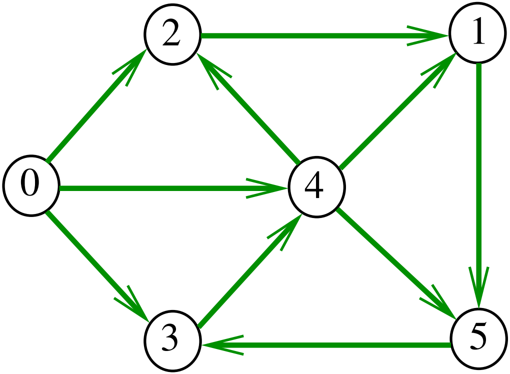
Melhores momentos

AULA 7

Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

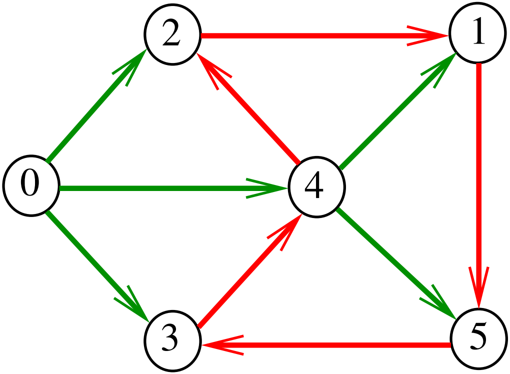
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é SIM



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

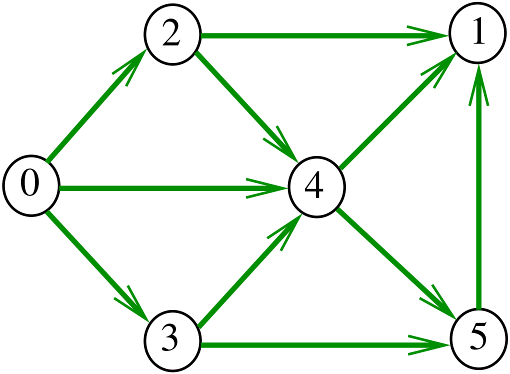
Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é SIM



Procurando um ciclo

Problema: decidir se dado digrafo G possui um ciclo

Exemplo: para o grafo a seguir a resposta é NÃO



Certificados

Como é possível 'verificar' a resposta?

Como é possível 'verificar' que existe ciclo?

Como é possível 'verificar' que não existe ciclo?

Certificado de existência

Trecho de código que verifica se o arco `v-w` junto com alguns arcos da floresta DFS formam um ciclo
Supõe que o grafo está representado através de matriz de adjacência

```
[...]
if (G->adj[v][w] == 0)
    return ERRO;
if (st_caminho(G, w, v) == 0)
    return ERRO;
[...]
```

st_caminho

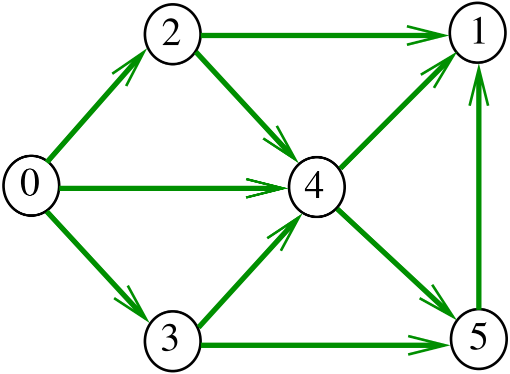
```
int
st_caminho (Digraph G, Vertex s, Vertex t) {
    Vertex v, w;
    if (parnt[t] == -1 || parnt[s] == -1)
        return ERRO;
    for (w = t; w != s; w= v) {
        v= parnt[w];
        if (G->adj[v][w] != 1) return ERRO;
    }
    return OK;
}
```

DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo acíclico

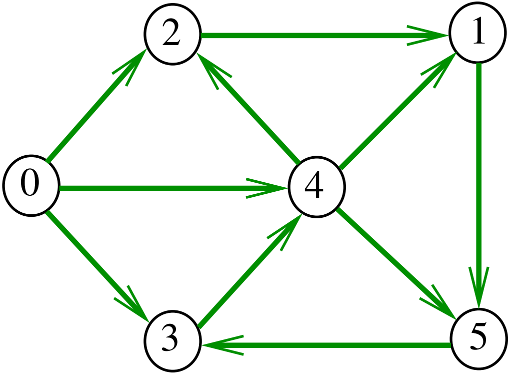


DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico

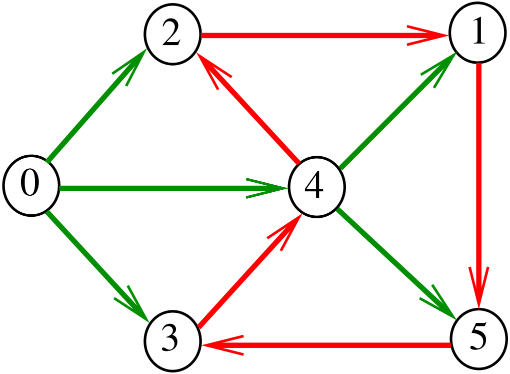


DAGs

Um digrafo é **acíclico** se não tem ciclos

Digrafos acíclicos também são conhecidos como DAGs (= *directed acyclic graphs*)

