AULA 12

Busca em largura

S 18.7

Busca ou varredura

Um algoritimo de **busca** (ou **varredura**) examina, sistematicamente, os vértices e os arcos de um digrafo.

Cada arco é examinado **uma só vez**.
Despois de visitar sua ponta inicial o algoritmo percorre o arco e visita sua ponta final.

Busca em largura

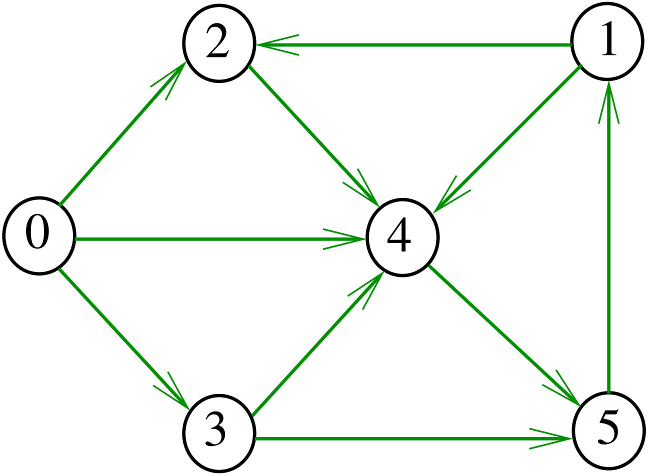
A **busca em largura** (=*breadth-first search search = BFS*) começa por um vértice, digamos s, especificado pelo usuário.

O algoritmo

visita s,
depois visita vértices à distância 1 de s,
depois visita vértices à distância 2 de s,
depois visita vértices à distância 3 de s,
e assim por diante

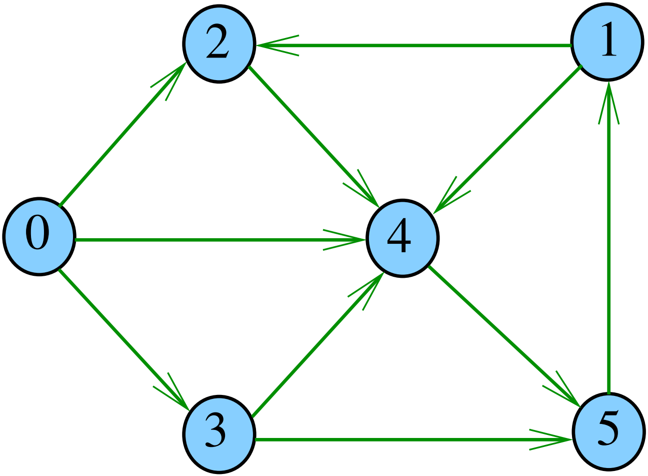
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						



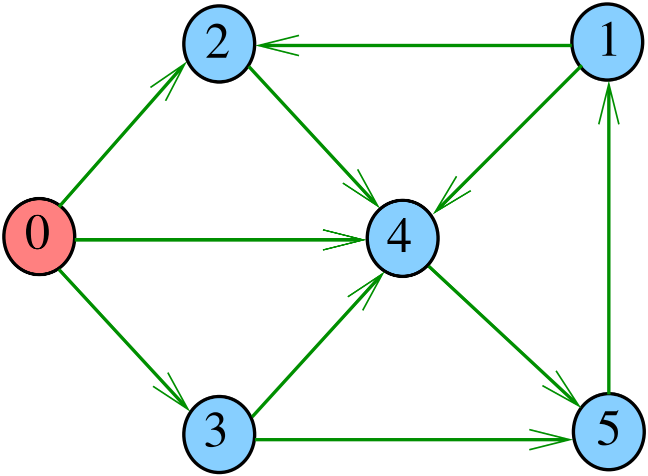
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						



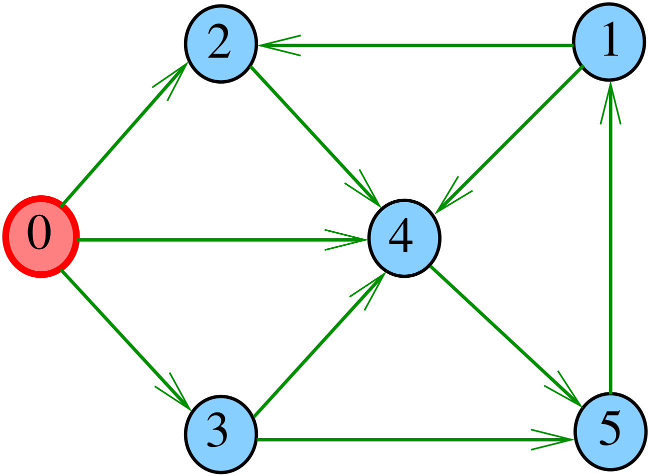
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					



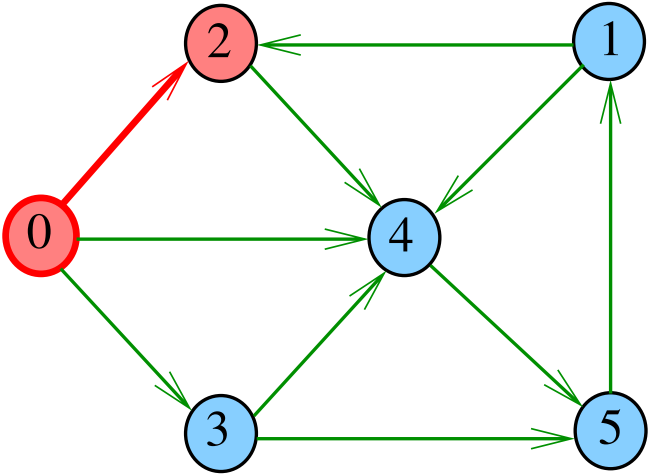
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					



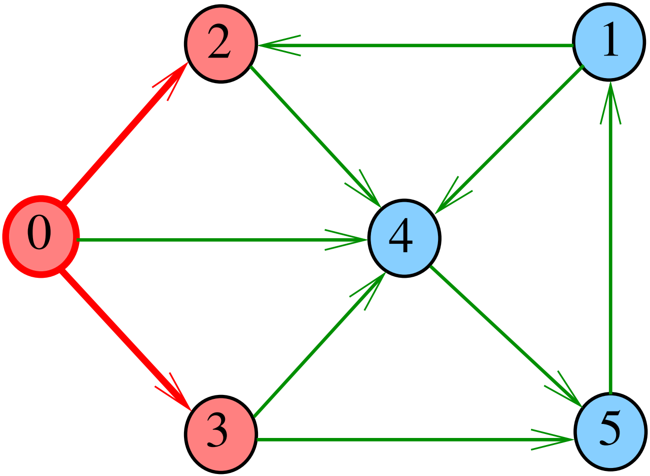
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2				



