

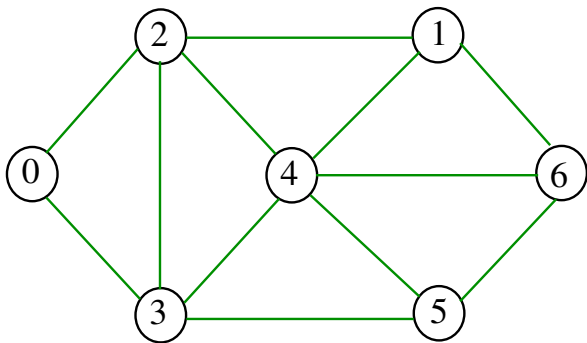
Melhores momentos

AULA 19

Subárvores

Uma **subárvore** de um grafo G é qualquer árvore T que seja subgrafo de G

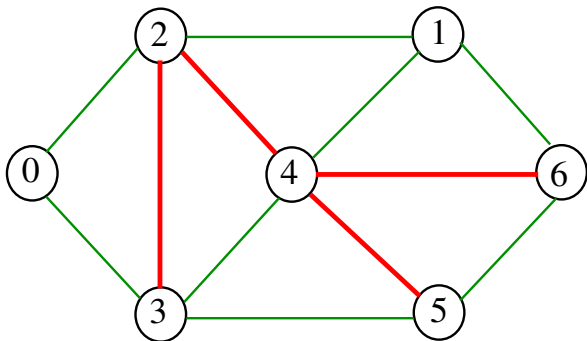
Exemplo:



Subárvores

Uma **subárvore** de um grafo G é qualquer árvore T que seja subgrafo de G

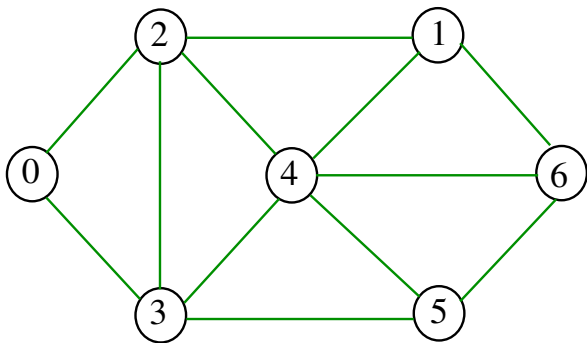
Exemplo: as aretas em **vermelho** formam uma subárvore



Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

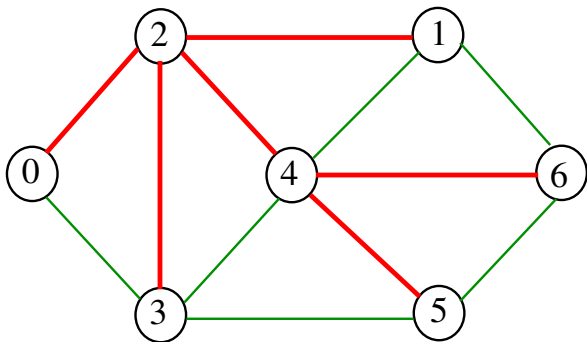
Exemplo:



Árvores geradoras

Uma **árvore geradora** (= *spanning tree*) de um grafo é qualquer subárvore que contenha **todos** os vértices

Exemplo: as aretas em **vermelho** formam uma árvore geradora

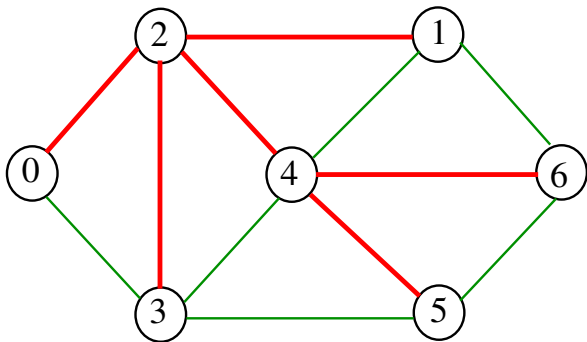


Árvores geradoras

Somente grafos conexos têm árvores geradoras

Todo grafo conexo tem uma árvore geradora

Exemplo:



Algoritmos que calculam árvores geradoras

É fácil calcular uma árvore geradora de um grafo conexo:

- ▶ a busca em profundidade e
- ▶ a busca em largura

fazem isso.