Exemplo: um digrafo que **não** é acíclico



Ordenaçao topológica

Uma **permutação** dos vértices de um digrafo é uma seqüência em que cada vértice aparece uma e uma só vez

Uma **ordenação topológica** (= *topological sorting*) de um digrafo é uma permutação

$$\texttt{ts[0], ts[1], ..., ts[V-1]}$$

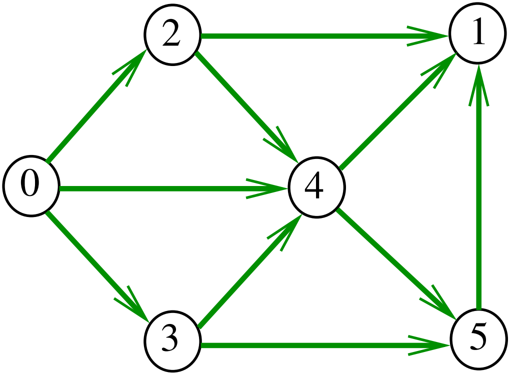
dos seus vértices tal que todo arco tem a forma

$$\texttt{ts[i]-ts[j]} \text{ com } \texttt{i} < \texttt{j}$$

ts[0] é necessariamente uma **fonte**
ts[V-1] é necessariamente um **sorvedouro**

Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGs versus ordenação topológica

É evidente que digrafos com ciclos **não** admitem ordenação topológica.

É menos evidente que **todo** DAG admite ordenação topológica.

A próxima desse fato é um algoritmo que recebe qualquer digrafo e devolve

- um ciclo;
- uma ordenação topológica do digrafo.

Algoritmo de eliminação de fontes

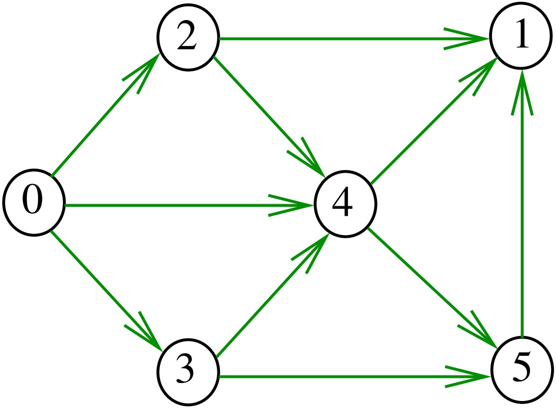
Armazena em `ts[0 . . i-1]` uma permutação de um subconjunto do conjunto de vértices de `G` e devolve o valor de `i`

Se `i` = `G->V` então `ts[0 . . i-1]` é uma ordenação topológica de G.
Caso contrário, `G` **não** é um DAG

```
int DAGts1 (Digraph G, Vertex ts[]);
```

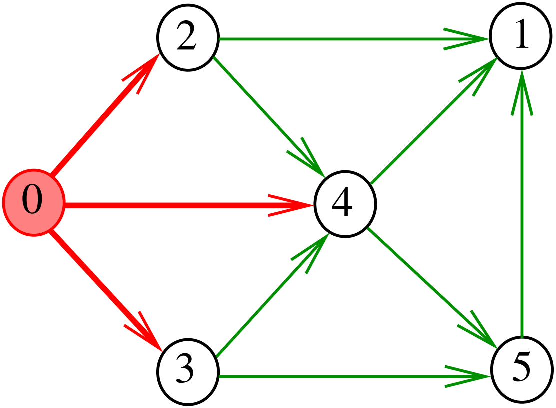
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



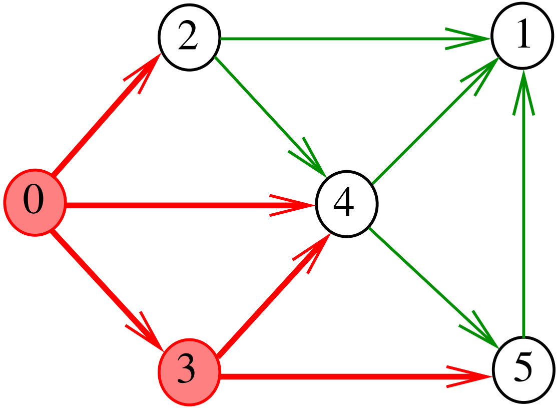
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0					



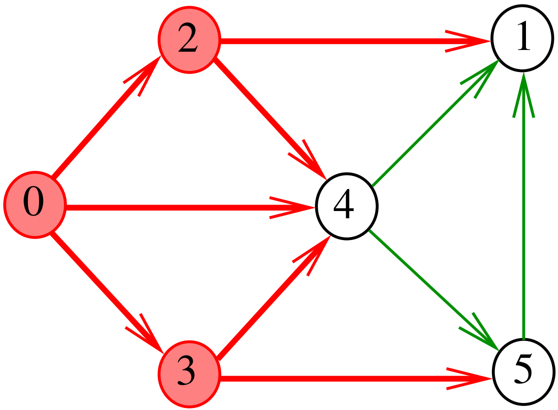
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3				



