Melhores momentos

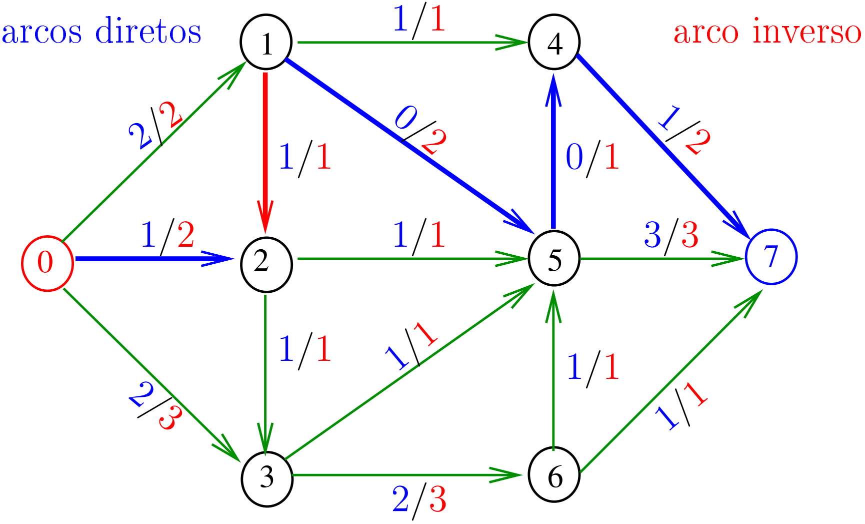
AULA 24

Caminho de aumento

Um **caminho de aumento** (= *augmenting path*) é um pseudo-caminho do vértice inicial ao final onde:

- os arcos diretos não estão cheios e
- os arcos inversos não estão vazios.

Exemplo

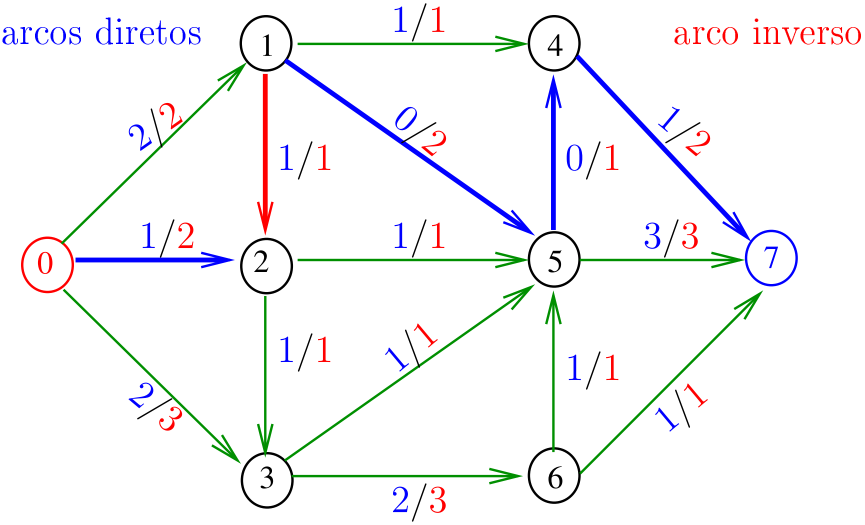

arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
0/1
1/2
3/3
1/1
2/3
1/1
1/1

Enviar fluxo através de caminhos de aumento

A operação de **enviar** `d` unidades de fluxo ao longo de um caminho de aumento consiste de:

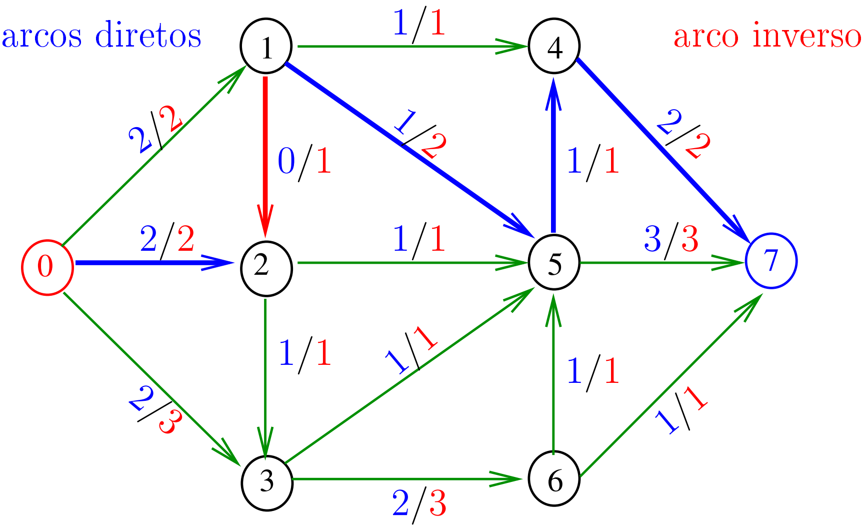
- para cada arco direto, some `d` ao fluxo
- para cada arco inverso, subtraia `d` do fluxo.

Exemplo



arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
2/2
1/2
2/3
1/1
0/2
1/1
1/1
1/1
1/1
0/1
1/2
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3

Exemplo

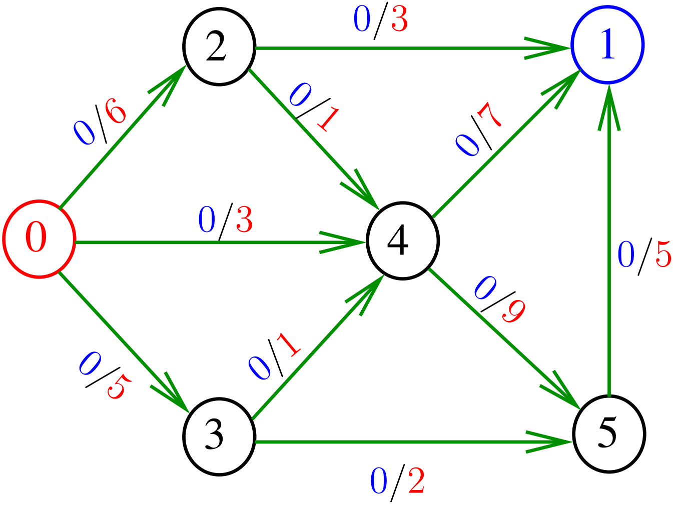


arcos diretos
arco inverso
0
1
2
3
4
5
6
7
1/1
2/2
0/1
1/2
2/2
1/1
2/2
1/1
3/3
1/1
1/1
1/1
2/3
1/1
1/1
2/3

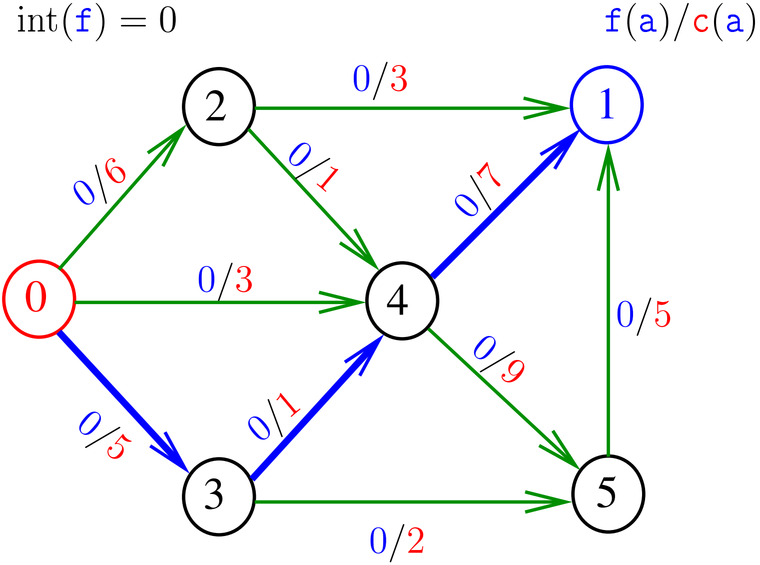
Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 0$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$