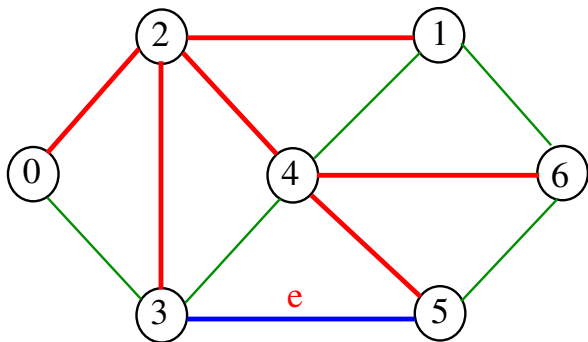
Qualquer das duas buscas calcula uma **arborescência** que contém um dos arcos de cada aresta de uma árvore geradora do grafo

Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma **árvore geradora** de um grafo G

Para qualquer aresta e de G que não esteja em T ,
 $T+e$ tem um **único ciclo** não-trivial

Exemplo: $T+e$

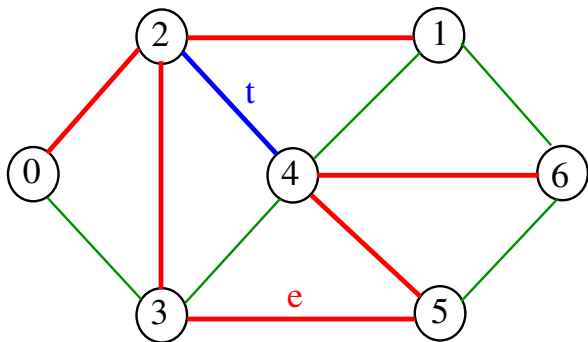


Primeira propriedade da troca de arestas

Seja T uma **árvore geradora** de um grafo G

Para qualquer aresta t desse ciclo, $T+e-t$ uma **árvore geradora**

Exemplo: $T+e-t$

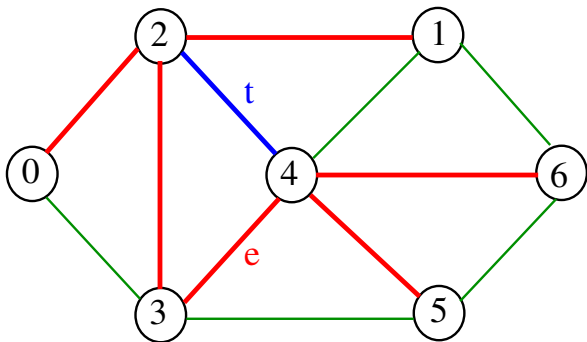


Segunda propriedade da troca de arestas

Seja T uma **árvore geradora** de um grafo G .

Para qualquer aresta t de T e qualquer aresta e que atravesse o corte determinado por $T-t$, o grafo $T-t+e$ é uma árvore geradora

Exemplo: $T-t+e$



AULA 20

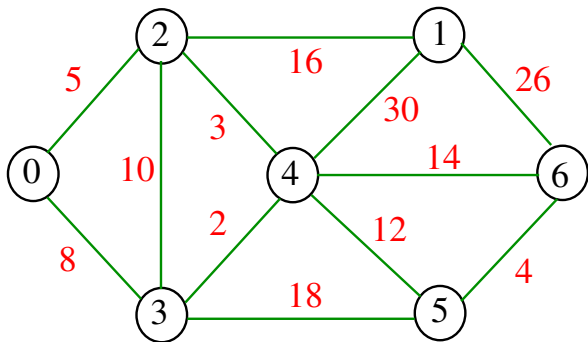
Árvores geradoras de custo mínimo

S 20.1 e 20.2

Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha **custo mínimo**

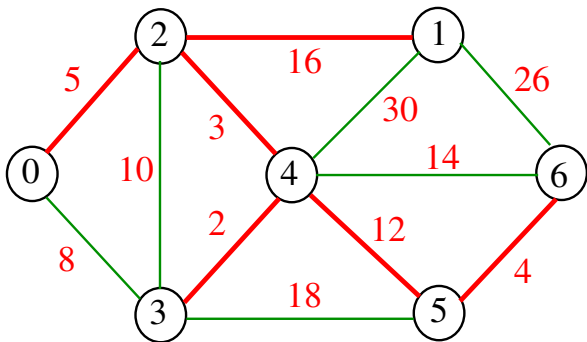
Exemplo: um grafo com custos nas aretas



Árvores geradoras mínimas

Uma **árvore geradora mínima** (= *minimum spanning tree*), ou MST, de um grafo com custos nas arestas é qualquer árvore geradora do grafo que tenha **custo mínimo**