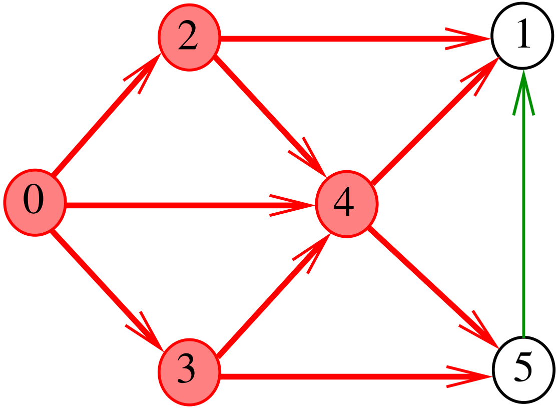
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2			



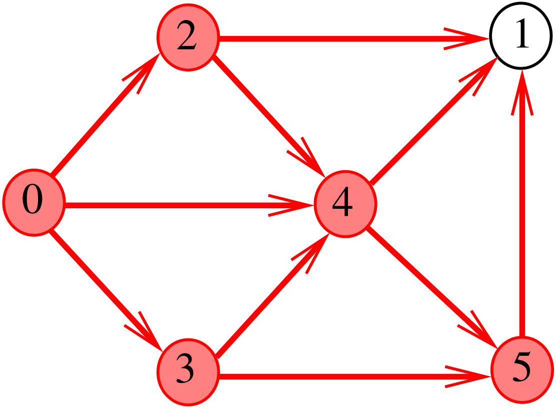
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4		



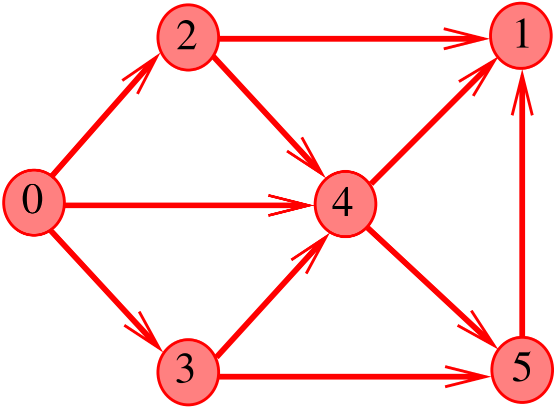
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	



Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	0	3	2	4	5	1



DAGtsf

```
int DAGtsf (Digraph G, Vertex ts[])
{
    int i, in[maxV]; Vertex v; link p;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        in[v] = 0;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
            in[p->w]++;
```

DAGtsf

```
    QUEUEinit(G->V);
    for(v = 0; v < G->V; v++)
        if (in[v] == 0)
            QUEUEput(v);
    for (i = 0; !QUEUEempty(); i++) {
        ts[i] = v = QUEUEget();
        for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
            if (--in[p->w] == 0)
                QUEUEput(p->w);
    }
    QUEUEfree();
    return i;
}
```

Implementação de uma fila

```
/* Item.h */
typedef Vertex Item;

/* QUEUE.h */
void QUEUEinit(int);
int QUEUEempty();
void QUEUEput(Item);
Item QUEUEget();
void QUEUEfree();
```

QUEUEinit e QUEUEempty

```
Item *q;
int inicio, fim;

void QUEUEinit(int maxN) {
   q = (Item*) malloc(maxN*sizeof(Item));
   inicio = 0;
   fim = 0;
}
int QUEUEempty() {
   return inicio == fim;
}
```

QUEUEput, QUEUEget e QUEUEfree

```
void QUEUEput(Item item){
   q[fim++] = item;
}

Item QUEUEget() {
   return q[inicio++];
}

void QUEUEfree() {
   free(q);
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `DAGtsf` para vetor de listas de adjacência é $O(\mathtt{V} + \mathtt{A})$.

O consumo de tempo de uma versão da função `DAGtsf` para matriz de adjacência é $O(\mathtt{V}^2)$.

AULA 8

Algoritmos de ordenação topológica

S 19.6

Algoritmo DFS

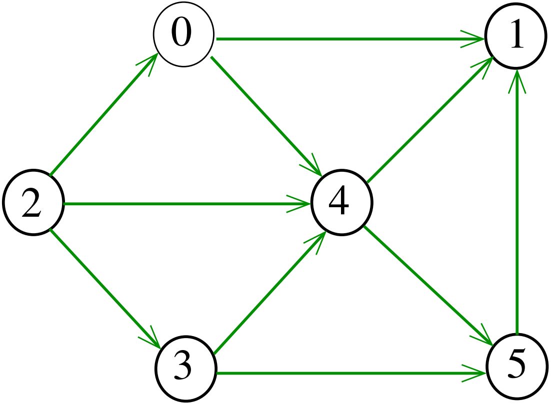
```
static int cnt;
static int lbl[maxV];
```

Recebe um DAG G e armazena em ts[0 . . V-1] uma ordenação topológica de G