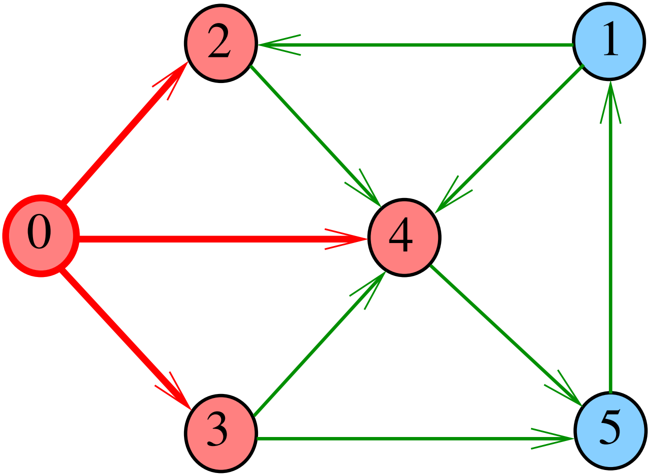
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3			



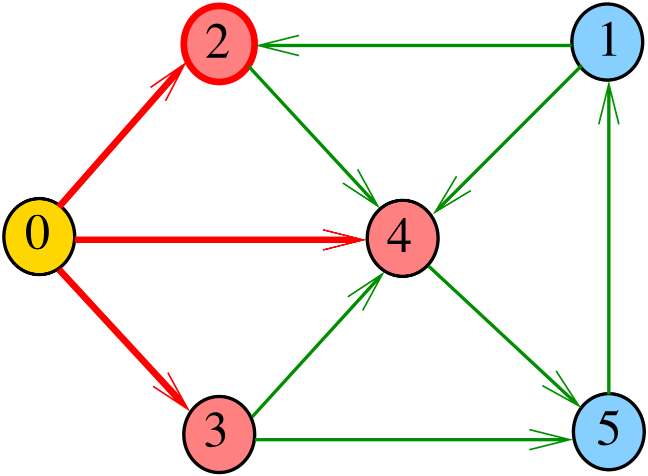
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



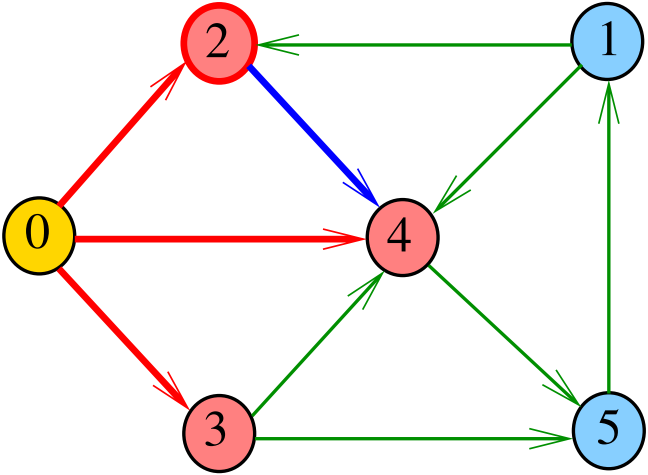
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



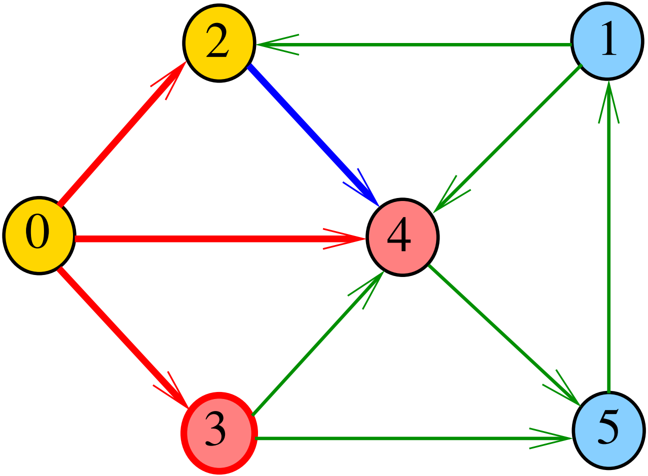
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



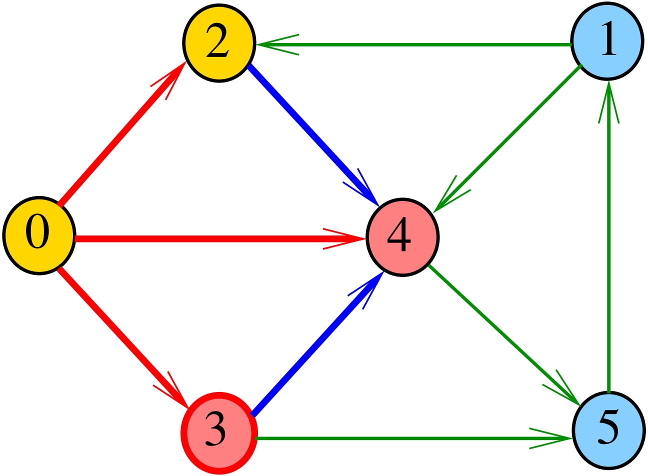
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



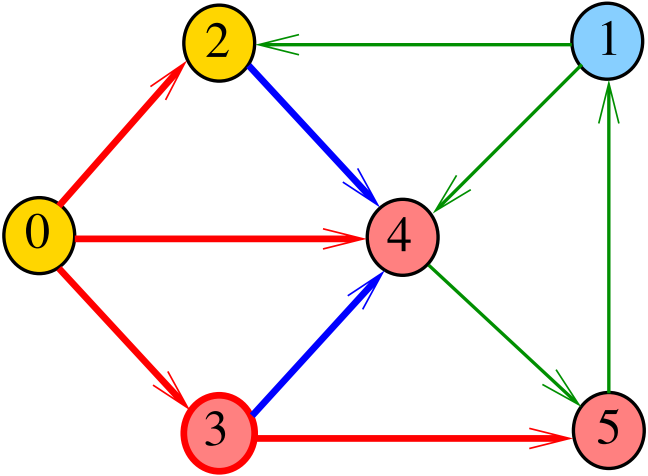
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		



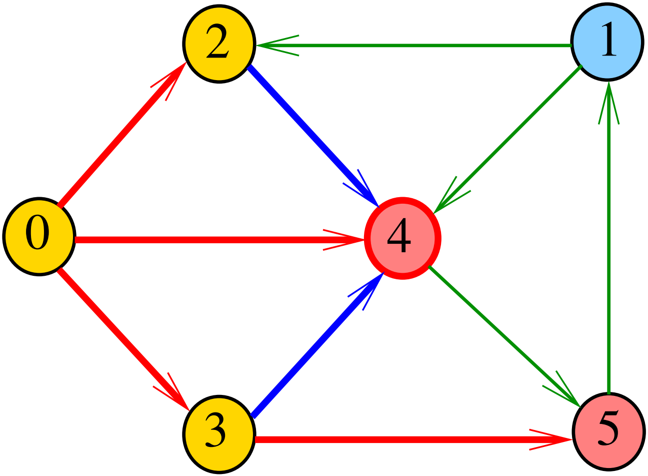
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	