Exemplo: **MST** de custo 42

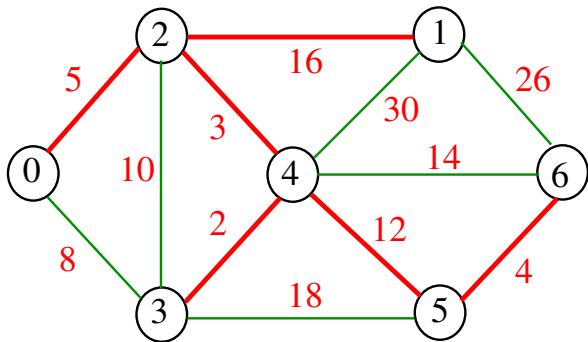


Problema MST

Problema: Encontrar uma MST de um grafo G com custos nas arestas

O problema tem solução se e somente se o grafo G é conexo

Exemplo: MST de custo 42



Demonstração da recíproca

Seja T uma árvore geradora satisfazendo a condição de otimalidade.

Vamos mostrar que T é uma MST.

Demonstração da recíproca

Seja T uma árvore geradora satisfazendo a **condição de otimalidade**.

Vamos mostrar que T é uma MST.

Seja T^* uma MST tal que o número de arestas comuns entre T e T^* seja **máximo**.

Se $T = T^*$ não há o que demonstrar.

Suponha que $T \neq T^*$ e seja e^* uma aresta de custo mínimo dentre as arestas que estão em T^* mas não estão em T .

Seja e uma aresta qualquer que **não está** em T^* mas **está** no único ciclo em $T+e^*$.

Continuação

Logo, $\text{custo}(e) \leq \text{custo}(e^*)$.

Seja f^* uma aresta qualquer que **não está** em T mas **está** no único ciclo em $T^* + e$.

Como T^* é uma MST então $\text{custo}(f^*) \leq \text{custo}(e)$.

Se $\text{custo}(f^*) = \text{custo}(e)$, então $T^* - f^* + e$ é uma MST que contradiz a escolha de T^* . Logo,

$\text{custo}(f^*) < \text{custo}(e)$.

Finalmente, concluímos que

$$\text{custo}(f^*) < \text{custo}(e) \leq \text{custo}(e^*)$$

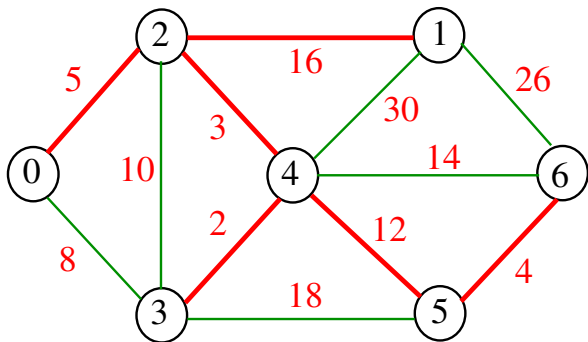
o que contradiz a nossa escolha de e^* .

Portanto, $T = T^*$ e T é uma MST.