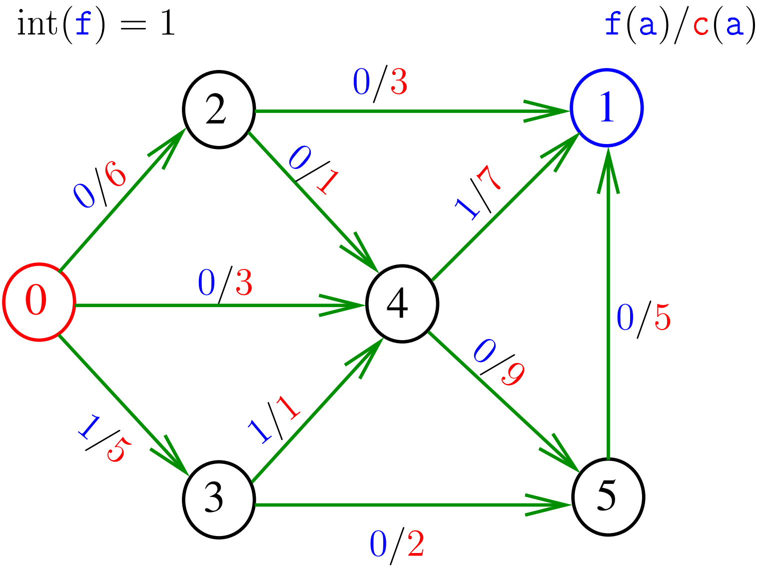


Método de Ford-Fulkerson



Método de Ford-Fulkerson

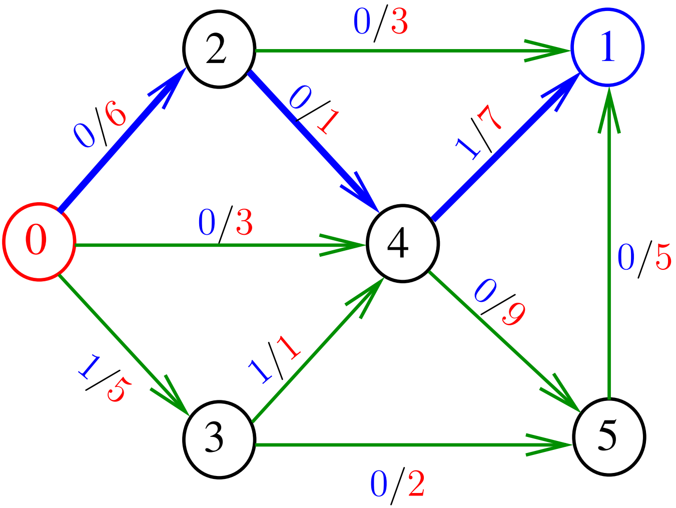
$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$



Método de Ford-Fulkerson

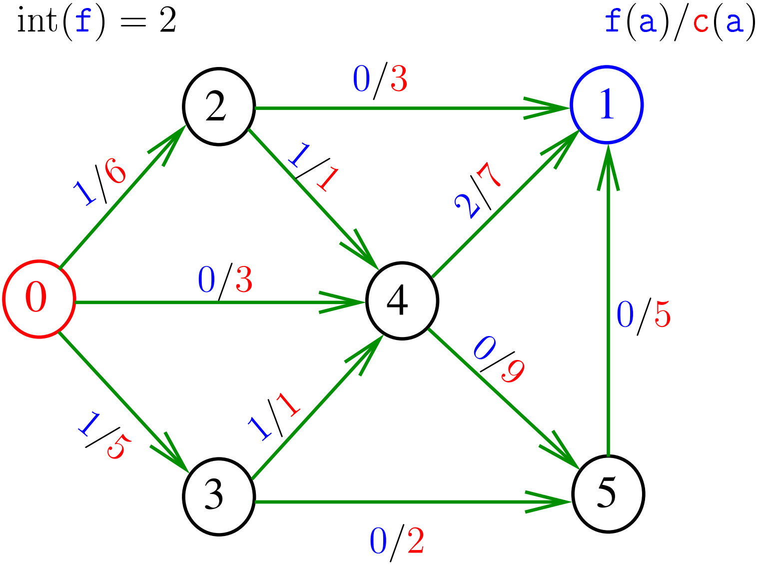
$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



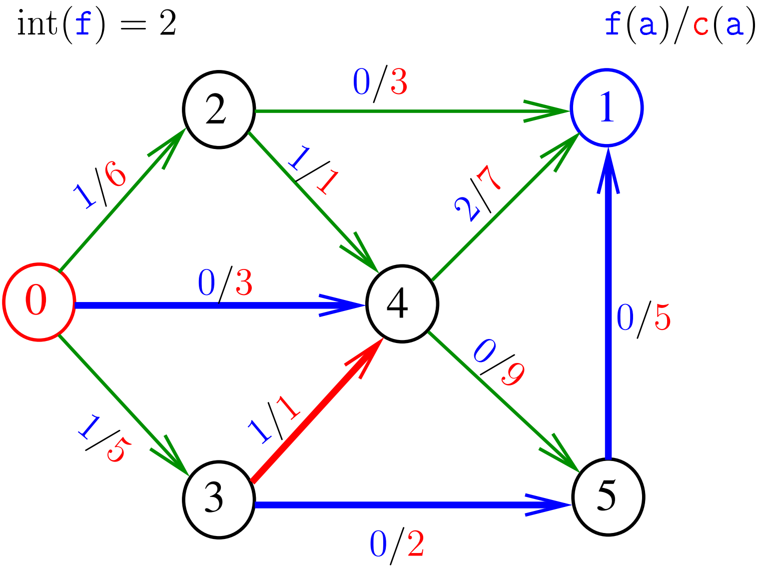
Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 2$



Método de Ford-Fulkerson

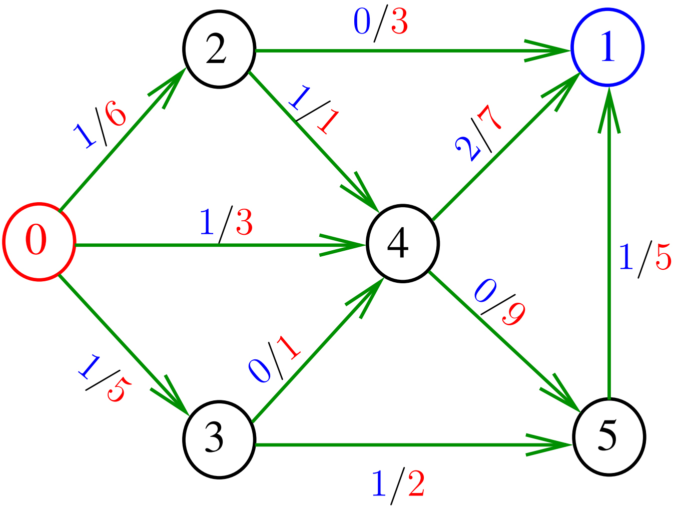
$\text{int}(\texttt{f}) = 2$



Método de Ford-Fulkerson

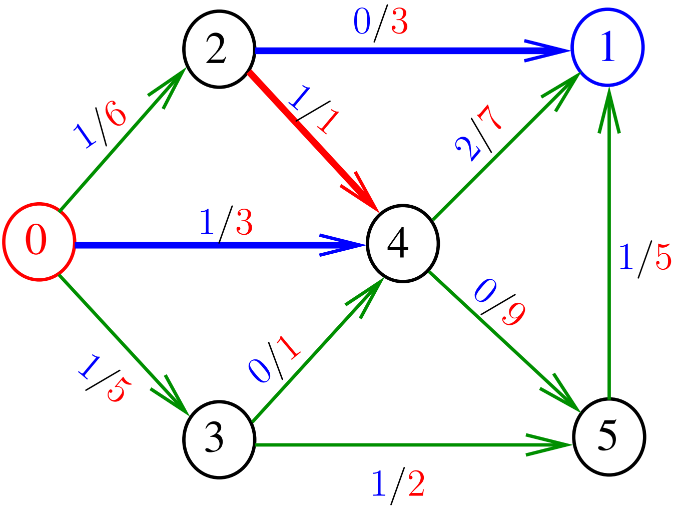
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 3$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



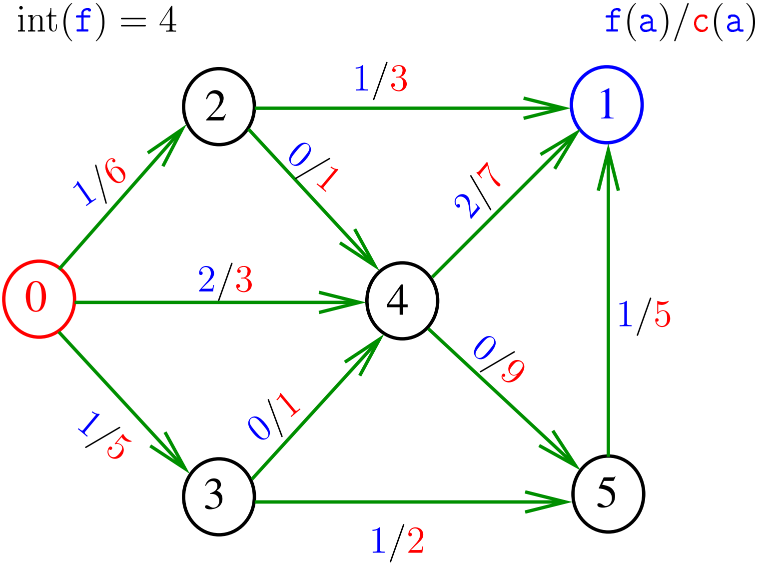
Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 3$