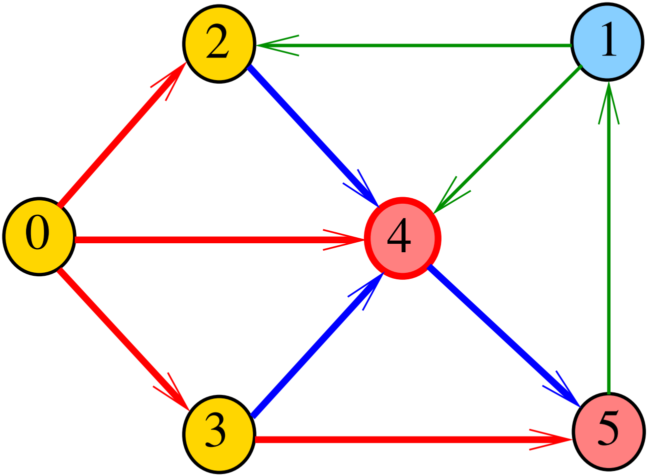
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	



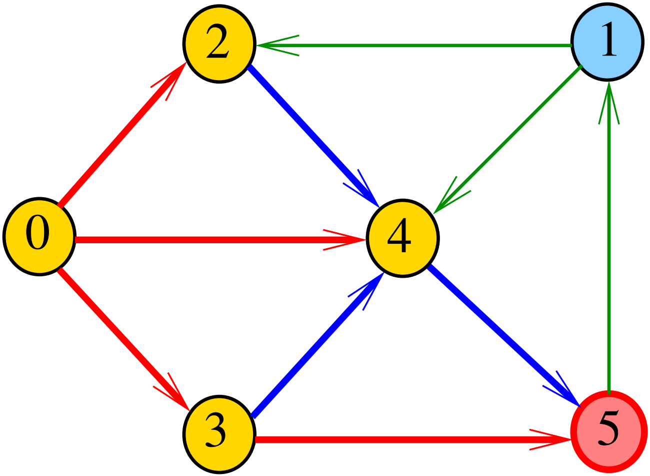
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	



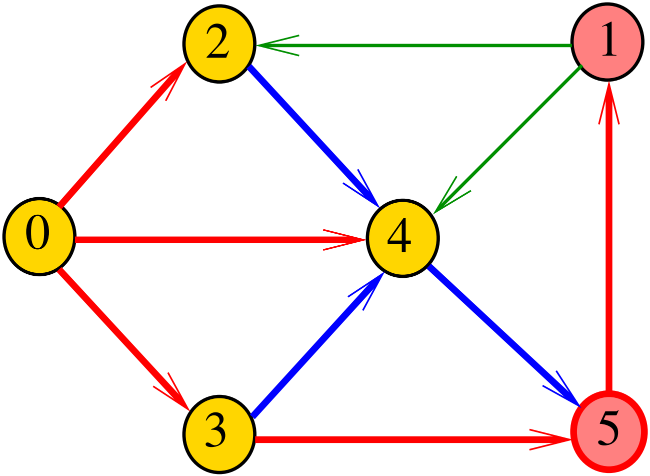
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	



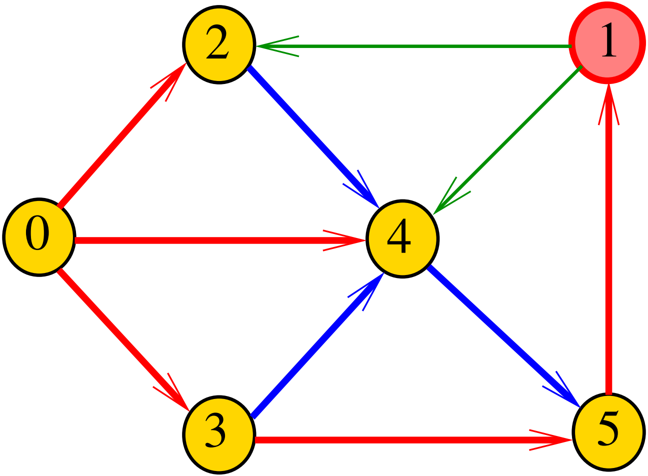
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



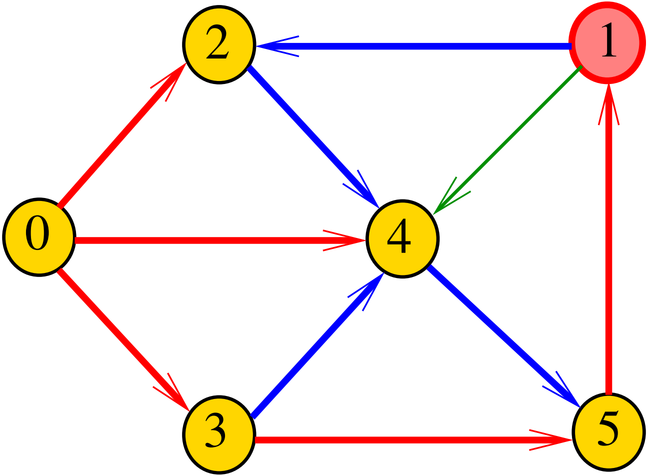
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



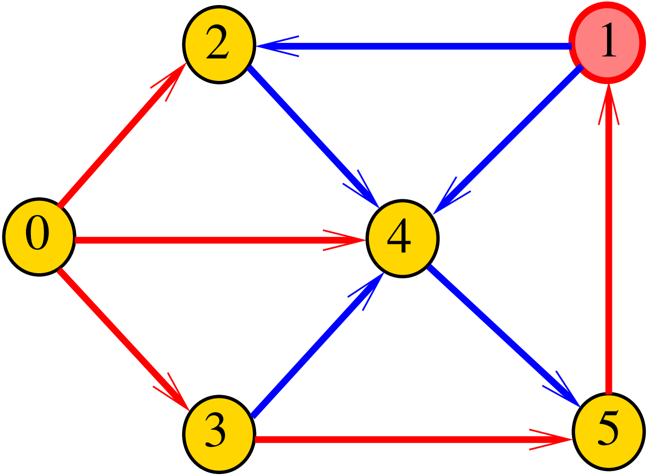
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



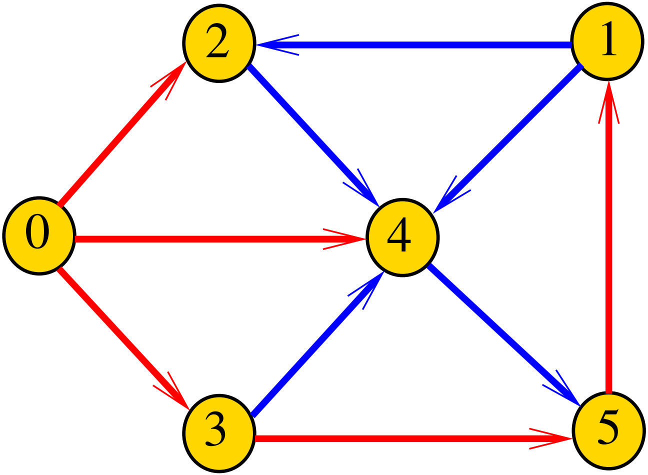
Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1



DIGRAPHbfs

`DIGRAPHbfs` visita todos os vértices do digrafo `G` que podem ser alcançados a partir de `s`

A ordem em que os vértices são visitados é registrada no vetor `lbl`. Se `v` é o `k`-ésimo vértices visitado então `lbl[v]`== `k`-1

A função usa uma fila de vértices

```
#define maxV 10000;
static int cnt, lbl[maxV];
void DIGRAPHbfs (Digraph G, Vertex s)
```

Implementação de uma fila

```
/* Item.h */
typedef Vertex Item;

/* QUEUE.h */
void QUEUEinit(int);
int QUEUEempty();
void QUEUEput(Item);
Item QUEUEget();
void QUEUEfree();
```

DIGRAPHbfs

```
void DIGRAPHbfs (Digraph G, Vertex s)
{
    Vertex v, w;
    cnt = 0;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        lbl[v] = -1;
    QUEUEinit(G->V);
```

DIGRAPHbfs

```
lbl[s] = cnt++;
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for (w=0; w < G->V; w++)
        if (G->adj[v][w] == 1
            && lbl[w] == -1) {
            lbl[w] = cnt++;
            QUEUEput(w);
        }
}
QUEUEfree();
}
```

Relações invariantes

Digamos que um vértice `v` foi **visitado** se

```
lbl[v] != -1
```

No início de cada iteração das linhas 8–13 vale que

- todo vértice que está na fila já foi visitado;
- se um vértice `v` já foi visitado mas algum de seus vizinhos ainda não foi visitado, então `v` está na fila.