Propriedade dos cortes

Condição de Otimalidade: Se T é uma MST então cada aresta t de T é uma aresta mínima dentre as que atravessam o corte determinado por $T-t$

Exemplo: MST de custo 42



Algoritmo de Prim

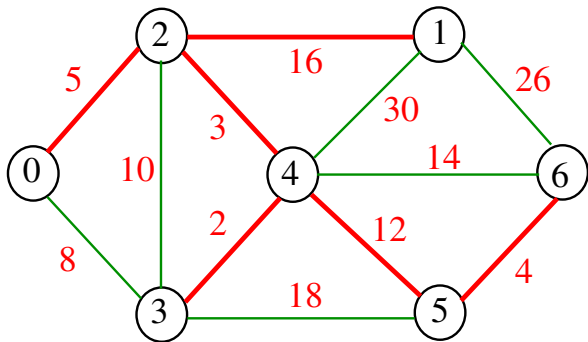
S 20.3

Problema MST

Problema: Encontrar uma MST de um grafo G com custos nas arestas

O problema tem solução se e somente se o grafo G é conexo

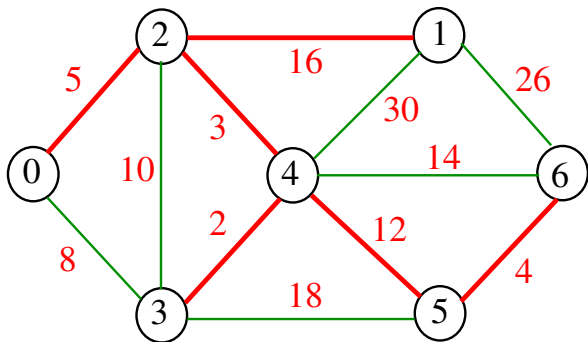
Exemplo: MST de custo 42



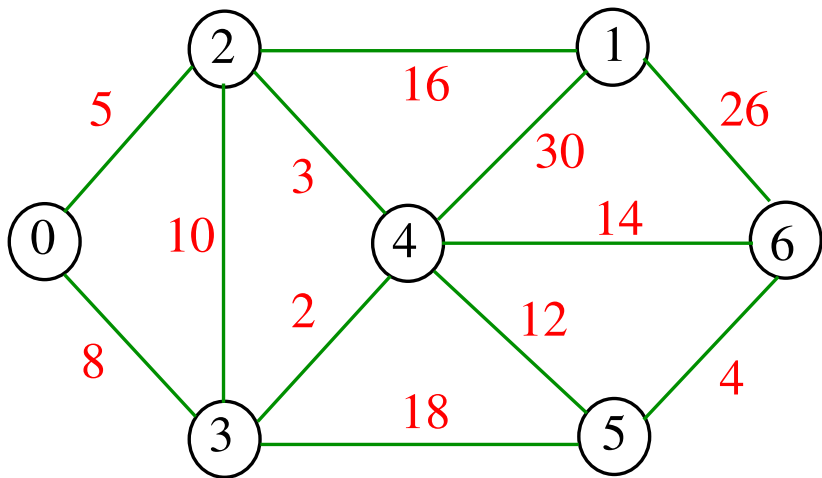
Propriedade dos cortes

Condição de Otimalidade: Se T é uma MST então cada aresta t de T é uma aresta mínima dentre as que atravessam o corte determinado por $T-t$

