação por seleção.

Exercício 7.F
Escreva uma versão iterativa do MERGE-SORT.

Recorrências

CLRS 4.1–4.2

AU 3.9, 3.11

Recorrências

Recorrência =

= "fórmula" que define uma função
em termos d'ela mesma

= algoritmo recursivo que calcula uma função

Exemplo 1

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Define função T sobre inteiros positivos:

n	1	2	3	4	5	6
$T(n)$	1	9	20	34	51	71

$T(n)$
se $n = 1$
    então devolva 1
    senão devolva $T(n-1) + 3n + 2$

Resolver uma recorrência

Resolver uma recorrência =

= obter uma “fórmula fechada” para $T(n)$

Método da substituição:

“chute” fórmula e verifique por indução

Exemplo 1 (continuação)

Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

Exemplo 1 (continuação)

Eu acho que $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$.

Verificação:

Se $n = 1$ então $T(n) = 1 = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} - 4$.

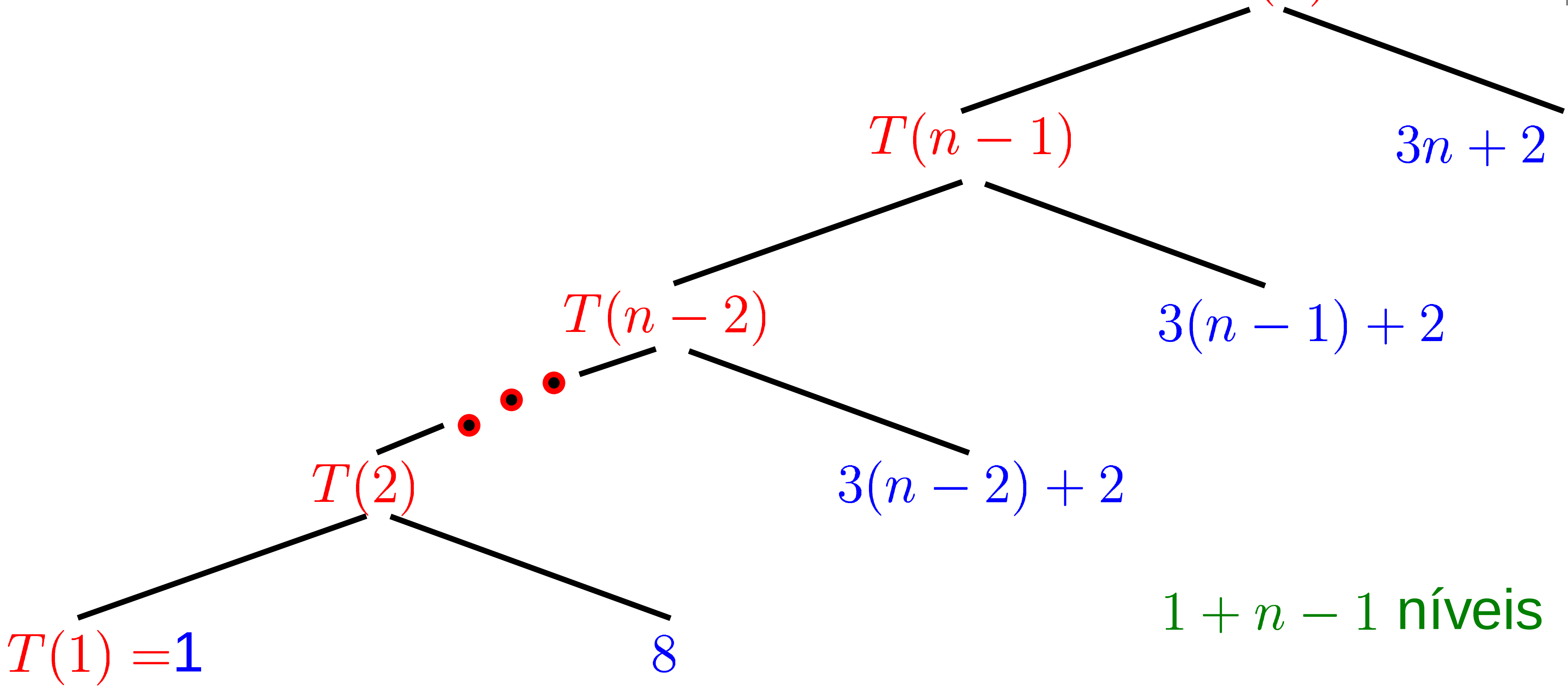
Tome $n \geq 2$ e suponha que a fórmula está certa para $n - 1$:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n-1) + 3n + 2 \\
&\overset{\text{hi}}{=} \tfrac{3}{2}(n-1)^2 + \tfrac{7}{2}(n-1) - 4 + 3n + 2 \\
&= \tfrac{3}{2}n^2 - 3n + \tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{2}n - \tfrac{7}{2} - 4 + 3n + 2 \\
&= \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{7}{2}n - 4\,.
\end{aligned}
$$