Método de Ford-Fulkerson

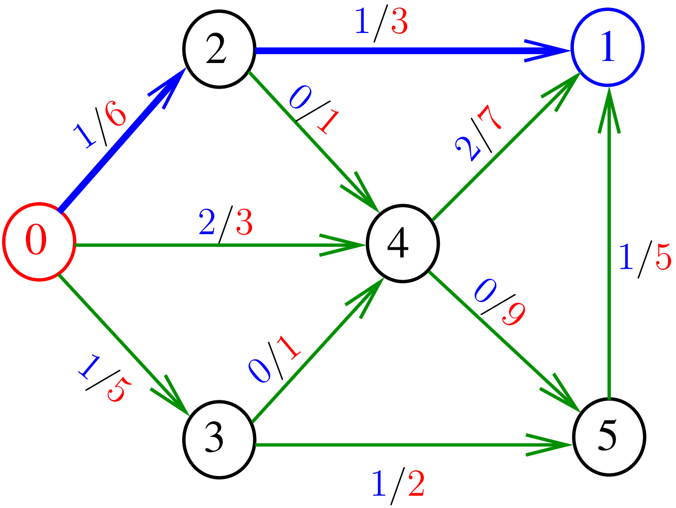
$\text{int}(\mathtt{f}) = 4$



Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 4$

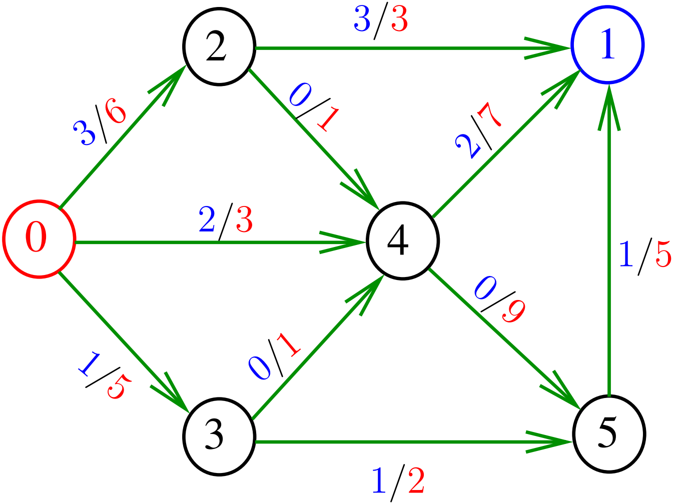
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Método de Ford-Fulkerson

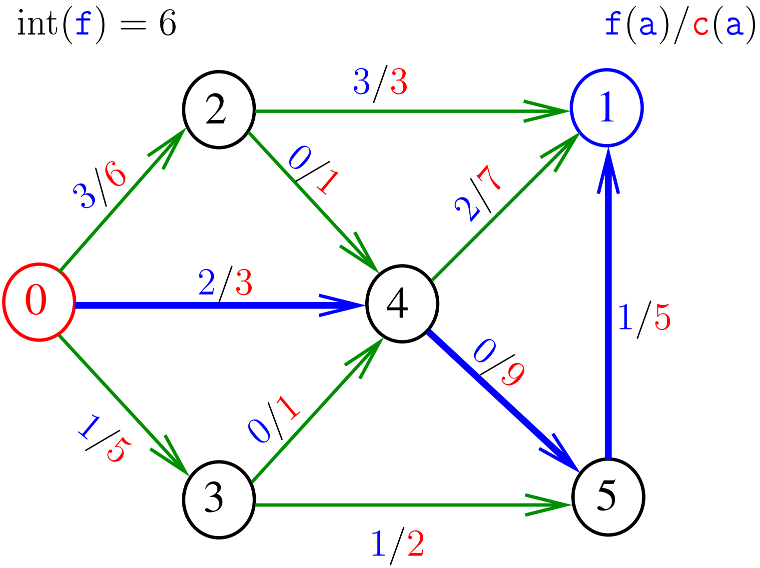
$\text{int}(\mathtt{f}) = 6$

$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



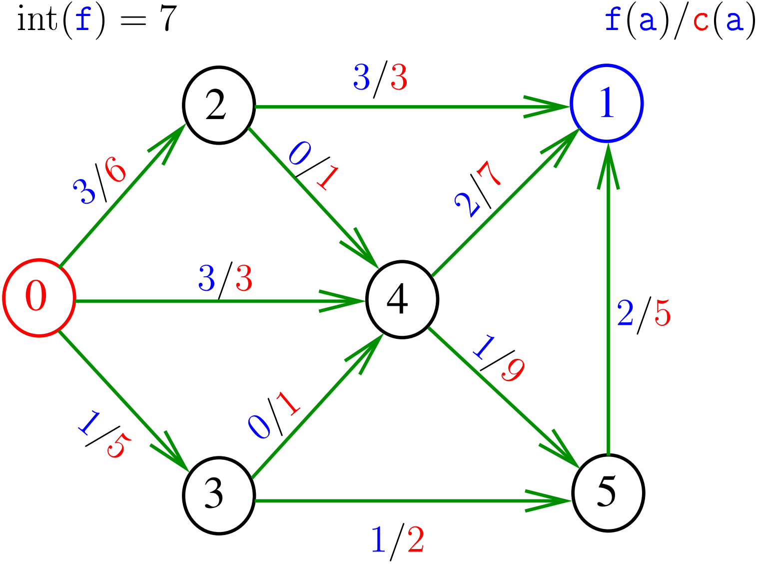
Método de Ford-Fulkerson

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 6$



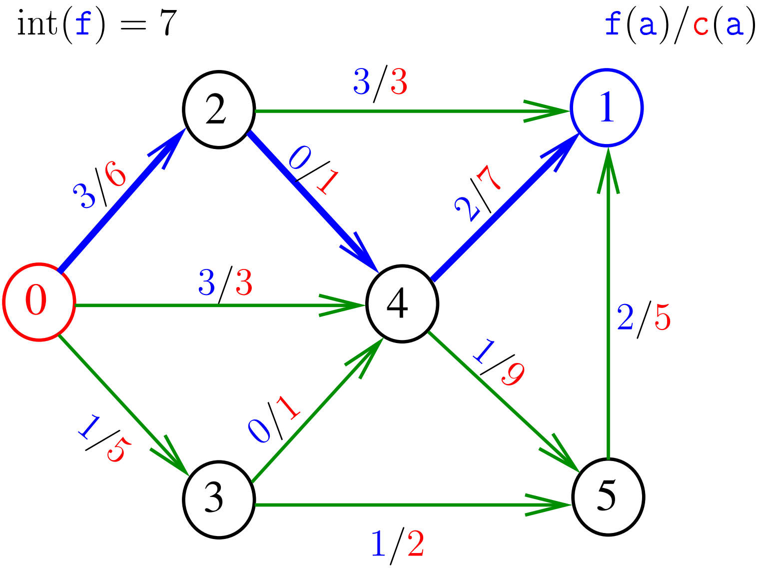
Método de Ford-Fulkerson

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 7$



Método de Ford-Fulkerson

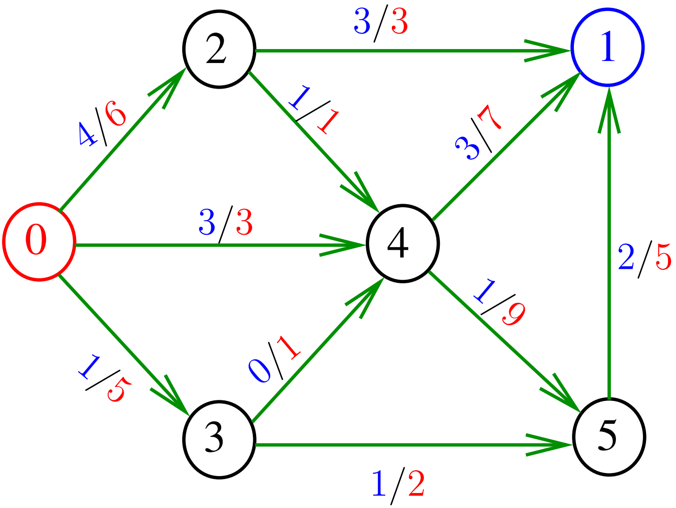
$\text{int}(\mathtt{f}) = 7$



Método de Ford-Fulkerson

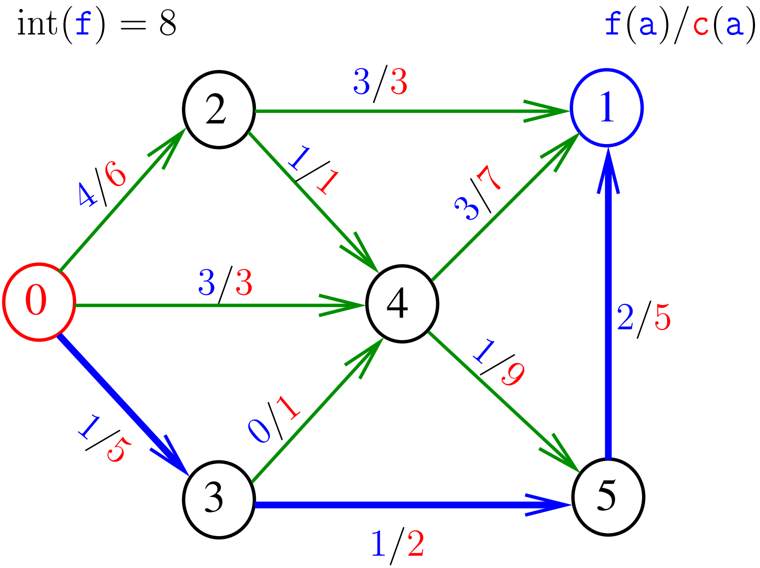
$\text{int}(\mathtt{f}) = 8$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Método de Ford-Fulkerson

