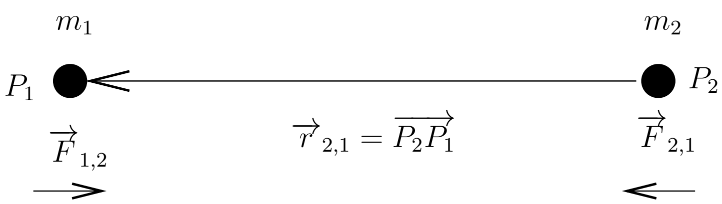
Leis de Newton do movimento

A lei de força mais antiga conhecida é a *lei da gravitação universal* que Isaac Newton[2] publicou no seu *Principia Mathematica* [1]. Esta lei exprime as forças de interação entre dois corpos, um corpo de massa m_1 em um ponto P_1 e um corpo de massa m_2 em um ponto P_2, cujo deslocamento relativo é $\overrightarrow{r}_{2,1} = \overrightarrow{P_2P_1}$. Ela diz que:

$$\overrightarrow{F}_{2,1} = \frac{Gm_1m_2}{r_{2,1}^2}\hat{r}_{2,1} = -\overrightarrow{F}_{1,2} \tag{1}$$

na qual $r_{2,1}$ é a distância entre os centros de massa dos corpos e $\hat{r}_{2,1} = \overrightarrow{r}_{2,1}/r_{2,1}$ é o vetor unitário da direção que vai do corpo 2 ao corpo 1, conforme a ilustração abaixo:



Em palavras, (1) diz que a *magnitude* da força gravitacional é diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. A força está dirigida ao longo da reta que passa pelos centros de massa dos dois corpos e é *atrativa* se a força $\overrightarrow{F}_{2,1}$ exercida pelo corpo 1 sobre o corpo 2 está dirigida para o corpo 1, em sentido $\overrightarrow{r}_{2,1}$.

A constante proporcional G que aparece em (1) é uma constante universal, ou seja, é a mesma para quaisquer corpos. Essa constante é chamada constante gravitacional. Seu valor é

$$G \approx 8.65 \times 10^{-13}\text{km}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{h}^{-2} \tag{2}$$

Devido a segunda lei de Newton da mecânica clássica [2], sabemos que

$$\Sigma\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \tag{3}$$

na qual $\Sigma\overrightarrow{F}$ é a força resultante, m é a massa do corpo e $\overrightarrow{a}$ é o vetor aceleração do corpo. A aceleração possui a mesma direção e o mesmo sentido da força.

A título de exemplo, vamos ilustrar um caso simples em que uma nave (turtleship) está sujeita a atração gravitacional de dois astros, digamos a Terra e a Lua. Considerando

[2] As leis de Newton do movimento é um dos tópicos da disciplina Física I.

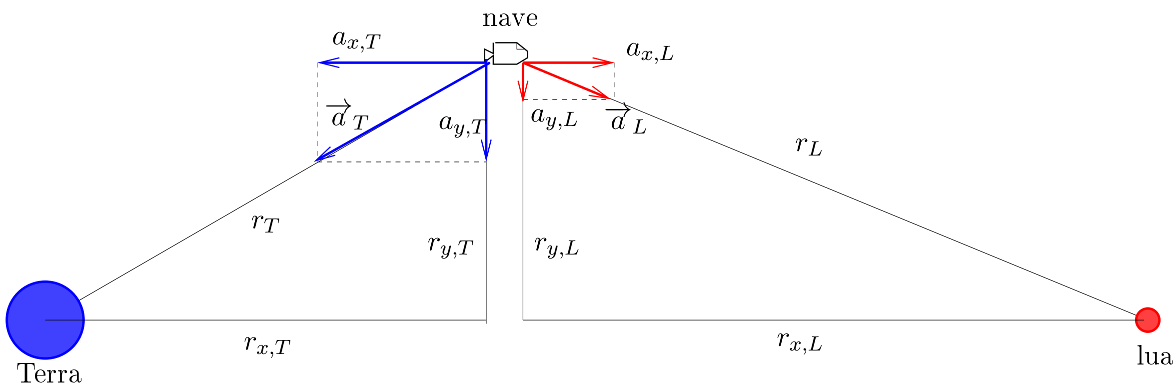
o corpo no ponto P_1 de (1) como sendo a Terra, e o corpo no ponto P_2 de (1) bem como o corpo de (3) como sendo a "turtleship", e combinando (1) e (3) obtemos que

$$\overrightarrow{a}_T = \frac{Gm_T}{r_T^2}\hat{r}_T \tag{4}$$

na qual $\overrightarrow{a}_T$ é o vetor aceleração da força gravitacional exercida pela Terra sobre a nave, m_T é a massa da Terra, r_T é a distância da nave ao centro da Terra e $\hat{r}_T$ é o vetor unitário da direção que vai da nave à Terra. De maneira similar, temos que

$$\overrightarrow{a}_L = \frac{G\,m_L}{r_L^2}\hat{r}_L \tag{5}$$

na qual $\overrightarrow{a}_L$ é o vetor aceleração da força gravitacional exercida pela Lua sobre a nave, m_L é a massa da Lua, r_L é a distância da nave ao centro da Lua e $\hat{r}_T$ é o vetor unitário da direção que vai da nave à Lua. A ilustração abaixo apresenta a disposição dos astros e da nave destacando as distâncias e as acelerações.



Das equações (4) e (5) concluímos que a aceleração da força resultante é

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{a}_T + \overrightarrow{a}_L \\ &= \frac{Gm_T}{r_T^2}\hat{r}_T + \frac{Gm_L}{r_L^2}\hat{r}_L\ .\end{aligned} \tag{6}$$

No caso geral, temos um número arbitrário de astros fornecidos em um conjunto A. A aceleração resultante da "turtleship", nesse caso, é calculada como a soma das contribuições exercidas por cada astro c pertencente ao conjunto A:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= \sum_{\forall c\in A} \overrightarrow{a}_c \\ &= \sum_{\forall c\in A} \left\{\frac{Gm_c}{r_c^2}\hat{r}_c\right\}\ .\end{aligned} \tag{7}$$

Suponha agora que desejemos determinar para cada instante t o vetor posição $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t))$ de uma nave que está sob a atração gravitacional desse conjunto de corpos celestes. Sabemos que o vetor aceleração instantânea é

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

e que seus componentes (a_x, a_y) são tais que

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \ . \tag{8}$$

As equações de Newton (8) reduzem o problema de determinar o vetor posição $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ para subproblemas unidimensionais. No próximo EP veremos como as equações de Newton podem ser usadas para determinarmos computacionalmente uma aproximação de $x(t)$ e, similarmente, de $y(t), v_x(t)$ e $v_y(t)$.

Referências

[1] Herch Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica: 1-Mecânica*, Edgard Blücher, 1981.

[2] Hugh D. Young e Roger A. Freedman, *Sears e Zemansky's Física I: Mecânica*, Addison Wesley, 2003.