Bingo!

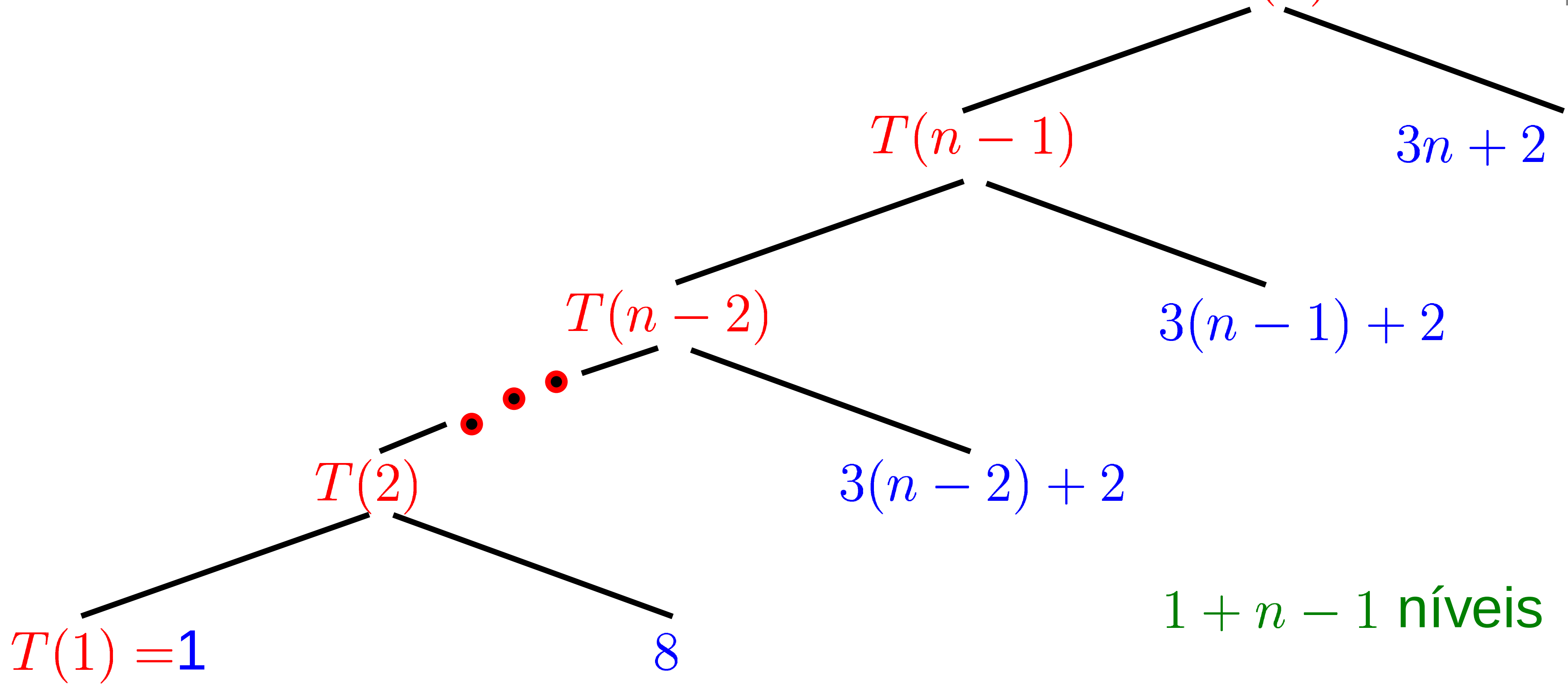
Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



$$T(n) = (3n+2) + (3n-1) + \cdots + 8 + 1$$
$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 4$$

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2T(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots
\end{aligned}
$$

Exemplo 2

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Não é uma recorrência! Não faz sentido!
$T(3)$ depende de $T(3/2)$...