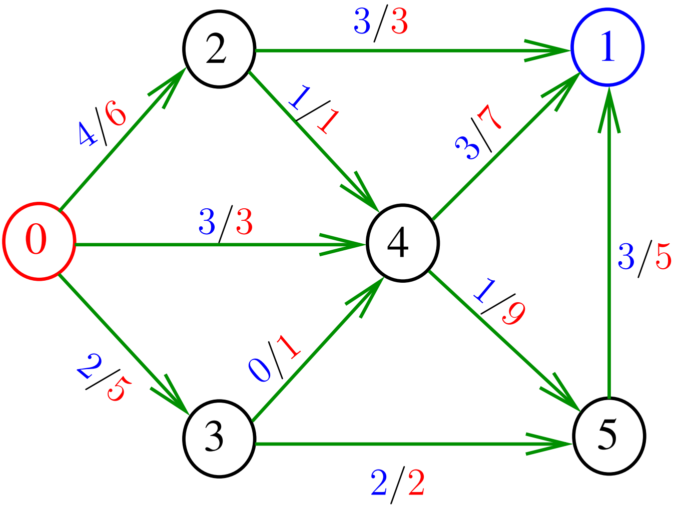
$\text{int}(\texttt{f}) = 8$



Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 9$

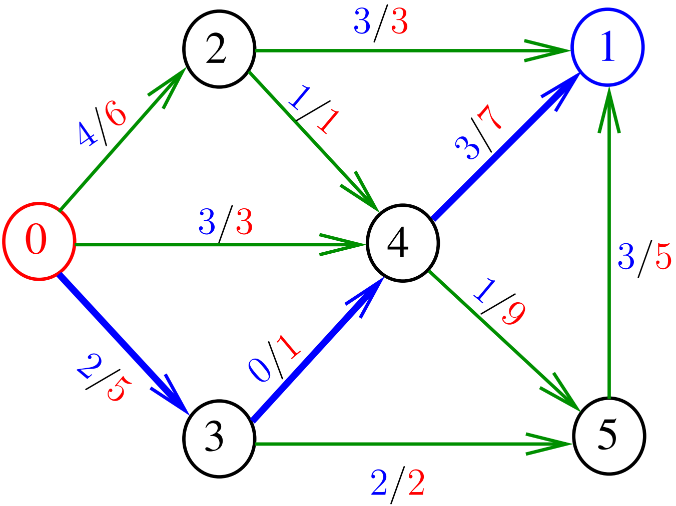
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Método de Ford-Fulkerson

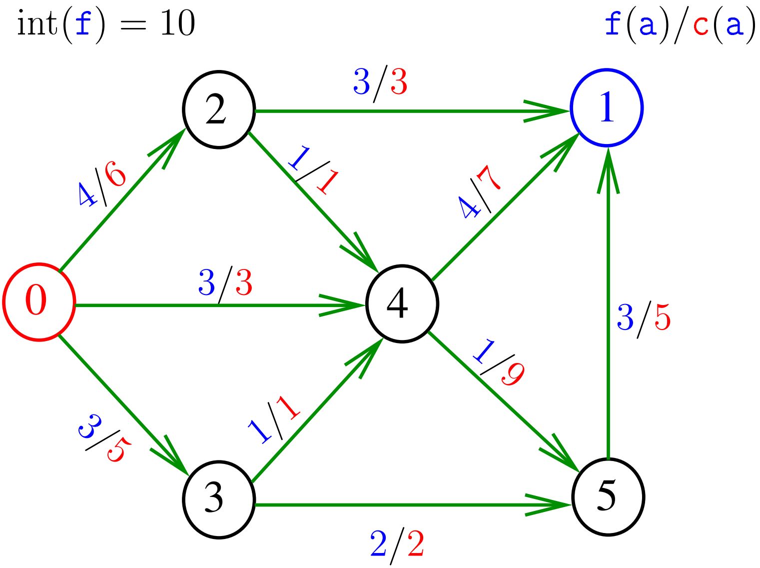
$\text{int}(\mathtt{f}) = 9$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



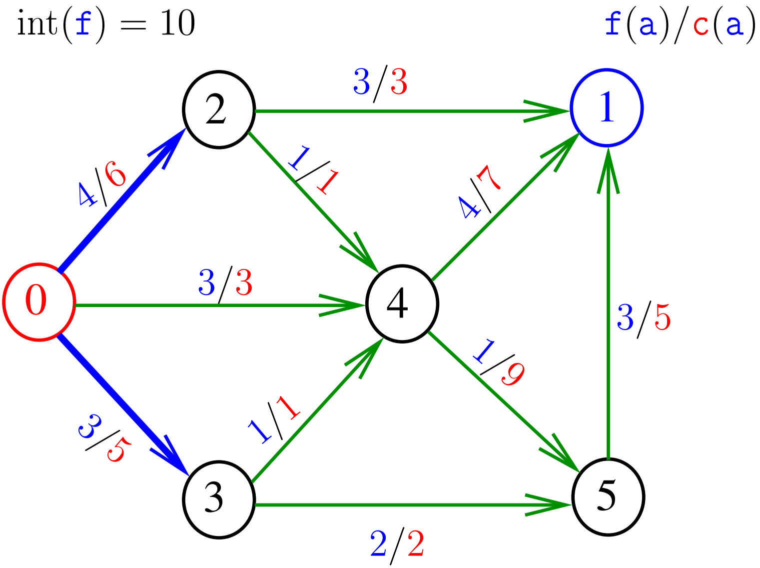
Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 10$

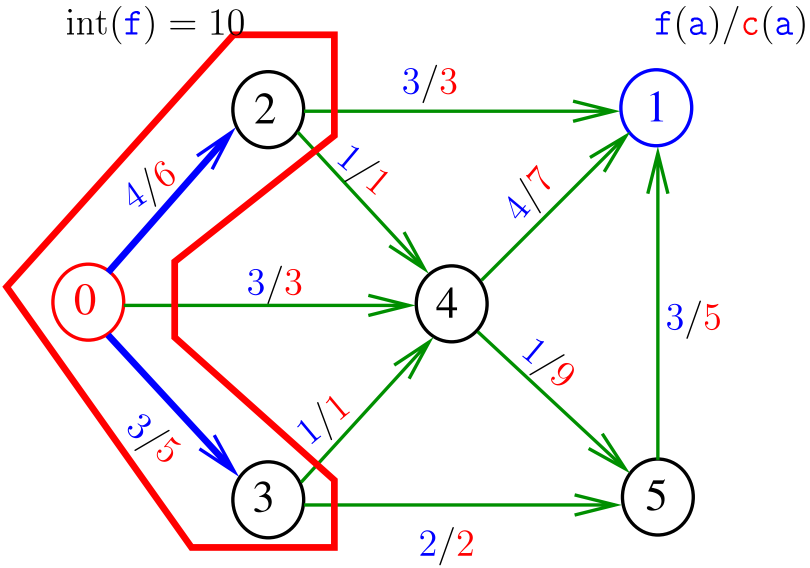


Método de Ford-Fulkerson

$\text{int}(\mathtt{f}) = 10$



Método de Ford-Fulkerson



Método dos caminhos de aumento

O método é iterativo. Cada iteração começa com uma fluxo $\mathtt{f}$ que respeita as capacidades.

No início da primeira iteração $\mathtt{f}$ é o fluxo nulo.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: **não existe** um caminho de aumento
Devolva $\mathtt{f}$ e pare

Caso 2: **existe** uma caminho de aumento
Seja $\mathtt{d}$ a capacidade residual de um caminho de aumento $\mathtt{P}$
Seja $\mathtt{f}'$ o fluxo obtido ao enviarmos $\mathtt{d}$ unidades de fluxo ao longo de $\mathtt{P}$
Comece nova iteração com $\mathtt{f}'$ no papel de $\mathtt{f}$

Relações invariantes

No início de cada iteração temos que:

(i0) f é inteiro;

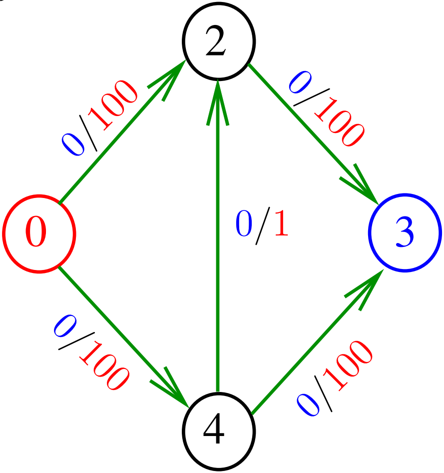
(i1) f é um fluxo;

(i2) f respeita c.