```
void DAGts2 (Digraph G, Vertex ts[]);
```

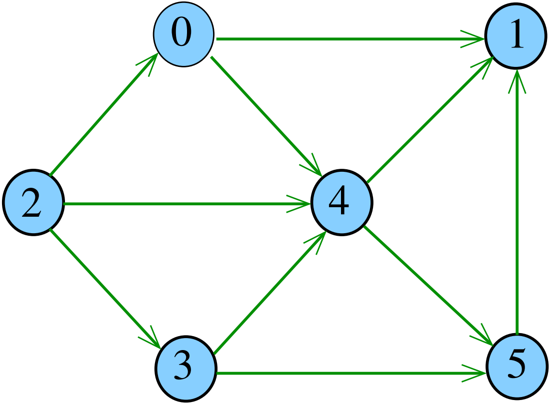
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



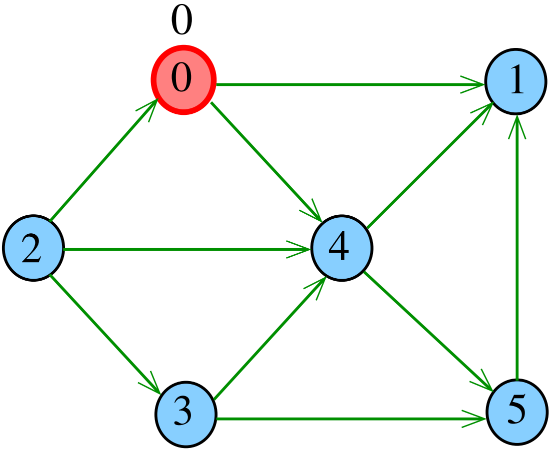
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



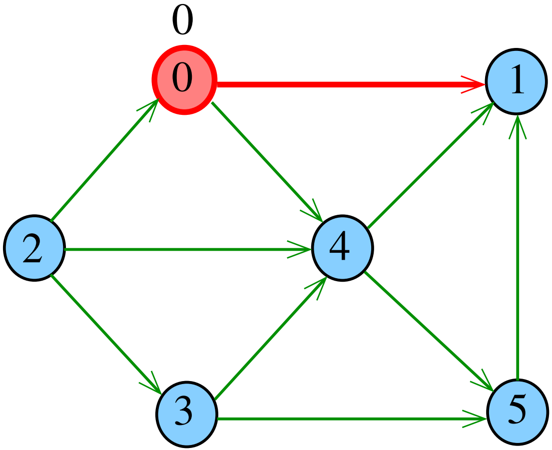
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



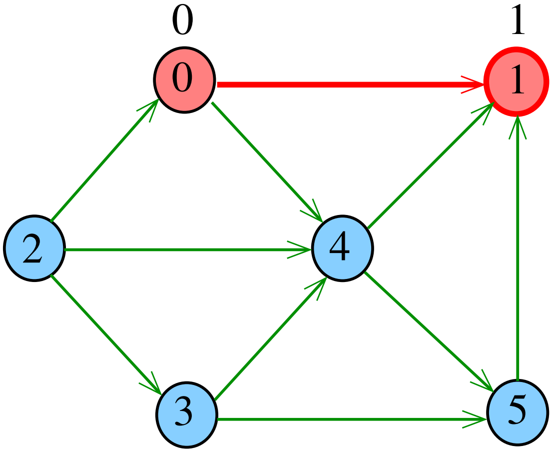
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



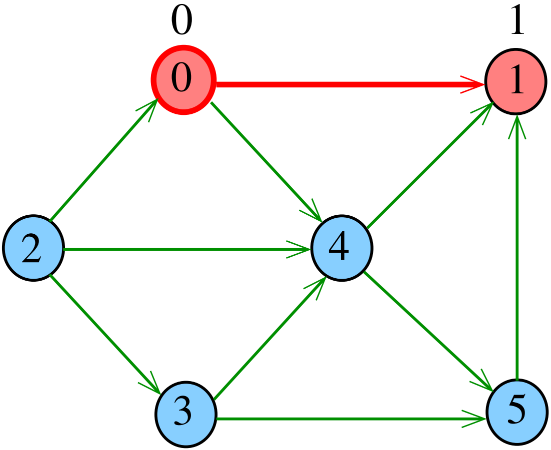
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						



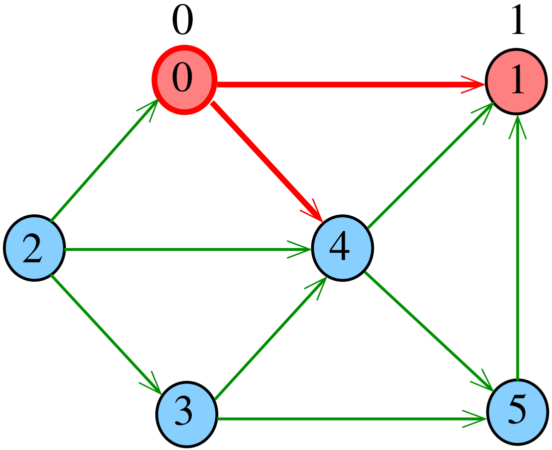
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



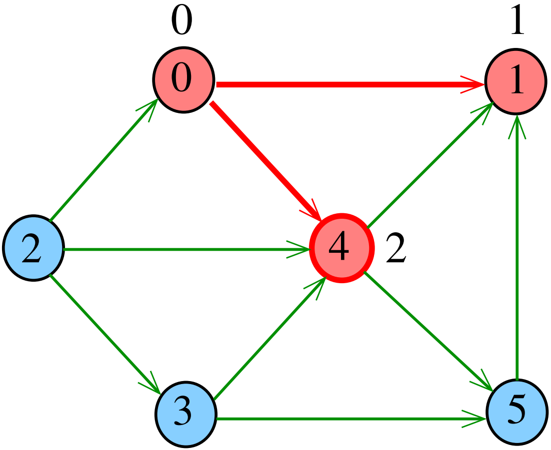