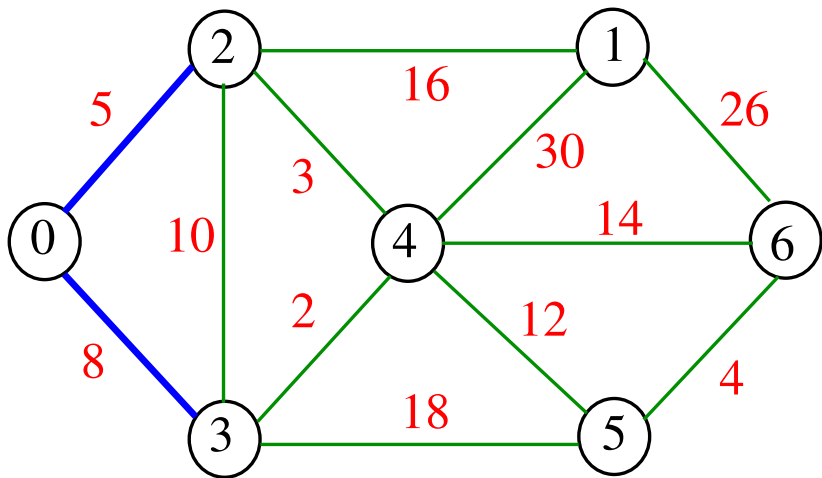
Exemplo: MST de custo 42



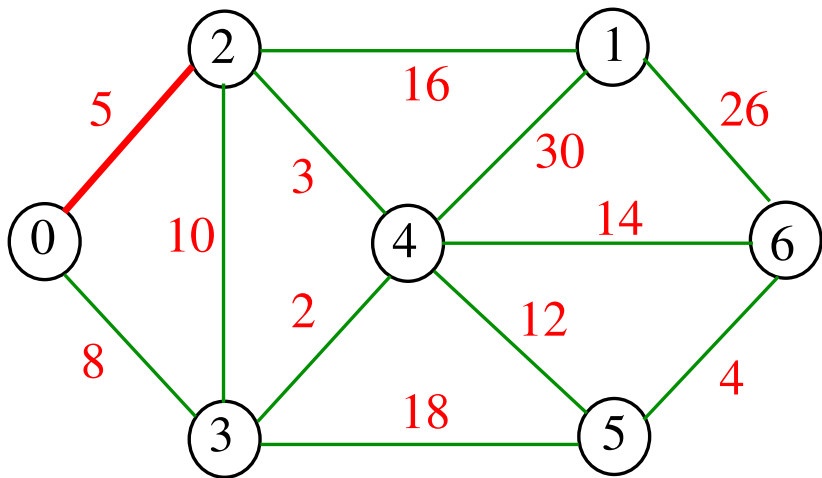
Simulação



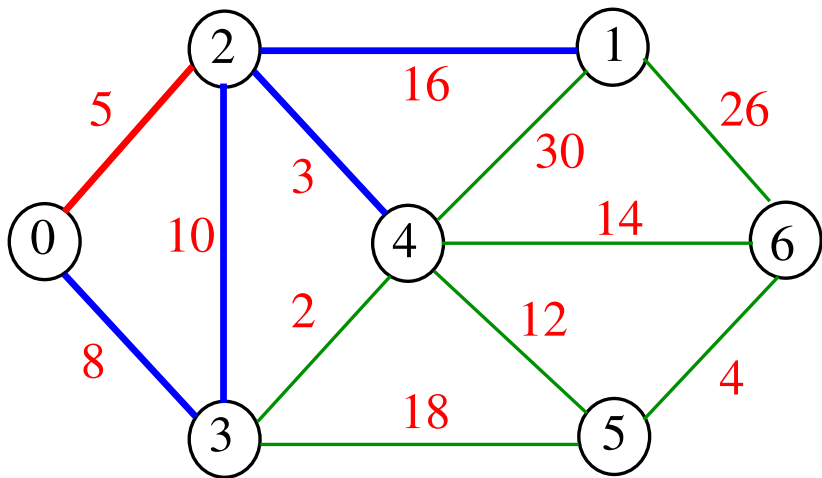
Simulação



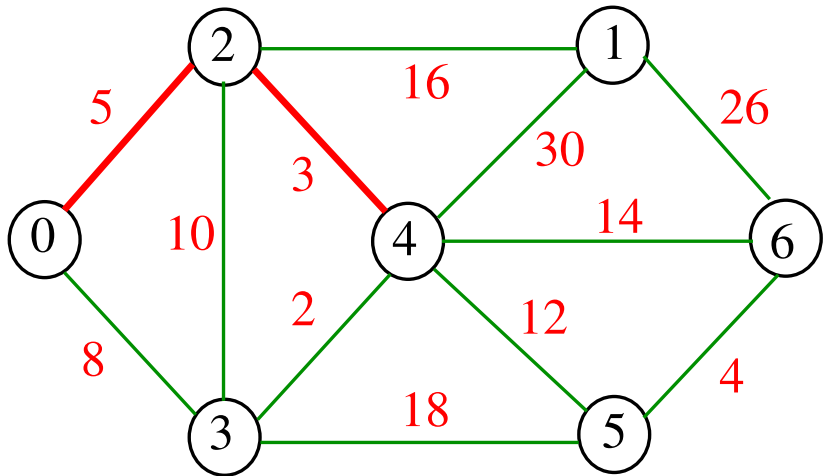
Simulação



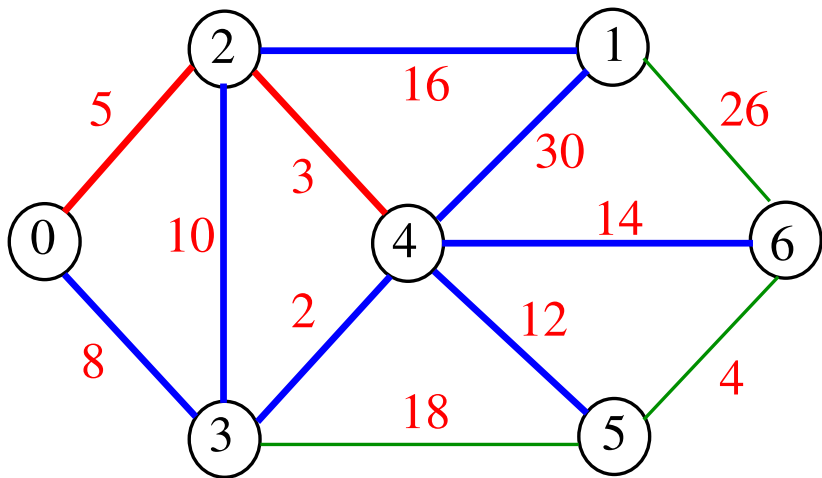
Simulação



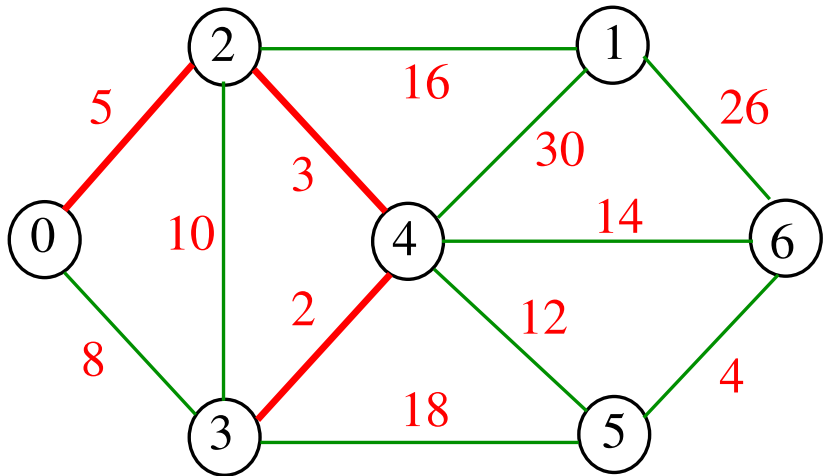
Simulação



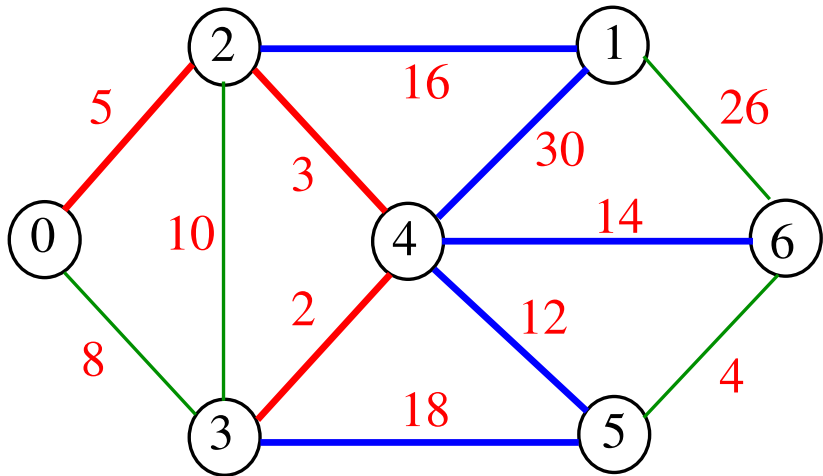
Simulação



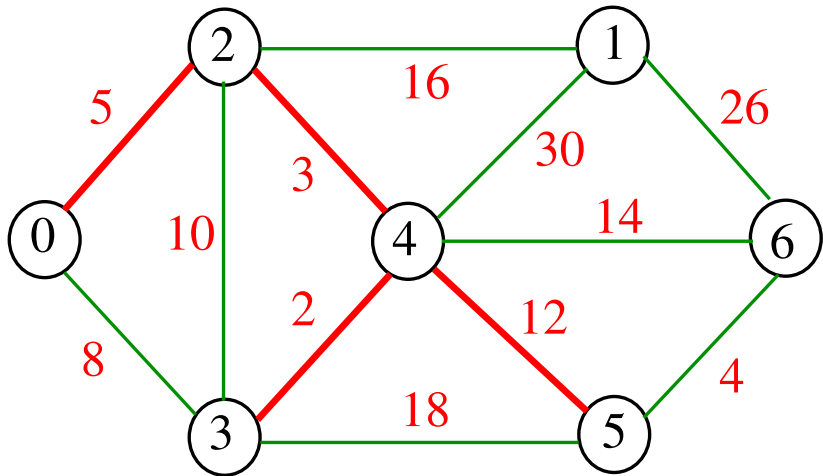
Simulação



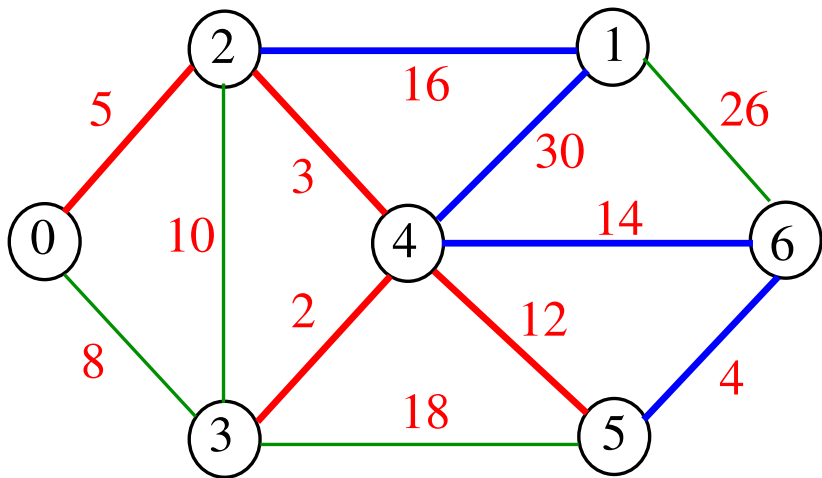
Simulação



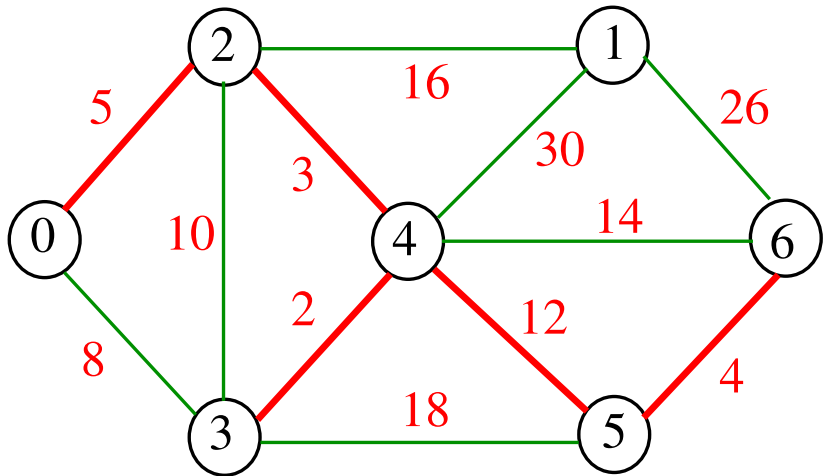
Simulação