Número de iterações

$\text{int}(\mathtt{f}) = 0$

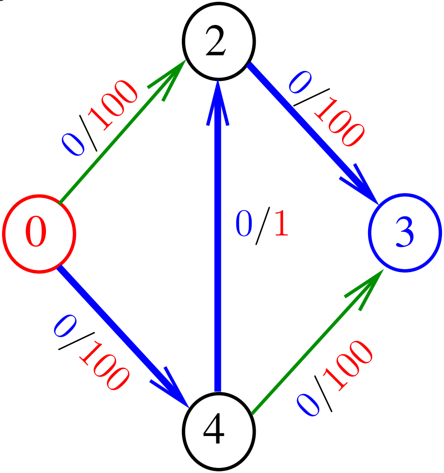
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 0$

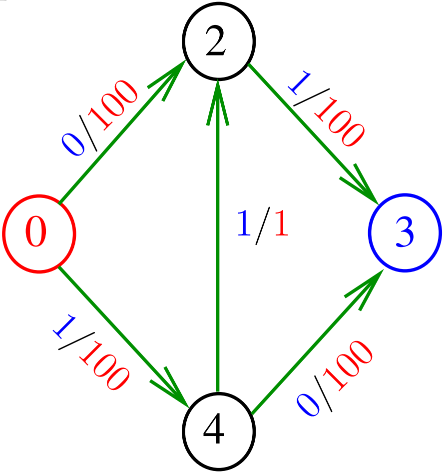
$\texttt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 1$

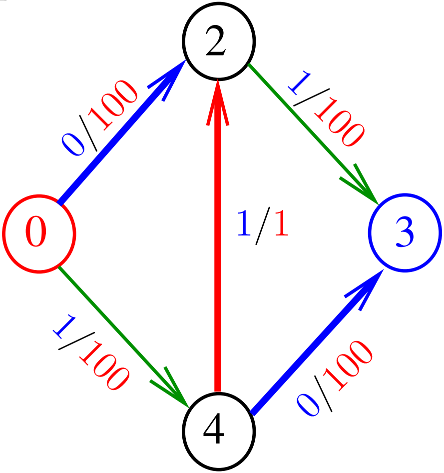
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\text{int}(\mathtt{f}) = 1$

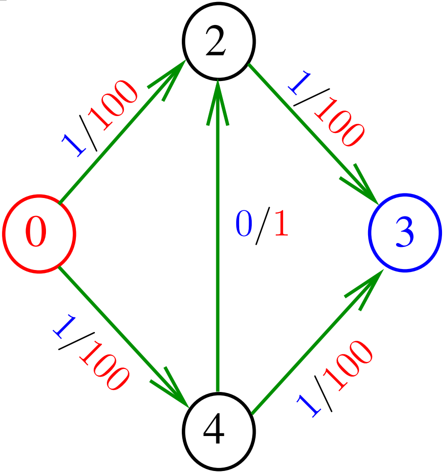
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 2$

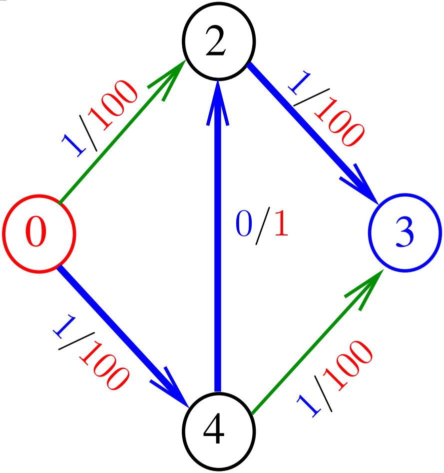
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\mathrm{int}(f) = 2$

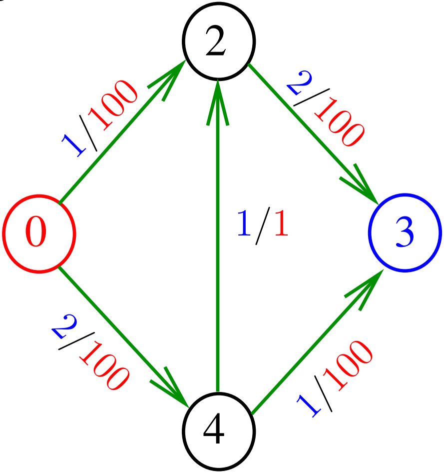
$f(a)/c(a)$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 3$

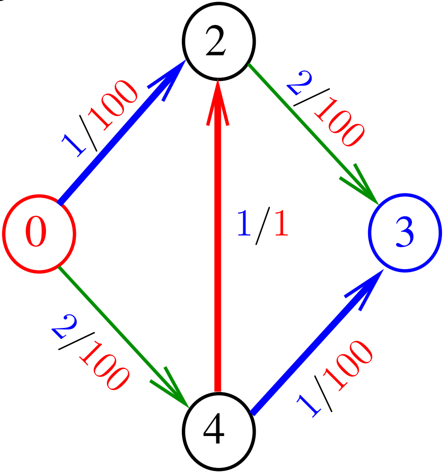
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 3$

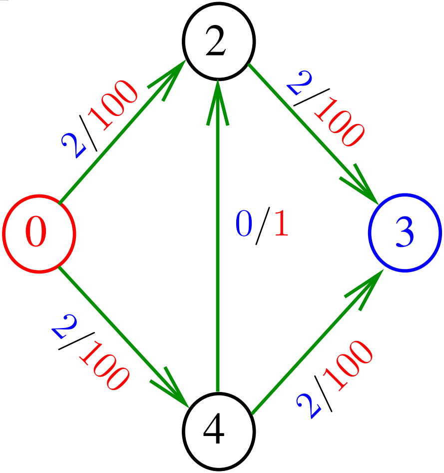
$\texttt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

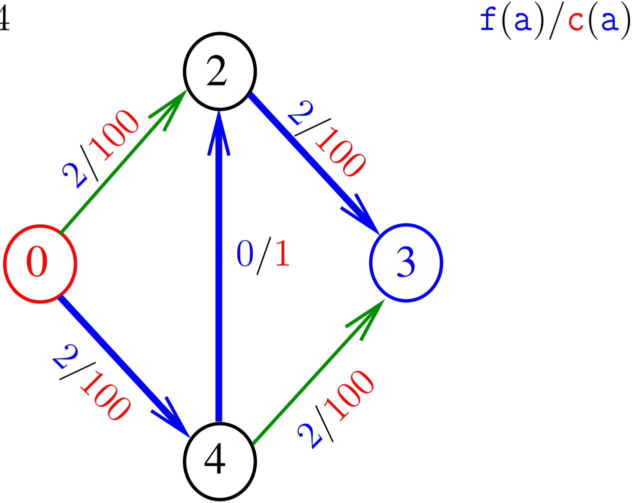
$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 4$

$\mathtt{f(a)/c(a)}$



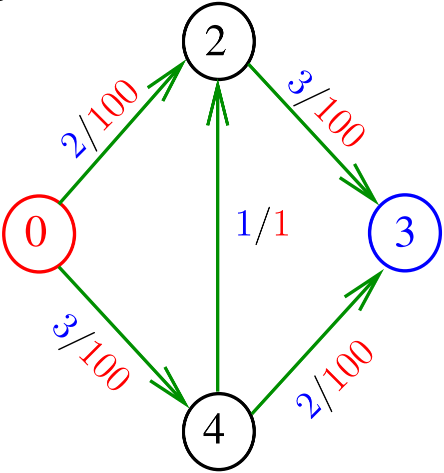
Número de iterações

$\text{int}(\mathtt{f}) = 4$



Número de iterações

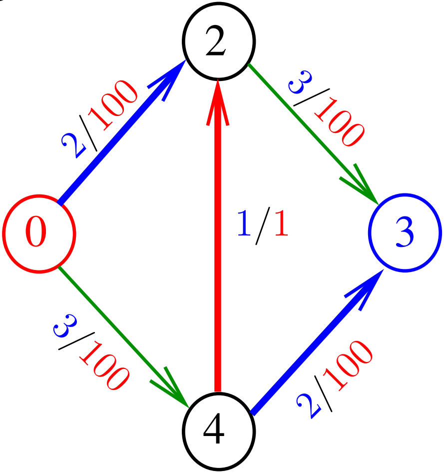
$\text{int}(\mathtt{f}) = 5$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 5$