Cada vértice entra na fila no máximo uma vez.

Portanto, basta que a fila tenha espaço suficiente para `V` vértices

QUEUEinit e QUEUEempty

```
Item *q;
int inicio, fim;

void QUEUEinit(int maxN) {
   q = (Item*) malloc(maxN*sizeof(Item));
   inicio = 0;
   fim = 0;
}
int QUEUEempty() {
   return inicio == fim;
}
```

QUEUEput, QUEUEget e QUEUEfree

```
void QUEUEput(Item item){
   q[fim++] = item;
}

Item QUEUEget() {
   return q[inicio++];
}

void QUEUEfree() {
   free(q);
}
```

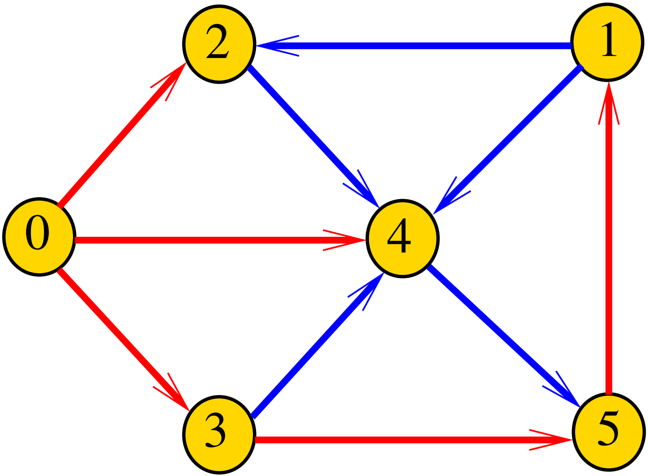
Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `DIGRAPHbfs` para vetor de listas de adjacência é $O(\mathtt{V} + \mathtt{A})$.

O consumo de tempo da função `DIGRAPHbfs` para matriz de adjacência é $O(\mathtt{V}^2)$.

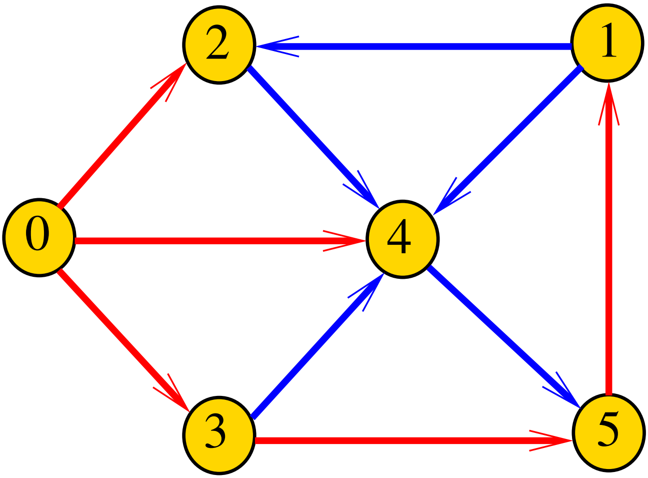
Arborescência da BFS

A busca em largura a partir de um vértice s descreve a arborescência com raiz s



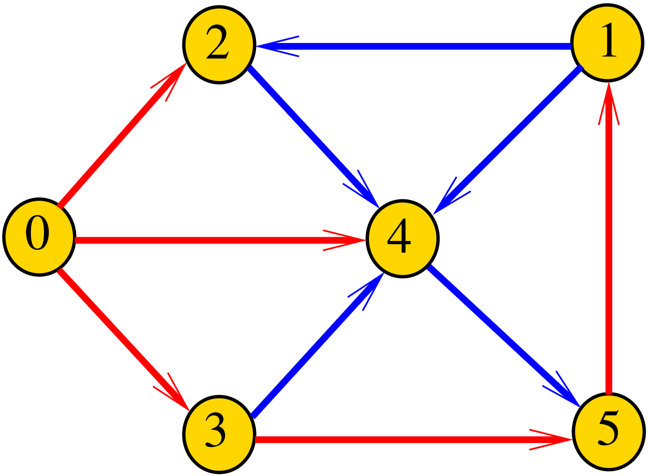
Arborescência da BFS

Essa arborescência é conhecida como **arborescência de busca em largura** (= *BFS tree*)



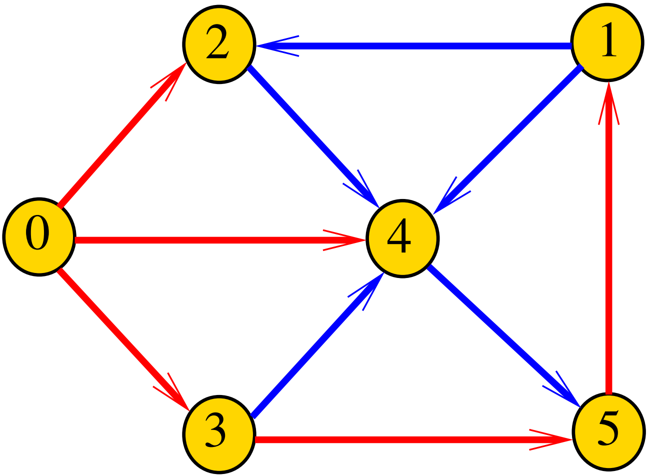
Representação da BFS

Podemos representar essa arborescência explicitamente por um vetor de pais `parnt`



Representação da BFS

v	0	1	2	3	4	5
parnt	0	5	0	0	0	3



DIGRAPHbfs

```
#define maxV 10000;
static int cnt, lbl[maxV];
static Vertex parnt[maxV];
void DIGRAPHbfs (Digraph G, Vertex s)
{
    Vertex v, w;
    cnt = 0;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        lbl[v] = -1;
    QUEUEinit(G->V);
    lbl[s] = cnt++;
    parnt[s] = s;
```

DIGRAPHbfs

```
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for (w=0; w < G->V; w++)
        if (G->adj[v][w] == 1
            && lbl[w] == -1) {
            lbl[w] = cnt++;
            parnt[w] = v;
            QUEUEput(w);
        }
}
QUEUEfree();
}
```