Exemplo 3

$$\begin{aligned} G(1) &= 1 \\ G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16\ldots, 2^i, \ldots \end{aligned}$$

n	1	2	4	8	16
$G(n)$	1	18	66	190	494

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
G(1) &= 1 \\
G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \quad \text{para } n = 2, 4, 8, 16 \ldots, 2^i, \ldots
\end{aligned}
$$

n	1	2	4	8	16
$G(n)$	1	18	66	190	494

Fórmula fechada: $G(n) =$???

Hmmmmmm

Acho que $G(n)$ é da forma $n \lg n$ ...

n	$G(n)$	$6n \lg n$	$7n \lg n$	$8n \lg n$	n^2
1	1	0	0	0	1
2	18	12	14	16	4
4	66	48	56	64	16
8	190	144	168	192	64
16	494	384	448	512	256
32	1214	960	1120	1280	1024
64	2878	2304	2688	3072	4096
128	6654	5376	6272	7168	16384
256	15102	12288	14336	16384	65536

Chute

Acho que a fórmula fechada é

$$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$$

para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Lá vamos nós outra vez. . .

Chute

$G(n) = 7n \lg n + 3n - 2$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$

Chute

$G(n) = 7n\lg n + 3n - 2$ para $n = 1, 2, 4, 8, 16, 32\ldots$

Prova: Se $n = 1$ então $G(n) = 1 = 7 \cdot 1 \lg 1 + 3 \cdot 1 - 2$.
Se $n \geq 2$ então

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 2G(\tfrac{n}{2}) + 7n + 2 \\
&\overset{\text{hi}}{=} 2\left(7\tfrac{n}{2}\lg\tfrac{n}{2} + 3\,\tfrac{n}{2} - 2\right) + 7n + 2 \\
&= 7n(\lg n - 1) + 3n - 4 + 7n + 2 \\
&= 7n\lg n - 7n + 3n - 2 + 7n \\
&= 7n\lg n + 3n - 2
\end{aligned}
$$

Iiiiiééééssss!

Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência: $G(n)$

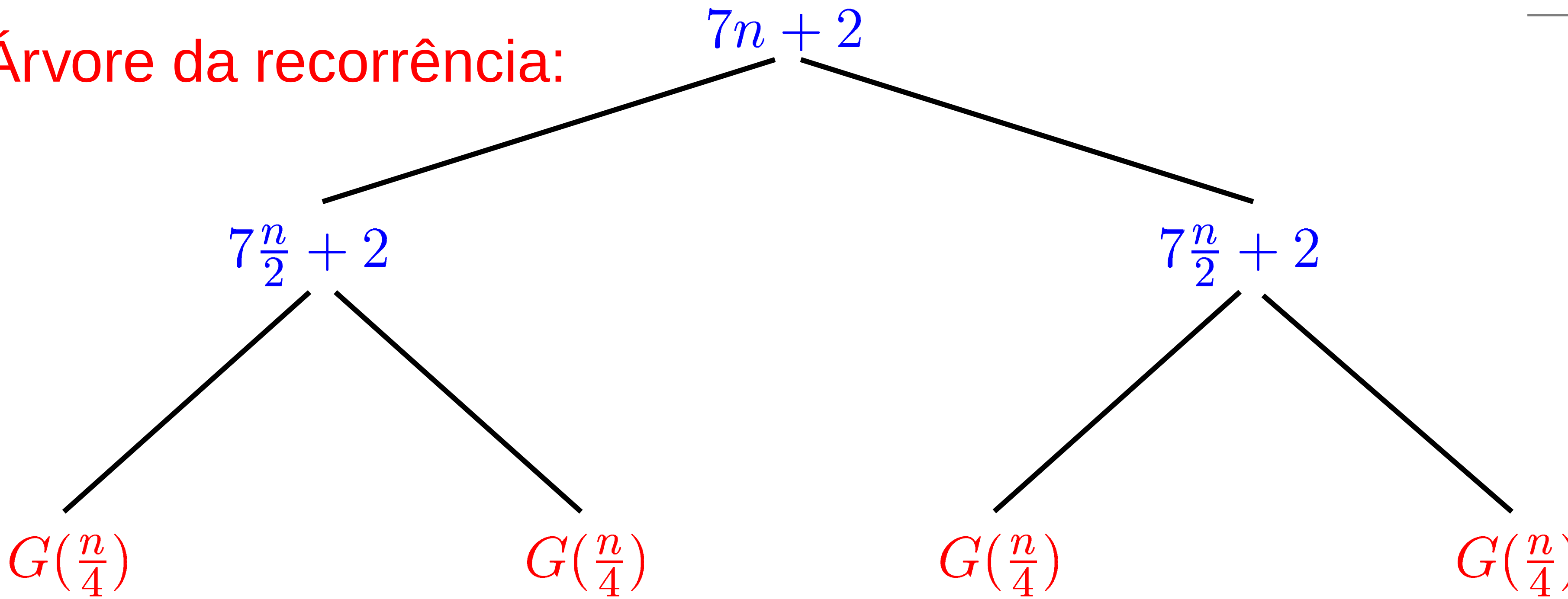
Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência: $7n + 2$