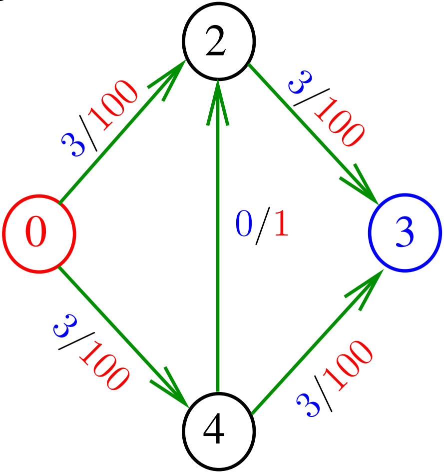
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 6$

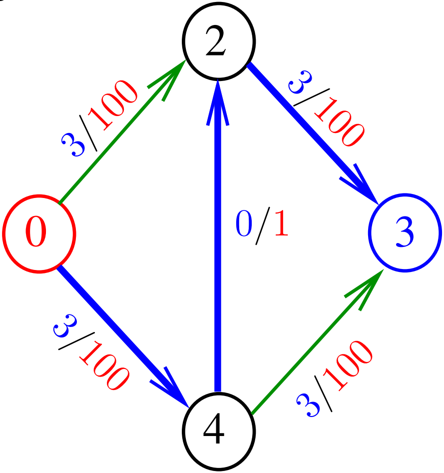
$\texttt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 6$

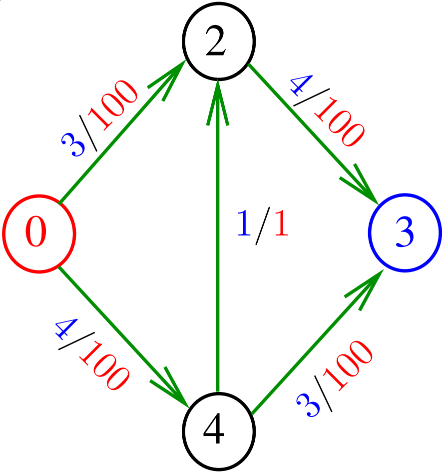
$\mathtt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\text{int}(\texttt{f}) = 7$

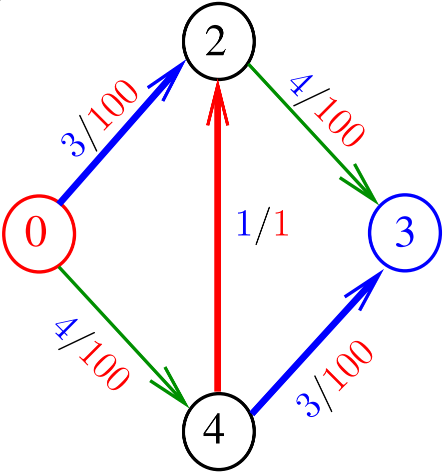
$\texttt{f(a)/c(a)}$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 7$

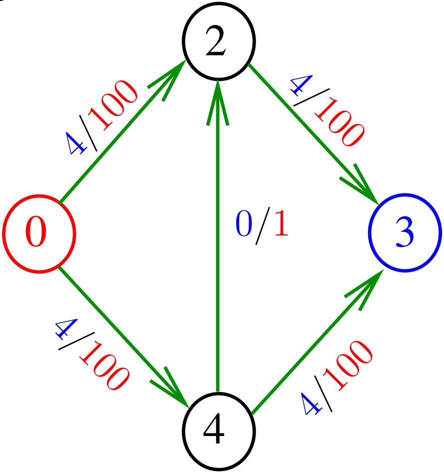
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Número de iterações

$\mathrm{int}(\mathtt{f}) = 8$

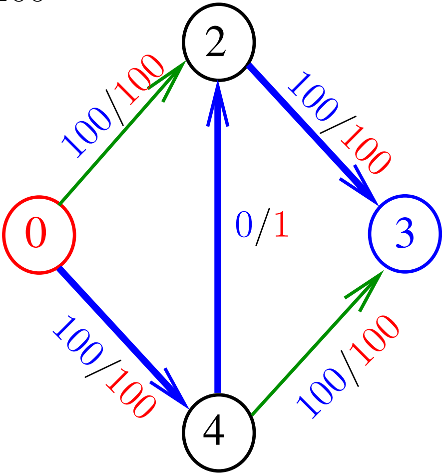
$\mathtt{f}(\mathtt{a})/\mathtt{c}(\mathtt{a})$



Fluxo máximo

$\mathrm{int}(\texttt{f}) = 100$

$\texttt{f(a)}/\texttt{c(a)}$



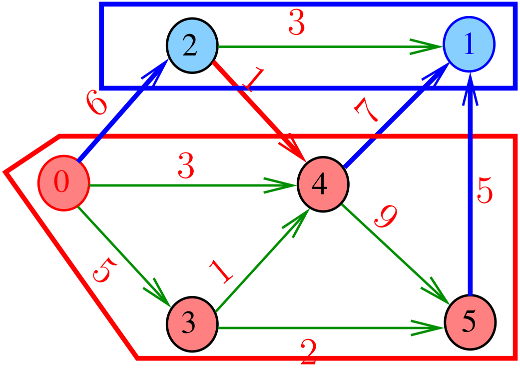
Número de iterações

Se todos os arcos da rede têm capacidade menor que $\texttt{M}$ então o número de caminhos de aumento necessário para atingir o fluxo máximo é menor que $\texttt{V} \times \texttt{M}$, sendo $\texttt{V}$ o número de vértices da rede.

Capacidade de um corte

Numa rede capacitada, a capacidade de um corte (S,T) é a soma das capacidades dos arcos diretos do corte.

Exemplo: corte de capacidade 18

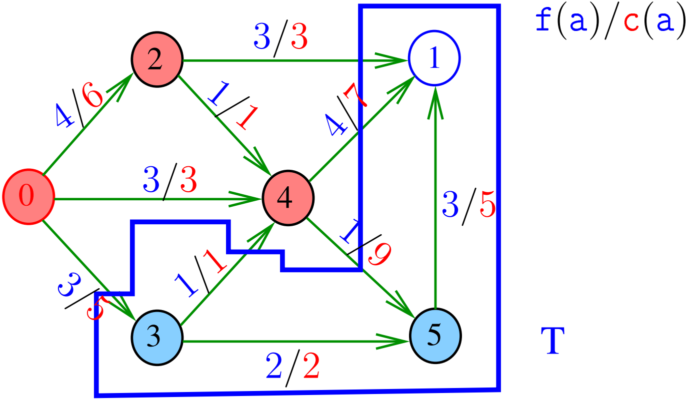


Lema da dualidade

Se $\mathtt{f}$ é um fluxo que respeita $\mathtt{c}$ e $(\mathtt{S}, \mathtt{T})$ é um corte então

intensidade de $f \leq$ *capacidade de* (S, T).

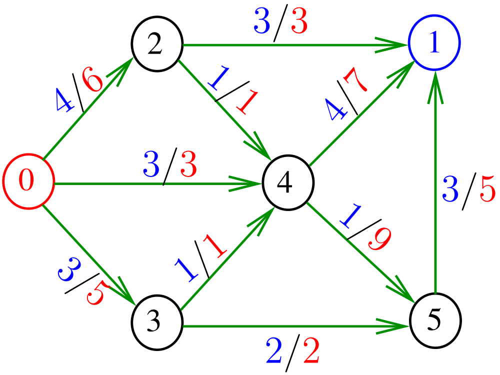
Exemplo: $\text{int}(\mathtt{f}) = 10 \leq 24 = \mathtt{c}(\mathtt{S}, \mathtt{T})$.



Conseqüência

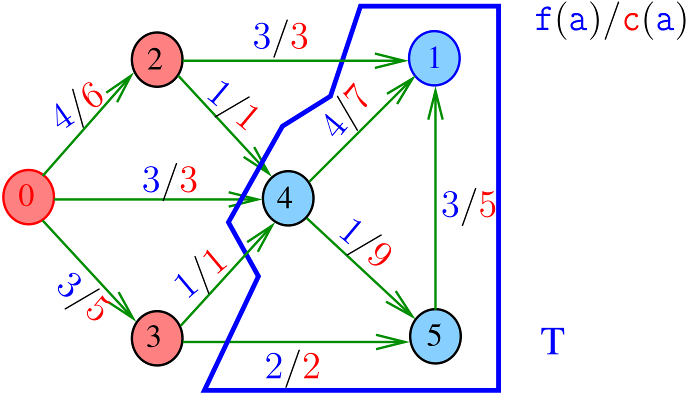
Se $\texttt{f}$ é um fluxo que respeita $\texttt{c}$ e $(\texttt{S}, \texttt{T})$ é um corte tais que intensidade de $\texttt{f}$ $=$ capacidade de $(\texttt{S},\texttt{T})$. então $\texttt{f}$ é um fluxo de máximo e $(\texttt{S}, \texttt{T})$ é um corte de capacidade mínima.