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



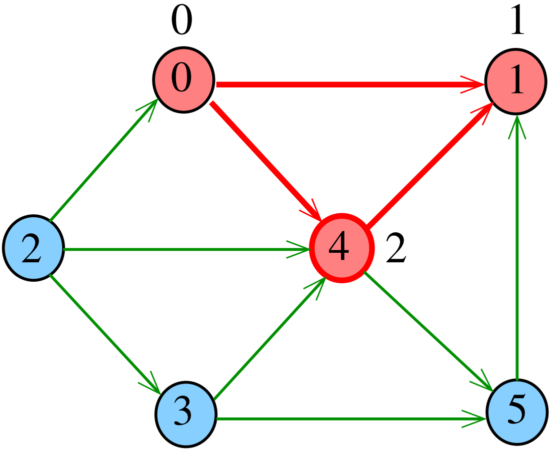
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



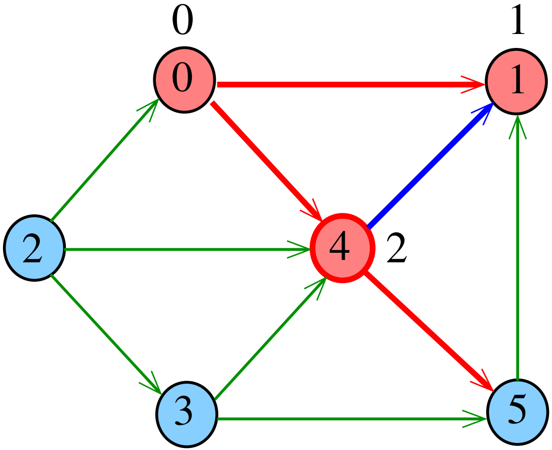
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



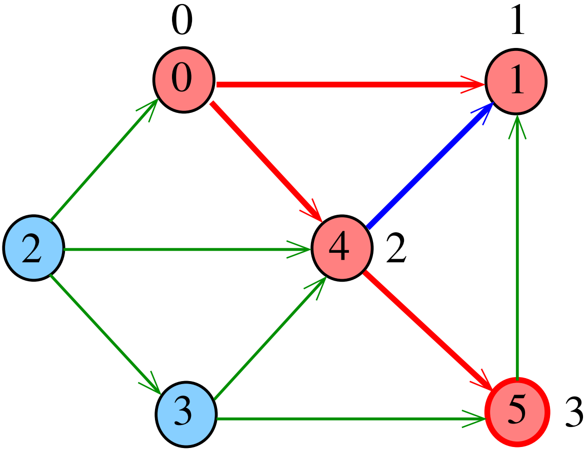
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



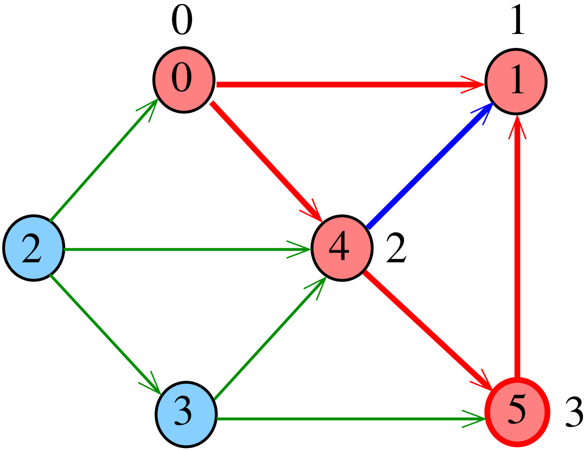
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



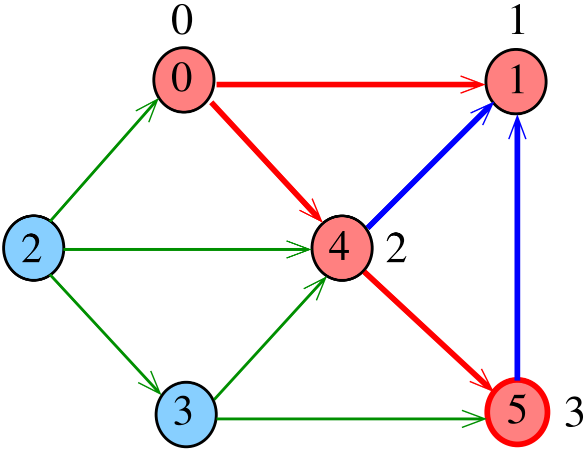
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



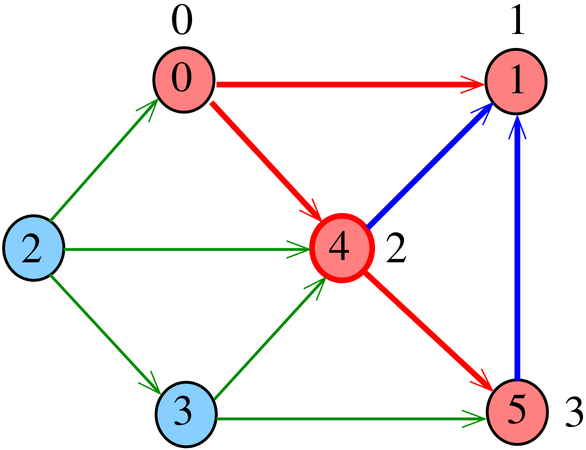
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]						1