BFS versus DFS

- busca em largura usa **fila**, busca em profundidade usa **pilha**
- a busca em largura é descrita em **estilo iterativo**, enquanto a busca em profundidade é descrita, usualmente, em **estilo recursivo**
- busca em largura começa tipicamente num vértice especificado, a busca em profundidade, o próprio algoritmo escolhe o vértice inicial
- a busca em largura visita apenas os vértices que podem ser atingidos a partir do vértice inicial, a busca em profundidade visita, tipicamente, todos os vértices do digrafo

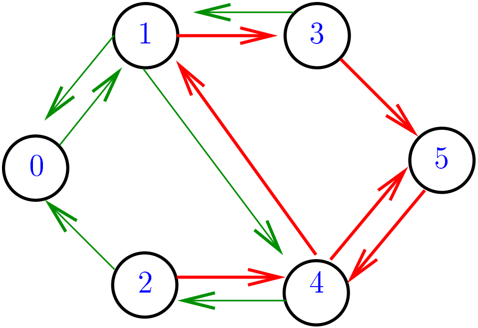
Caminhos mínimos

S 18.7

Comprimento

O **comprimento** de um caminho é o número de arcos no caminho, contanto-se as repetições

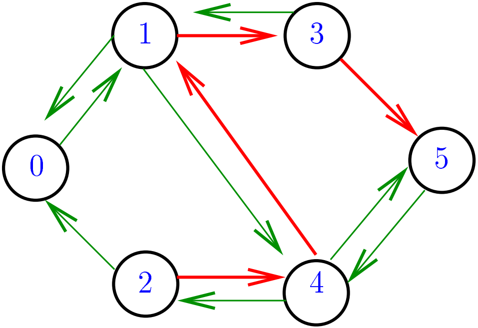
Exemplo: 2-4-1-3-5-4-5 tem comprimento 6



Comprimento

O **comprimento** de um caminho é o número de arcos no caminho, contanto-se as repetições.

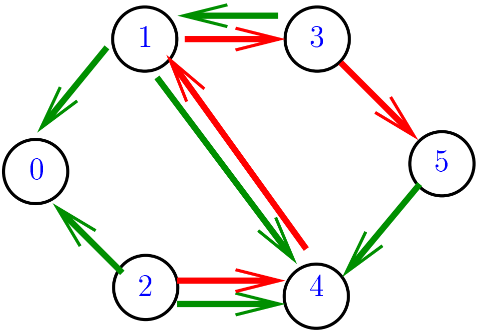
Exemplo: 2-4-1-3-5 tem comprimento 4



Distância

A **distância** de um vértice `s` a um vértice `t` é o menor comprimento de um caminho de `s` a `t`. Se não existe caminho de `s` a `t` a distância é **infinita**

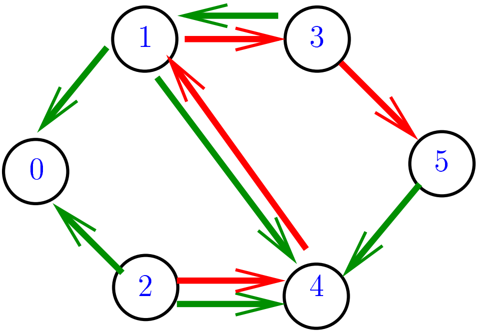
Exemplo: a distância de 2 a 5 é 4



Distância

A **distância** de um vértice `s` a um vértice `t` é o menor comprimento de um caminho de `s` a `t`. Se não existe caminho de `s` a `t` a distância é **infinita**

Exemplo: a distância de 0 a 2 é infinita

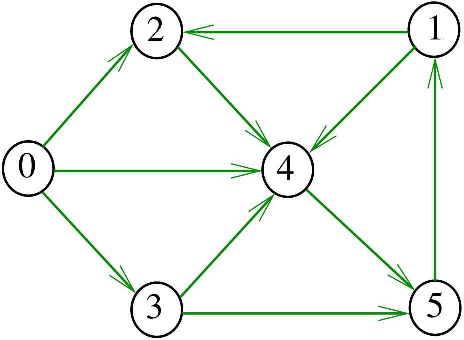


Calculando distâncias

Problema: dados um digrafo G e um vértice s, determinar a distância de s aos demais vértices do digrafo

Exemplo: para s = 0

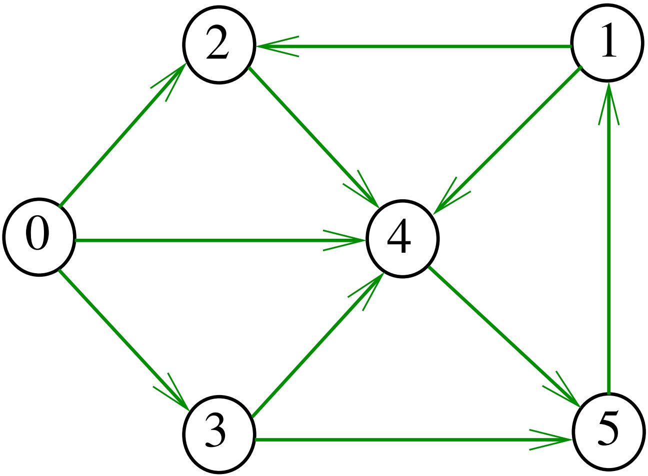
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

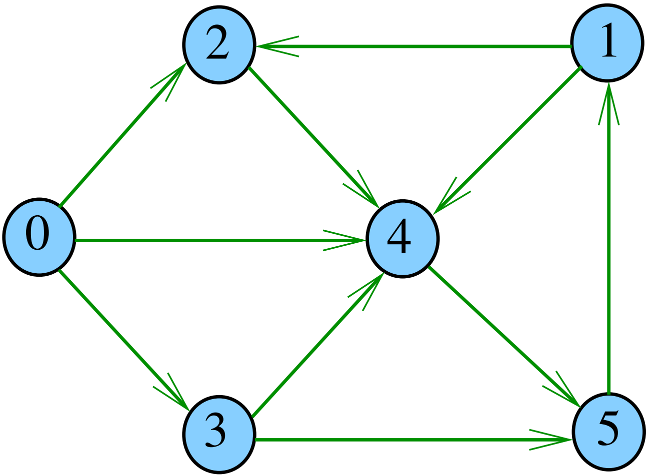
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]						



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]						

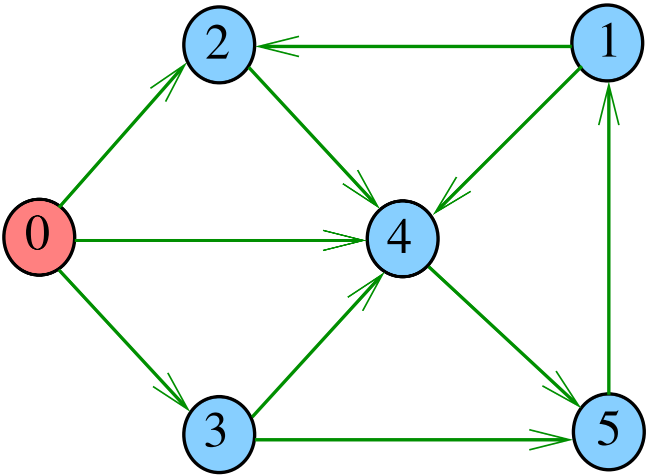
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0					