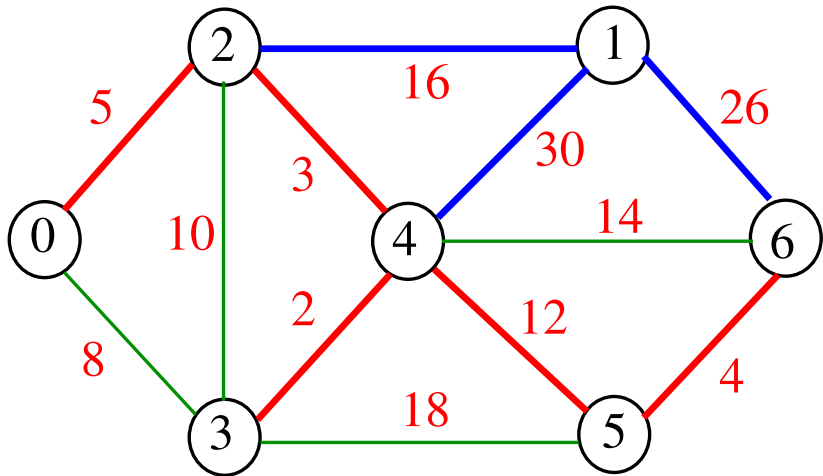
Simulação



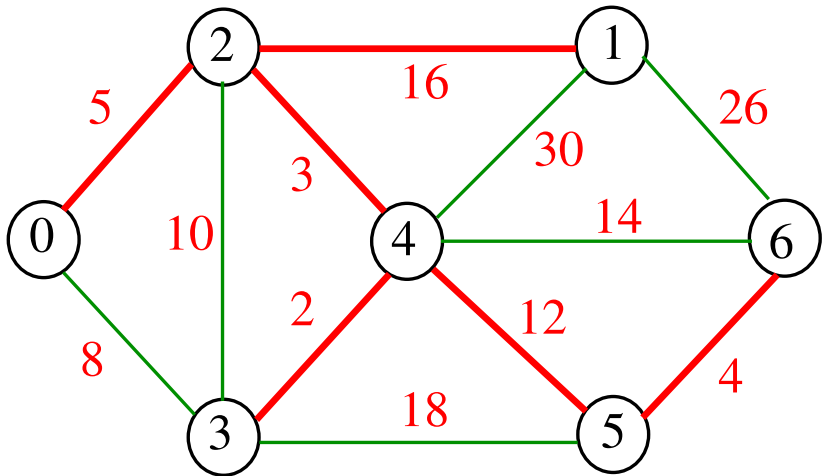
Simulação



Simulação



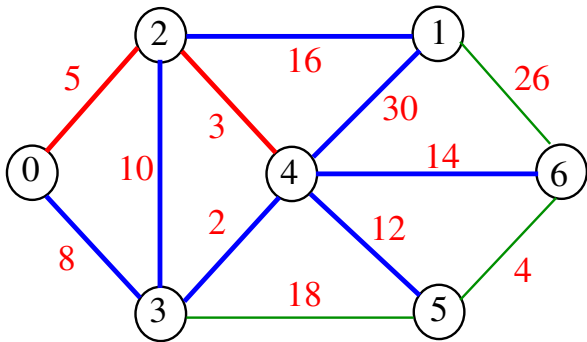
Simulação



Franja

A **franja** (= *fringe*) de uma subárvore não-geradora **T** é o conjunto de todas as arestas que têm uma ponta em **T** e outra ponta fora

Exemplo: As arestas em azul formam a franja de **T**



Algoritmo de Prim

O algoritmo de Prim é iterativo.

Cada iteração começa com uma subárvore T de G .

No início da primeira iteração T é um árvore com apenas 1 vértice.

Cada iteração consiste em:

Caso 1: franja de T é vazia

Devolva T e pare.

Caso 2: franja de T não é vazia

Seja e uma aresta de custo mínimo na franja de T

Comece nova iteração com $T+e$ no papel de T

Relação invariante chave

No início de cada iteração vale que

existe uma MST que contém as arestas em T .

Demonstração. Se a relação vale no início da última iteração então é evidente que, se o grafo é conexo, o algoritmo devolve uma MST.

Vamos mostrar que se a relação vale no início de uma iteração que não seja a última, então ela vale no fim da iteração com $T+e$ no papel de T .

A relação invariante certamente vale no início da primeira iteração.

Demonstração

Considere o início de uma iteração qualquer que não seja a última.

Seja e a aresta escolhida pela iteração no caso 2.

Pela relação invariante existe uma MST T^* que contém T .

Se e está em T^* , então não há o que demonstrar.

Suponha, portanto, que e não está em T^* .

Seja e^* uma aresta que está no único ciclo em $T^* + e$ que está na franja de T .

Pela escolha de e temos que $\text{custo}(e) \leq \text{custo}(e^*)$.

Portanto, $T^* - e^* + e$ é uma MST que contém $T + e$.