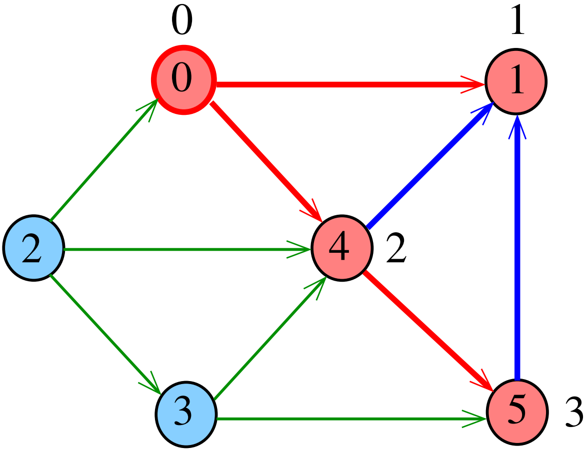
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]					5	1



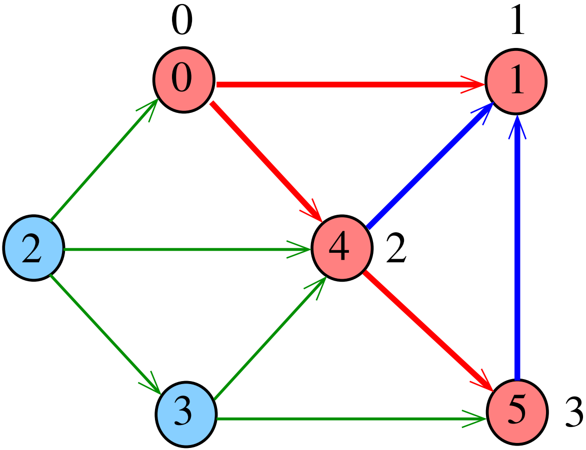
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]				4	5	1



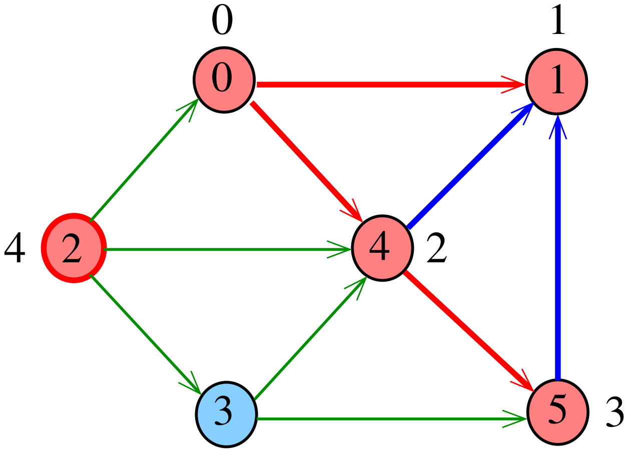
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



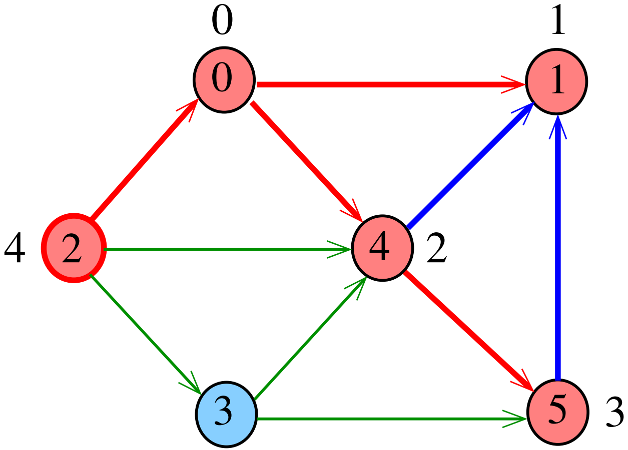
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



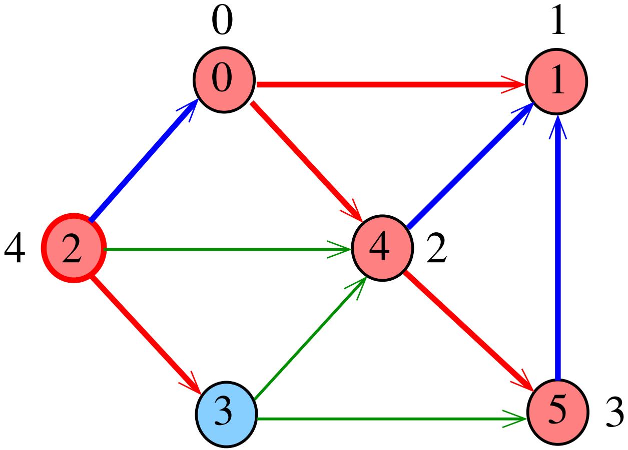
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



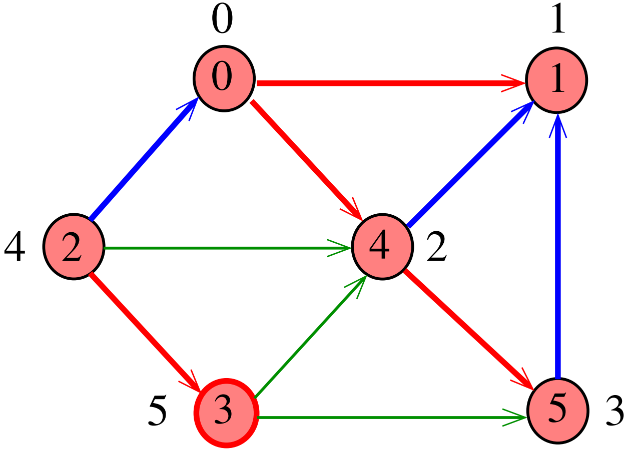
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



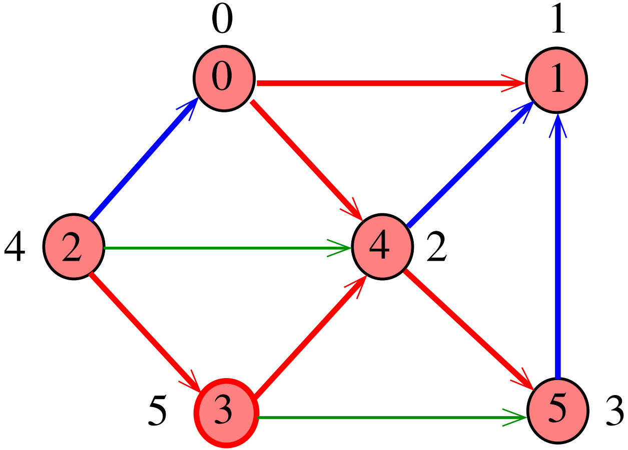
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