$G(\frac{n}{2})$ $G(\frac{n}{2})$

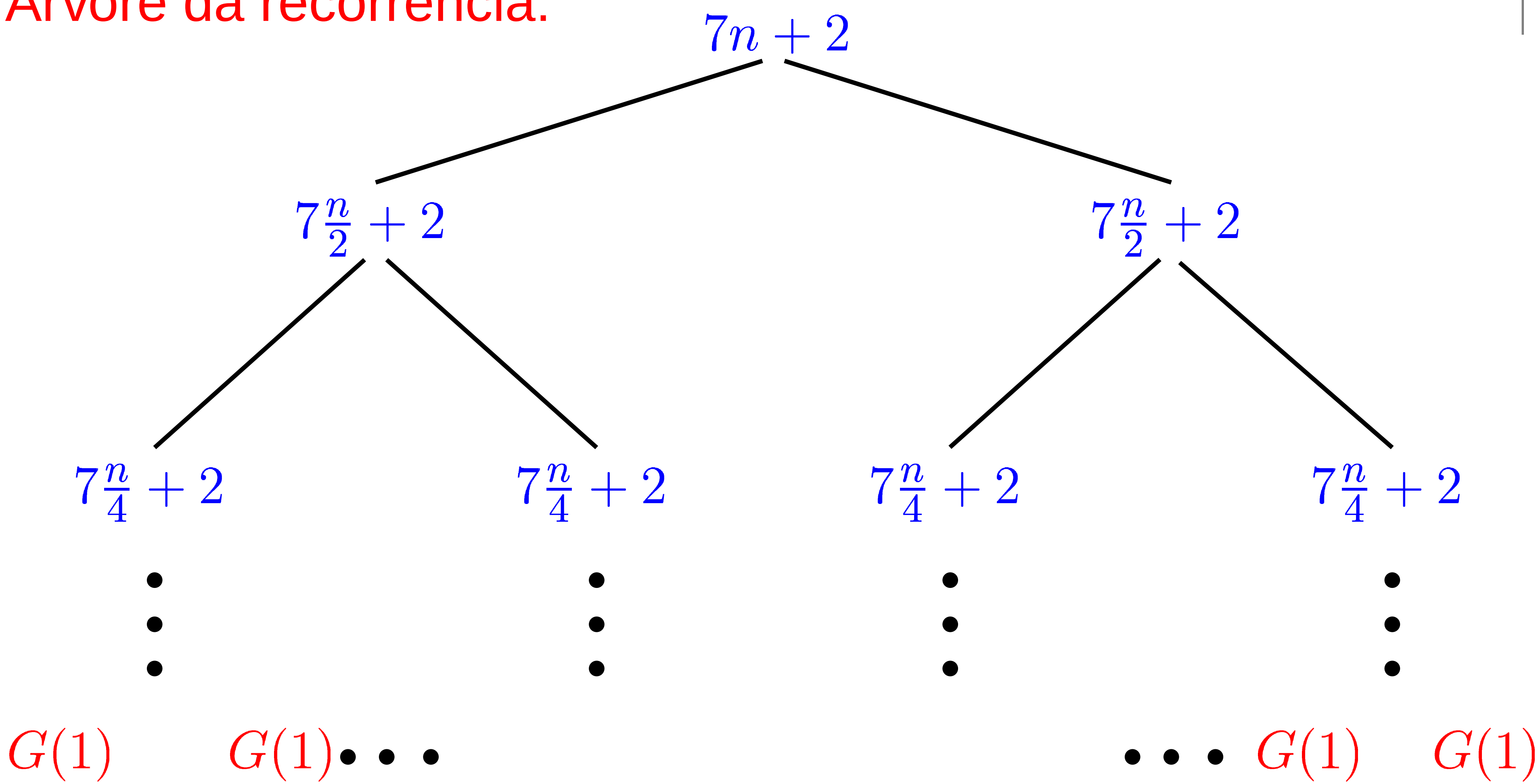
Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