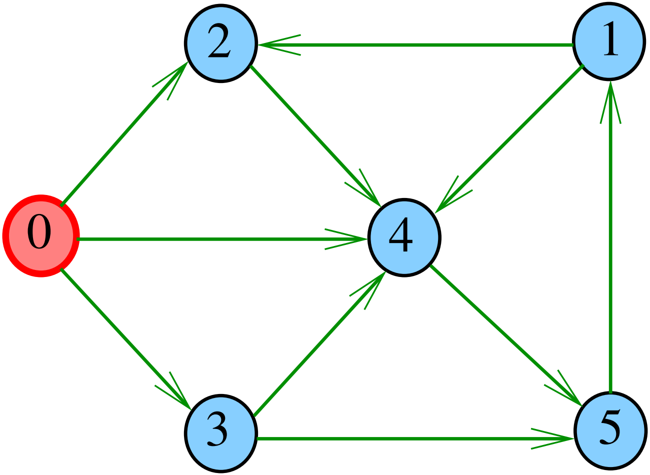
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	6	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**					

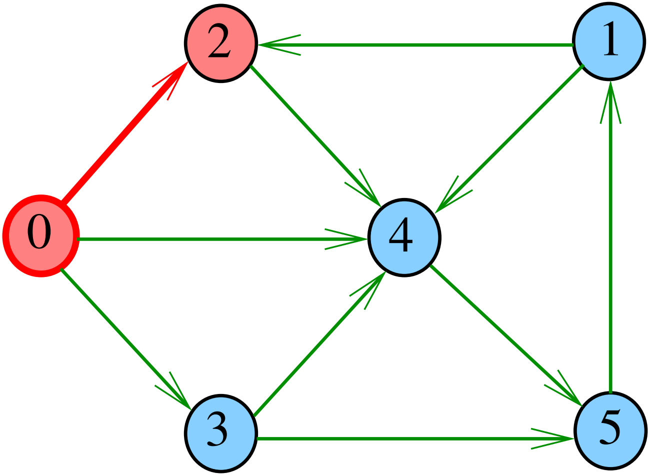
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	**0**	6	6	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	**0**	**2**				

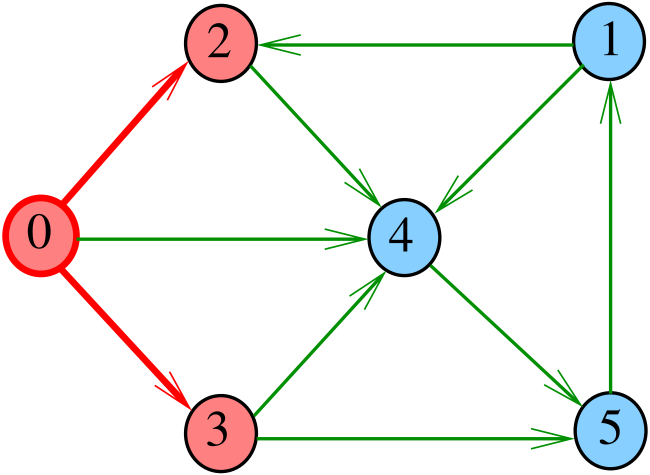
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	**1**	6	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3			

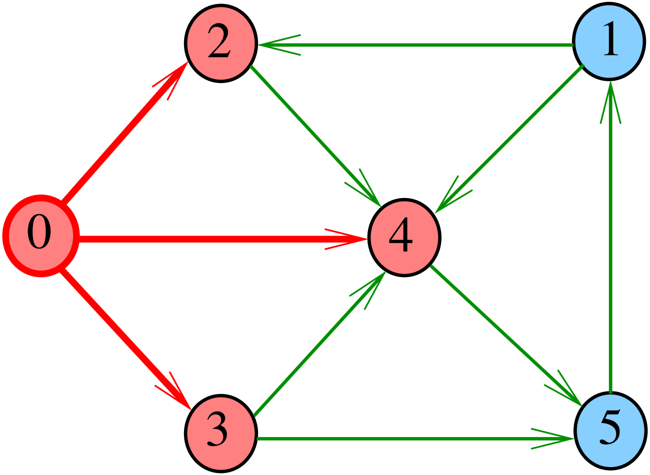
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	6	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

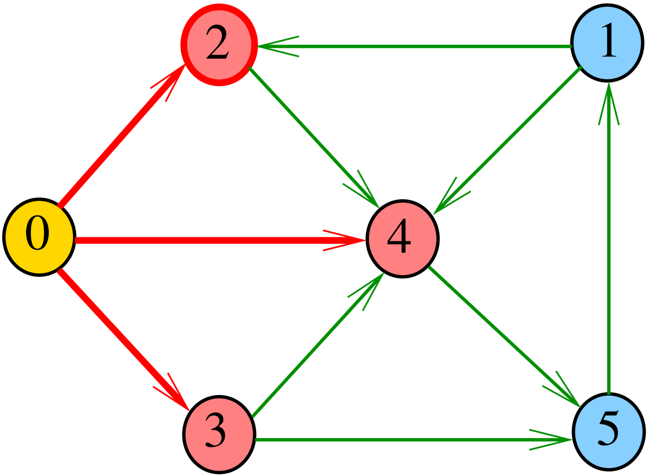
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

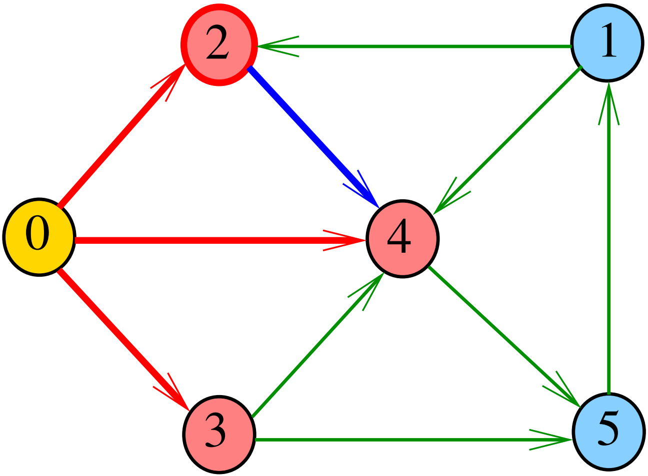
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

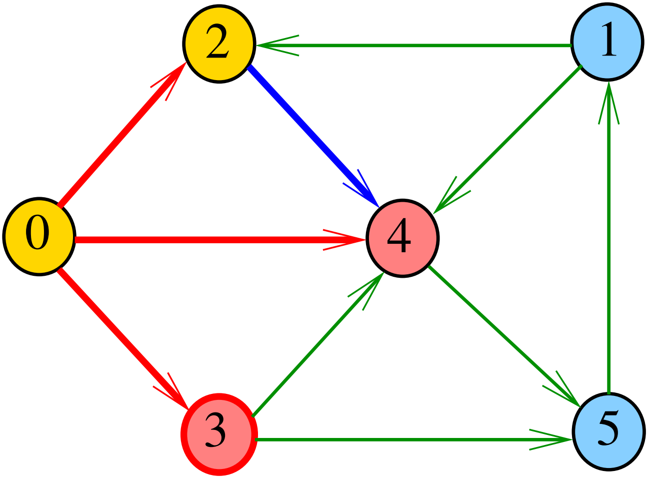
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