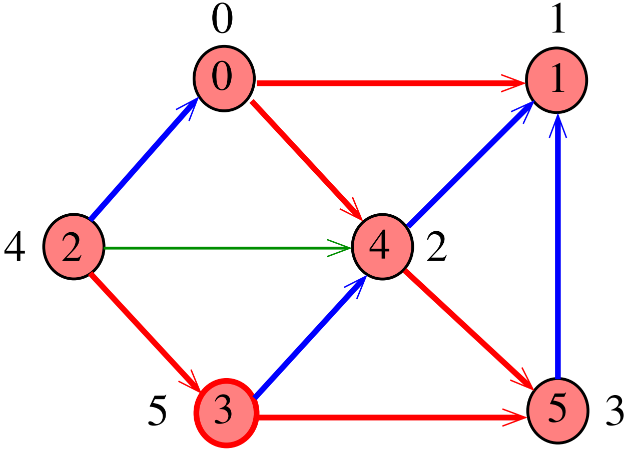
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



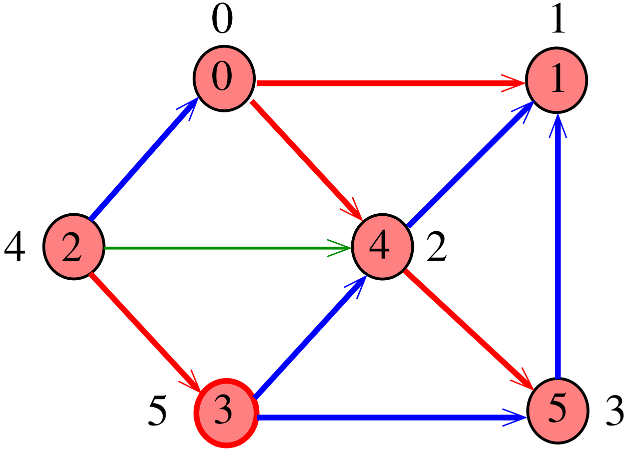
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



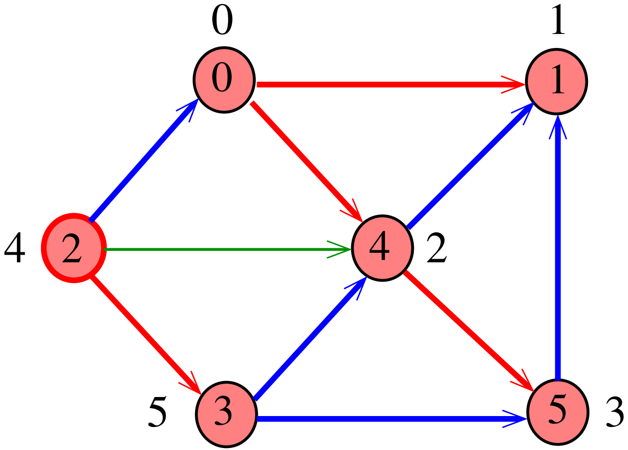
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]			0	4	5	1



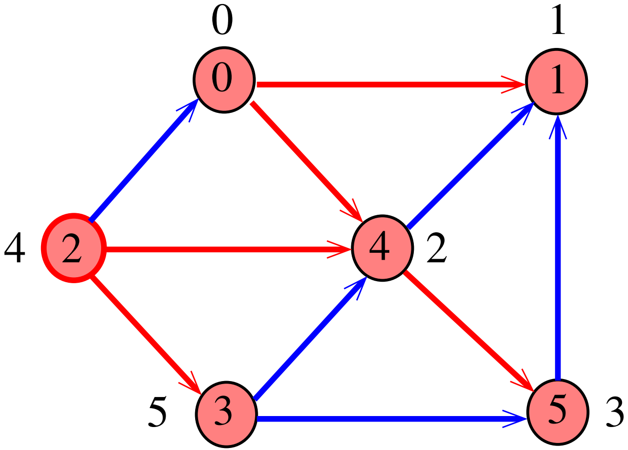
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



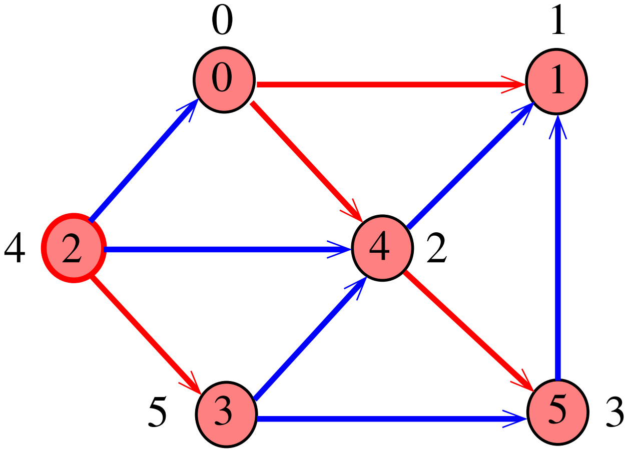
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



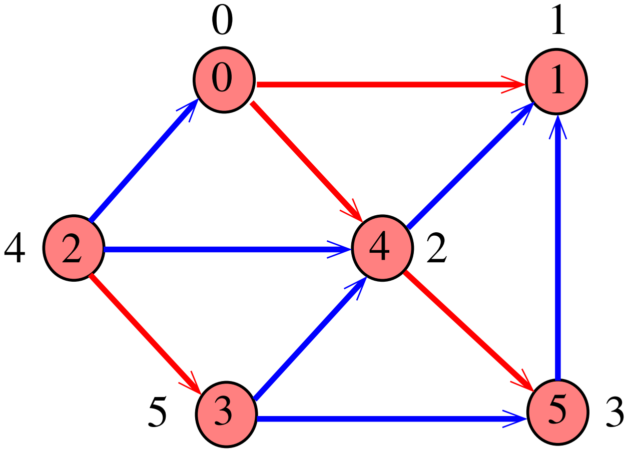
Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]		3	0	4	5	1



Exemplo

i	0	1	2	3	4	5
ts[i]	2	3	0	4	5	1



DAGts2