Como adivinhei fórmula fechada?

Árvore da recorrência:



total de $1 + lgn$ níveis

Contas

nível	0	1	2	$\ldots$	$k-1$	k
soma	$7n+2$	$7n+4$	$7n+8$	$\ldots$	$7n+2^k$	$2^k G(1)$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

Contas

nível	0	1	2	$\dots$	$k-1$	k
soma	$7n+2$	$7n+4$	$7n+8$	$\dots$	$7n+2^k$	$2^k G(1)$

$n = 2^k \qquad k = \lg n$

$$
\begin{aligned}
G(n) &= 7n + 2^1 + 7n + 2^2 + \cdots + 7n + 2^k + 2^k G(1) \\
&= 7n\,k + (2 + 4 + \cdots + 2^k) + 2^k \\
&= 7n\,k + 2 \cdot 2^k - 2 + n \\
&= 7n \lg n + 2n - 2 + n \quad (k = \lg n) \\
&= 7n \lg n + 3n - 2 \qquad \text{(-1)}
\end{aligned}
$$

Iiiiééééssss

Série geométrica

Para $x \neq 1$, quanto vale $1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k$?

(CLRS (A.5), p.1060)

Solução: Seja $S_k := 1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k$.
Temos que $xS_k = x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^k + x^{k+1}$.
Logo,

$$xS_k - S_k = x^{k+1} - 1$$

e

$$S_k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Conclusão:

$$\boxed{1 + x^1 + x^2 + \cdots + x^{k-1} + x^k = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}.}$$

Exemplo 3 (continuação)

É mais fácil mostrar que $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.

Vou provar que $G(n) \leq 9n \lg n$ para $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots$

Exemplo 3 (continuação)

É mais fácil mostrar que $G(n) = \mathrm{O}(n \lg n)$.
Vou provar que $G(n) \leq 9n \lg n$ para $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^i, \ldots$

Prova: Se $n = 2$, $G(n) = 18 = 9 \cdot 2 \cdot \lg 2$.
Se $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} G(n) &= 2G(n/2) + 7n + 2 \\ &\overset{\text{hi}}{\leq} 2 \cdot 9(n/2) \lg(n/2) + 7n + 2 \\ &= 9n\,(\lg n - 1) + 7n + 2 \\ &= 9n \lg n - 2n + 2 \\ &< 9n \lg n \quad \text{(pois } n > 1\text{)} \end{aligned}$$

Da linha 1 para a linha 2, a hipótese de indução vale pois $2 \leq n/2 < n$.

Exercícios

Exercício 8.A

Seja T a função definida pela recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-1) + 2n - 2 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \cdots \end{aligned}$$

Verifique que a recorrência é honesta, ou seja, de fato define uma função. A partir da árvore da recorrência, adivinhe uma boa delimitação assintótica para $T(n)$; dê a resposta em notação O. Prove a delimitação pelo método da substituição.

Exercício 8.B

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n-2) + 2n + 1 \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \cdots \end{aligned}$$

Desenhe a árvore da recorrência. Dê a resposta em notação O.

Mais exercícios

Exercício 8.C

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(2) &= 2 \\ T(n) &= T(n-2) + 2n + 1 \quad \text{para } n = 3, 4, 5, 6, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.D

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(n/2) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Exercício 8.E

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots \end{aligned}$$

Mais exercícios ainda

Exercício 8.F

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Exercício 8.G

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Exercício 8.H

Resolva a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lceil n/2 \rceil) + n \qquad \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$