$\texttt{f(a)/c(a)}$

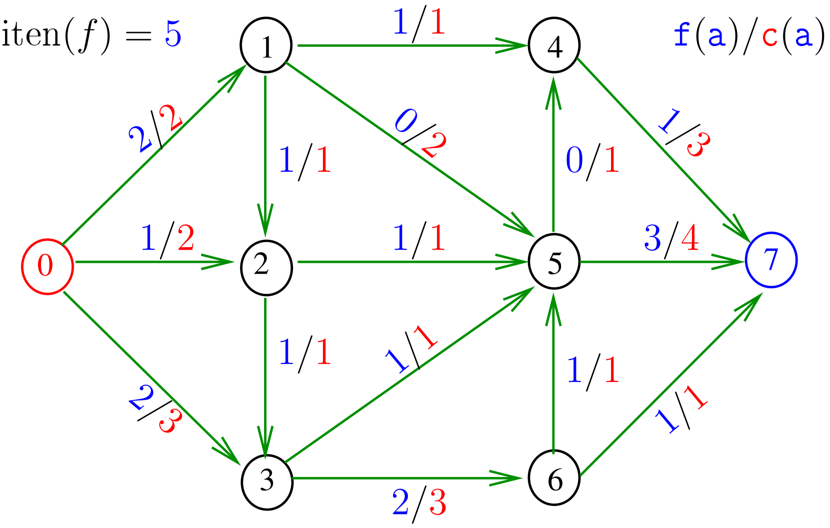


Conseqüência

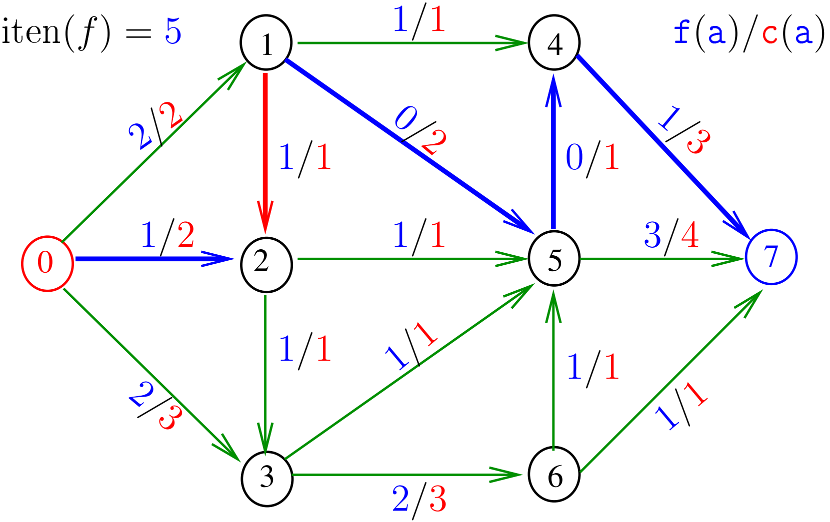
Se $\mathtt{f}$ é um fluxo que respeita $\mathtt{c}$ e $(\mathtt{S}, \mathtt{T})$ é um corte tais que intensidade de $\mathtt{f}$ = capacidade de $(\mathtt{S},\mathtt{T})$. então $\mathtt{f}$ é um fluxo de máximo e $(\mathtt{S}, \mathtt{T})$ é um corte de capacidade mínima.



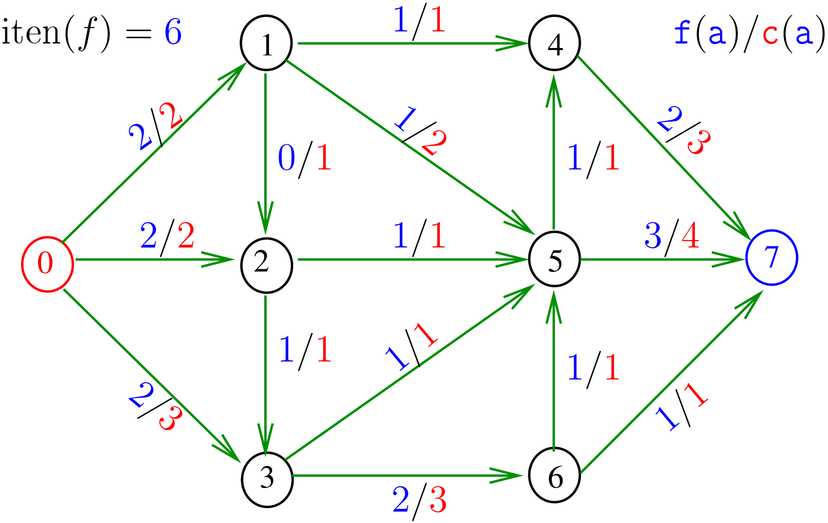
Fluxo é máximo?



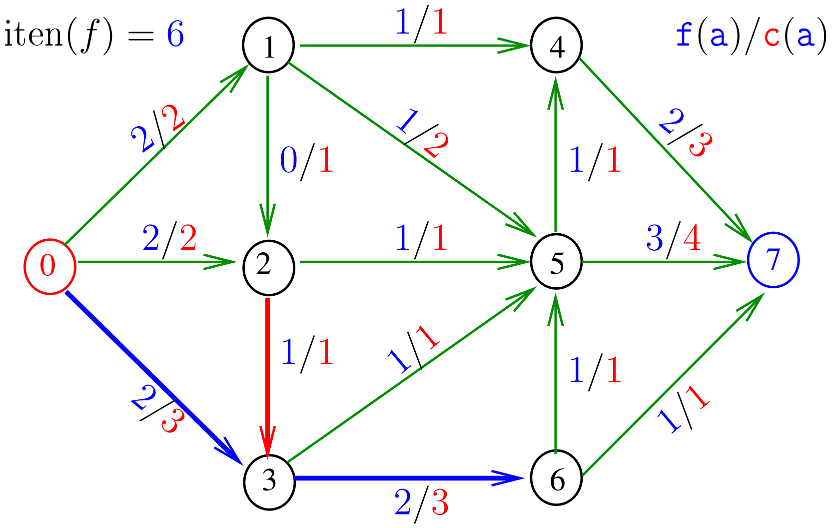
Caminho de aumento



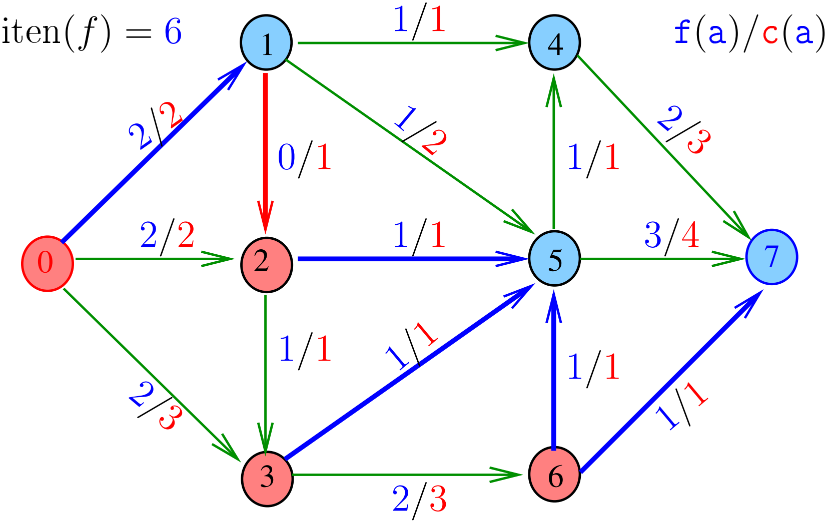
E agora? Fluxo é máximo?



Fluxo é máximo!



Fluxo é máximo!



Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

Para quaisquer dois vértices $\texttt{s}$ e $\texttt{t}$ em uma rede capacidade com função-capacidade $\texttt{c}$ tem-se que

$$\begin{aligned} &\max\{\mathsf{int}(\texttt{f}) : \texttt{f} \text{ é fluxo que respeita } \texttt{c}\} \\ = &\min\{\texttt{c}(\texttt{S},\texttt{T}) : (\texttt{S},\texttt{T}) \text{ é um corte}\}. \end{aligned}$$

Teorema do fluxo máximo e corte mínimo

O teorema foi demonstrado por Ford e Fulkerson e, independentemente, por Kotzig.

> Em qualquer rede capacitada, a intensidade de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.

AULA 25

Estrutura de dados para redes de fluxo

S 22.1

Listas de adjacência

Redes serão representadas por **listas de adjacência**.

Cada arco `v-w` será representado por um nó na lista encadeada `adj[v]`.

Além do campo `w`, esse nó terá os campos

- `cap` para armazenar a capacidade do arco `v-w` e
- `flow` para armazenar o valor do fluxo no arco.
- `dup` para armazenar ...