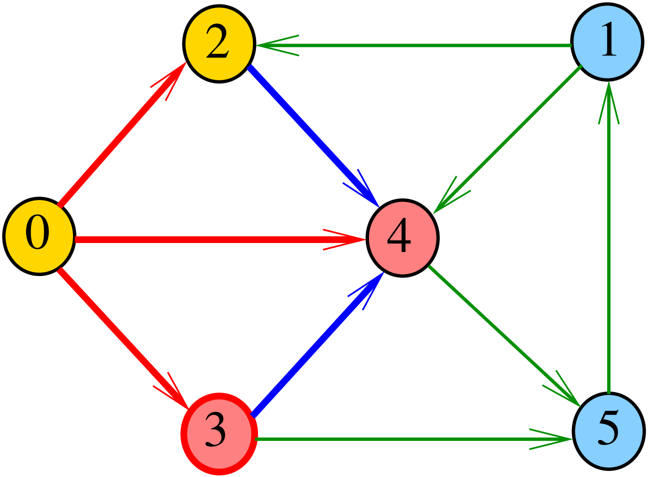
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4		

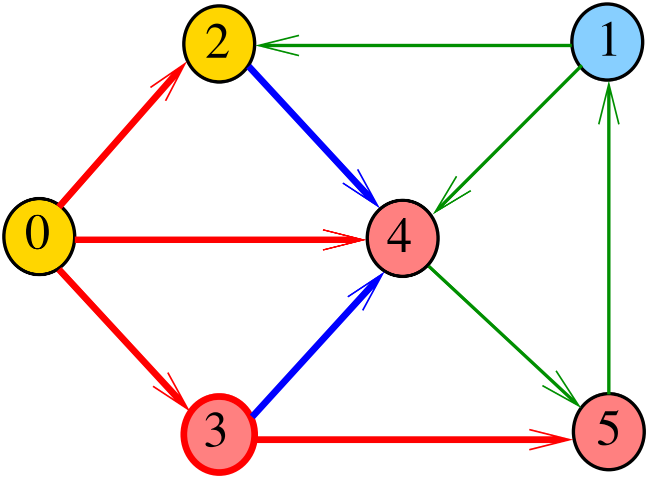
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	6



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

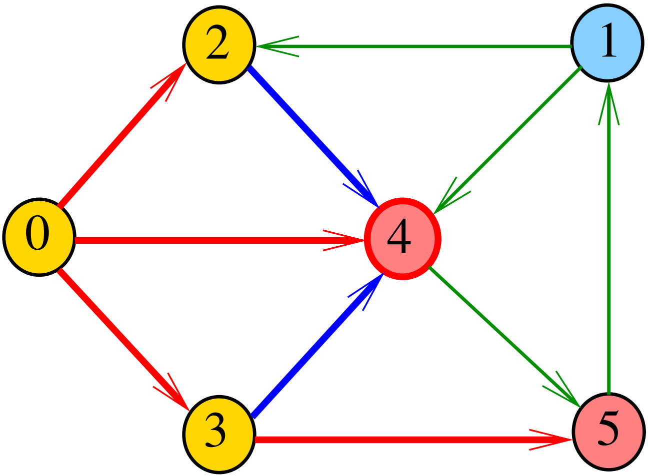
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

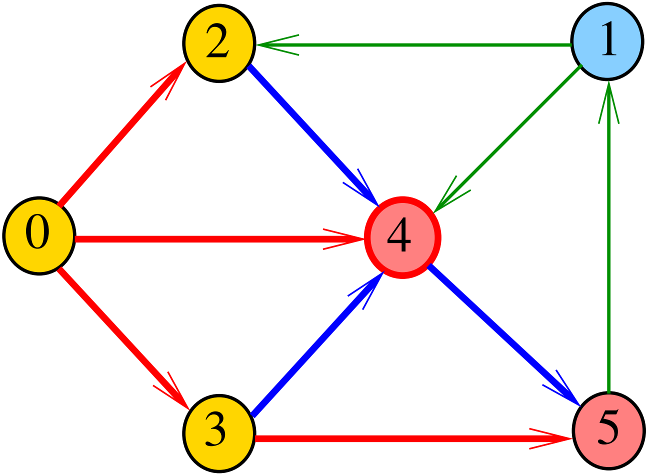
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

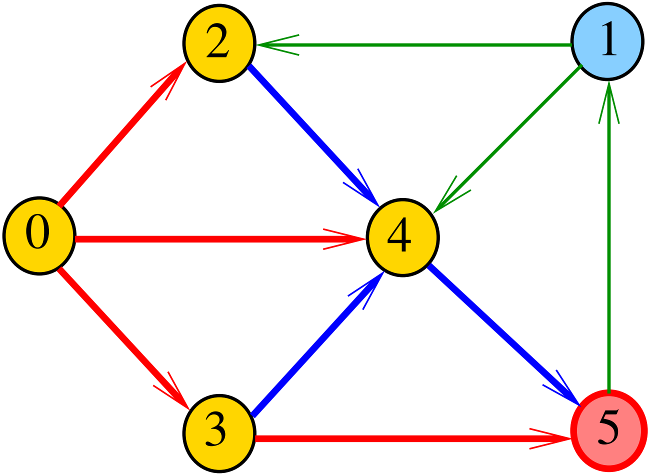
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	

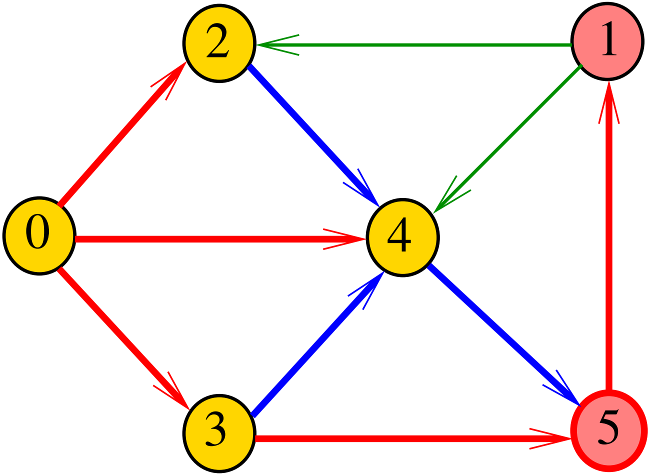
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	6	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

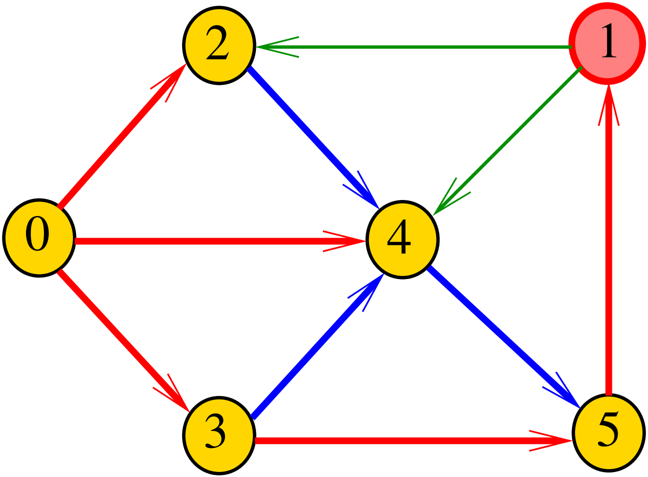
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