```
void DAGts2 (Digraph G, Vertex ts[]) {
    Vertex v;
    cnt = G->V-1;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        ts[v] = lbl[v] = -1;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        if (lbl[v] == -1)
            TSdfsR(G, v, ts);
}
```

DAGts2

```
void
TSdfsR (Digraph G, Vertex v, Vertex ts[])
{
    link p;
    lbl[v] = 0;
    for (p=G->adj[v]; p!=NULL; p=p->next)
        if (lbl[p->w] == -1)
            TSdfsR(G, p->v, ts);
    ts[cnt--] = v;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `DAGts2` para vetor de listas de adjacência é $O(\mathtt{V} + \mathtt{A})$.

Certificado de inexistência

Trecho de código que verifica se um vetor `ts[]` armazena uma uma ordenação topológica dos vértices de um grafo `G`

Certificado de inexistência

Trecho de código que verifica se um vetor ts[] armazena uma uma ordenação topológica dos vértices de um grafo G

```
[...]
for (v = 0; v < G->V; v++)
    idx[ts[v]] = v;
for (v= 0; v < G->V; v++)
    for (p=G->adj[v];p!=NULL;p=p->next)
        if (idx[v] > idx[p->w])
            return ERRO;
[...]
```

Adaptação de digraphcycle

Recebe um digrafo `G` e devolve **1** se existe um ciclo em `G` e devolve **0** em caso contrário.

Ademais, se a função devolve **0**, então a função devolve no vetor `ts[ ]` contém uma ordenação topológica dos vértices de `G`.

Supõe que o digrafo tem no máximo `maxV` vértices.

```
int digraphcycle (Digraph G);
```

Adaptação de digraphcycle

```
int digraphcycle (Digraph G, Vertex ts[]) {
    Vertex v;
    time = 0;     cnt = G->V-1;
    for (v = 0; v < G->V; v++)
        d[v] = f[v] = parnt[v] = -1;
    for (v= 0; v < G->V, v++)
        if (d[v] == -1) {
            parnt[v] = v;
            if (cycleR(G,v,ts) == 1) return 1;
        }
    return 0;
}
```

Adaptação de cycleR

```
int cycleR (Digraph G,Vertex v,Vertex ts[])
{
    link p;
    d[v] = time++;
    for (p = G->adj[v]; p != NULL; p= p->next)
        if (d[p->w] == -1) {
            parnt[p->w] = v;
            if(cycleR(G,p->w,ts)==1) return 1;
        }
        else if (f[w] == -1) return 1;
    f[v] = time++; ts[cnt--] = v;
    return 0;
}
```

Consumo de tempo

O consumo de tempo da função `digraphcycle` para vetor de listas de adjacência é $\mathrm{O}(\mathtt{V} + \mathtt{A})$.

O consumo de tempo da função `digraphcycle` para matriz de adjacência é $\mathrm{O}(\mathtt{V}^2)$.

Conclusão

Para todo digrafo `G`, vale uma e apenas umas das seguintes afirmações:

- `G` possui um ciclo
- `G` é um DAG e, portanto, admite uma ordenação topológica