Estrutura node

```
typedef struct node *link;

struct node {
   Vertex w;
   link next;
   int cap;
   int flow;
   link dup;
};
```

Construtor

```
link
NEW (Vertex w, int cap, int flow, link next) {
   link x = malloc(sizeof*x);
   x->w = w;
   x->cap = cap;
   x->flow = flow;
   x->next = next;
   return x;
}
```

Flownet

```
struct flownet {
   int V, A;
   link *adj;
   Vertex s, t;
};

typedef struct flownet *Flownet;
```

Flowinit

```
Flownet FLOWinit (int V) {
    Vertex v;
    Flownet G = malloc(sizeof *G);
    G->adj = malloc(V * sizeof(link));
    G->V = V;
    G->A = 0;
    for (v = 0;v < V;v++) G->adj[v] = NULL;
    return G;
}
```

FLOWinsert

Insere um arco v-w, de capacidade cap e fluxo nulo na rede G.

```
void
FLOWinsertA (Flownet G, Vertex v, Vertex w, int cap) {
   if (v == w || cap < 0) return;
   G->adj[v] = NEW(w, cap, 0, G->adj[v]);
   G->adj[v]->dup = NULL;
   G->A++;
}
```

Redes de fluxo expandidas

É difícil procurar caminhos de aumento numa rede de fluxo porque esses caminhos podem ter arcos inversos.

Para contornar essa dificuldade, vamos introduzir o conceito de **rede de fluxo expandida**.

Para cada arco `v-w`, acrescente à rede um arco `w-v`.

Diremos que os novos arcos são **artificiais** e os antigos são **originais**

A capacidade arco artificial `w-v` será o negativo da capacidade do correspondente arco original `v-w`.

Redes expandidas

O fluxo em cada arco artificial será o negativo do fluxo no correspondente arco original.
O campo `dup` nos nós será usado para apontar de um arco original para o correspondente arco artificial e vice-versa.

Para cada o arco artificial teremos

$$\texttt{cap} \leq \texttt{flow} \leq 0$$

e para cada o arco original teremos

$$0 \leq \texttt{flow} \leq \texttt{cap}$$

Expand

Função que transforma uma rede de fluxo na correspondente rede de fluxo expandida:

```
void Expand (Flownet G) {
```

Expand

Função que transforma uma rede de fluxo na correspondente rede de fluxo expandida:

```
void Expand (Flownet G) {
Vertex v,w;
int cap, flow;
link po, pa;
for (v = 0;v < G->V; v++)
    for(po=G->adj[v];po!=NULL;po=po->next)
        po->dup = NULL;
```

```
for (v = 0;v < G->V;v++)
    for(po=G->adj[v];po!=NULL;po=po->next)
        if (po->dup== NULL) {
            w = po->w;
            cap = po->cap;
            flow = po->flow;
            G->adj[w] = pa=
                NEW(v,-cap,-flow,G->adj[w]);
            po->dup= pa;
            pa->dup= po;
        }
}
```

flowV

flowV calcula o saldo de fluxo no vértice v de uma rede de fluxo expandida G.

int flowV (Flownet G, Vertex v) {

flowV

flowV calcula o saldo de fluxo no vértice v de uma rede de fluxo expandida G.

```
int flowV (Flownet G, Vertex v) {
    link p;
    int x = 0;
    for (p = G->adj[v]; p != NULL; p = p->next)
        x += p->flow;
    return x;
}
```

A intensidade do fluxo é flowV(G, G->s).

Rede expandida e capacidades residuais

Um caminho de $\texttt{s}$ a $\texttt{t}$ na rede de fluxo expandida corresponde a um caminho de aumento na rede de fluxo original se

- $\texttt{cap} \geq 0$ implica em $\texttt{flow} < \texttt{cap}$ e
- $\texttt{cap} < 0$ implica em $\texttt{flow} < 0$

para todo arco do caminho.
A capacidade residual de um arco original da rede expandida é

$$\texttt{cap} - \texttt{flow}$$

e a capacidade residual de um arco artificial é

$$-\texttt{flow}.$$

Algoritmo de fluxo máximo: versão shortest augmenting paths

S 22.2

Camada externa da implementação

Um caminho de aumento pode ser representado por um caminho de capacidade residual positiva na rede expandida.

Para encontrar um tal caminho, podemos usar o algoritmo de busca em largura como modelo.

Na implementação a seguir, o vetor `parnt` será usado de maneira um pouco diferente: ao percorrer um arco `v-w` da rede expandida, o código fará

$$\texttt{parnt}[\texttt{w}] = \texttt{p},$$

sendo `p` o endereço do nó na lista `adj[v]` para o qual `p->w` vale `w`.

O "pai" `v` de `w` será então `parnt[w]->dup->w`.

MaxFlow

Recebe uma rede capacitada (não-expandida) G e calcula um fluxo máximo.

```
void MaxFlow (Flownet G) {
```

MaxFlow

Recebe uma rede capacitada (não-expandida) G e calcula um fluxo máximo.

```
void MaxFlow (Flownet G) {
   Vertex s = G->s, t= G->t, x;
   int d;link parnt[maxV];
   Expand(G);
   while (1) {
      d = AugmentingPath(G,parnt);
      if (d == 0) break;
      for(x=t;x!=s;x=parnt[x]->dup->w){
         parnt[x]->flow += d;
         parnt[x]->dup->flow-= d;
      }
   }
```

Shortest augmenting paths

Para encontrar um caminho de aumento que tenha número mínimo de arcos, basta aplicar o algoritmo de busca em largura à rede de fluxo expandida.

Esta é uma implementação shortest-augmenting-path da função AugmentingPath.

```
#define ShrtstAugmPath AugmentingPath
```

A macro `RC` recebe um link `p` e calcula a capacidade residual do arco da rede de fluxo expandida que vai do vértice `p->dup->w` ao vértice `p->w`.

```
#define RC(p) (p->cap >= 0 ? p->cap - p->flow : -p->flow)
```

ShrtstAugmPath

A função `ShrtstAugmPath` devolve 0 se não há caminho de aumento.

Caso contrário, devolve a capacidade residual `d` de um caminho de aumento na rede expandida e armazena o caminho no vetor `parnt`.

A função supõe que todas as capacidades são menores que `M`.

```
int ShrtstAugmPath(Flownet G, link parnt[]) {
```

ShrtstAugmPath

A função ShrtstAugmPath devolve 0 se não há caminho de aumento.

Caso contrário, devolve a capacidade residual d de um caminho de aumento na rede expandida e armazena o caminho no vetor parnt.

A função supõe que todas as capacidades são menores que M.

```
int ShrtstAugmPath(Flownet G,link parnt[]) {
    Vertex s= G->s,t= G->t,v,w;
    int lbl[maxV],d;link p;
    for (v = 0;v < G->V;v++) lbl[v] = -1;
    QUEUEinit(G->V);
```

```
lbl[s] = 0;
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for(p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next){
        w =p->w;
        if(RC(p)>0 && lbl[w]==-1){
            lbl[w] = 0;
            parnt[w] = p;
            QUEUEput(w);
        }
    }
}
```

```
    if (lbl[t] == -1) return 0;
    d = M;
    for (w = t; w != s; w = p->dup->w){
        p = parnt[w];
        if (d > RC(p)) d = RC(p);
    }
    return d;
}
```

Número de iterações

O número de caminhos de aumento usados pela combinação de `MaxFlow` com `ShrtstAugmPath` nunca é maior que `VA`/2, sendo `V` o número de vértices e `A` o número de arcos originais.

Consumo de tempo

O consumo de tempo de MaxFlow com ShrtstAugmPath é $O(VA(V + A))$, sendo V o número de vértices e A o número de arcos originais.

Considerações finais

MAC0328

MAC0328 Algoritmos em grafos **foi**:

- uma disciplina introdutória em projeto e análise de algoritmos sobre grafos
- um laboratório de algoritmos sobre grafos

MAC0328

MAC0328 **combinou** técnicas de

- programação
- estruturas de dados
- análise de algoritmos
- teoria dos grafos

para resolver problemas sobre grafos.

Pré-requisitos

O pré-requisito oficial de MAC0328 **era**

- MAC0122 Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos.

No entanto, **era** recomendável que já tivessem cursado

- MAC0211 Laboratório de programação; e
- MAC0323 Estruturas de dados

Costuma ser conveniente cursar MAC0328 simultaneamente com

- MAC0338 Análise de algoritmos.

Principais tópicos foram

- digrafos e grafos
- estruturas de dados para digrafos e grafos
- florestas e árvores
- caminhos e ciclos
- busca em largura
- caminhos mínimos
- grafos bipartidos
- busca em profundidade
- digrafos acíclicos
- ordenação topológica
- pontes e ciclos
- grafos conexos e componentes
- digrafos fortemente conexos
- articulações e grafos biconexos
- árvores geradoras mínimas
- fluxo em redes

FIM