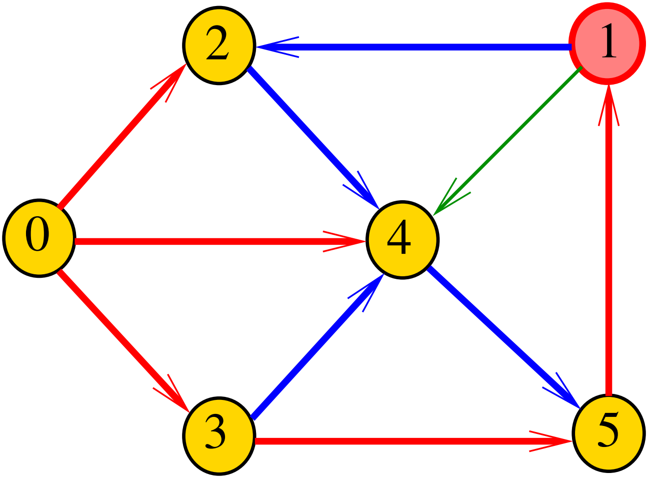
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

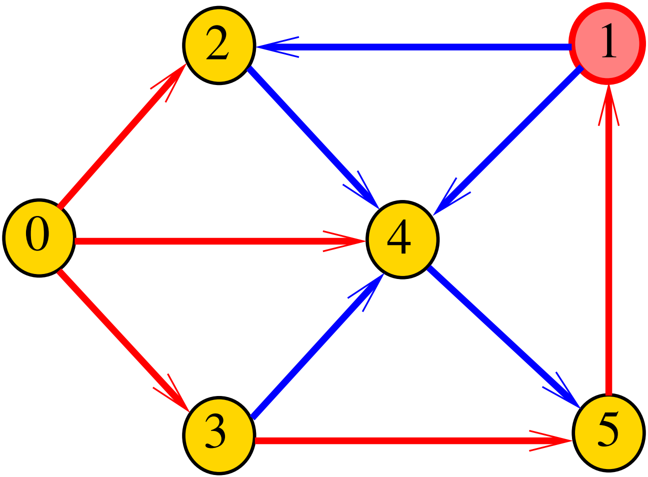
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

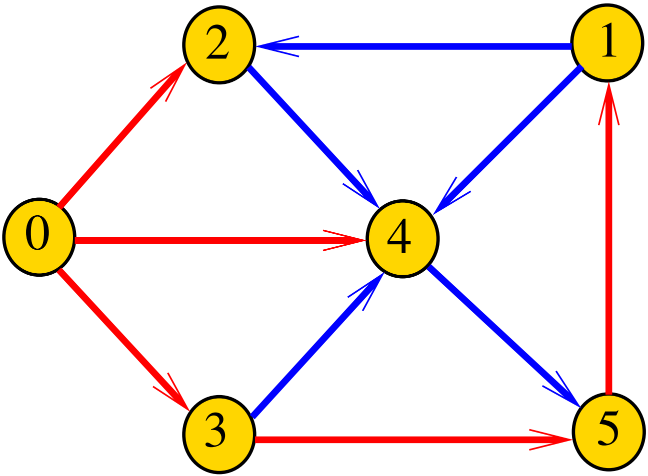
v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Simulação

i	0	1	2	3	4	5
q[i]	0	2	3	4	5	1

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



DIGRAPHdist

`DIGRAPHdist` armazena no vetor `dist` a distância do vértice `s` a cada um dos vértices do grafo `G`

A distância 'infinita' é representada por `G->V`

```
#define maxV 10000;
static int cnt, dist[maxV];
void DIGRAPHdist (Digraph G, Vertex s)
```

DIGRAPHdist

```
#define maxV 10000;
static int dist[maxV];
static Vertex parnt[maxV];
void DIGRAPHbfs (Digraph G, Vertex s)
{
    Vertex v, w;
    for (v = 0; v < G->V; v++) {
        dist[v] = G->V;
        parnt[v] = -1;
    }
    QUEUEinit(G->V);
    dist[s] = 0;
    parnt[s] = s;
```

DIGRAPHdist

```
QUEUEput(s);
while (!QUEUEempty()) {
    v = QUEUEget();
    for (w=0; w < G->V; w++)
        if (G->adj[v][w] == 1
            && dist[w] == G->V) {
            dist[w] = dist[v] + 1;
            parnt[w] = v;
            QUEUEput(w);
        }
}
QUEUEfree();
}
```

Relações invariantes

No início de cada iteração das linhas 8–13 a fila consiste em

> *zero ou mais vértices à distância d de s,*
> *seguidos de zero ou mais vértices à distância $d+1$ de s,*

para algum `d`

Isto permite concluir que, no início de cada iteração, para todo vértice `x`, se `dist[x] != G->V` então `dist[x]` é a distância de `s` a `x`

Consumo de tempo

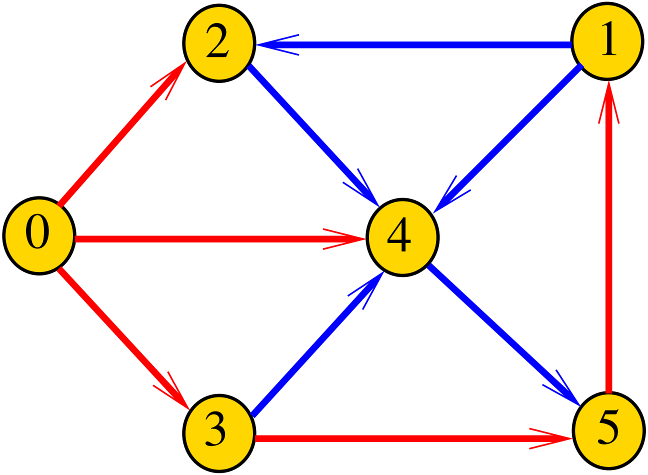
O consumo de tempo da função DIGRAPHdist para vetor de listas de adjacência é $O(V + A)$.

O consumo de tempo da função DIGRAPHdist para matriz de adjacência é $O(V^2)$.

Arborescência da BFS

v	0	1	2	3	4	5
parnt	0	5	0	0	0	3

v	0	1	2	3	4	5
dist[v]	0	3	1	1	1	2



Arborescência da BFS

Trecho de código que, dado o vetor de pais `parnt` e um vértice `x` imprime um 'caminho reverso' de comprimento mínimo de `s` a `x`

Arborescência da BFS

Trecho de código que, dado o vetor de pais `parnt` e um vértice `x` imprime um 'caminho reverso' de comprimento mínimo de `s` a `x`

```
for (v = x; v != s; v = parnt[v])
    printf("%d-", v);
printf("%d\n", s);
```

Condição de inexistência

Se `dist[t]==G->V` para algum vértice `t`, então

$$S = \{\texttt{v} : \texttt{dist}[\texttt{v}] < \texttt{G->V}\}$$
$$T = \{\texttt{v} : \texttt{dist}[\texttt{v}] == \texttt{G->V}\}$$

formam um `st`-corte (S, T) em que todo arco no corte tem ponta inicial em T e ponta final em S