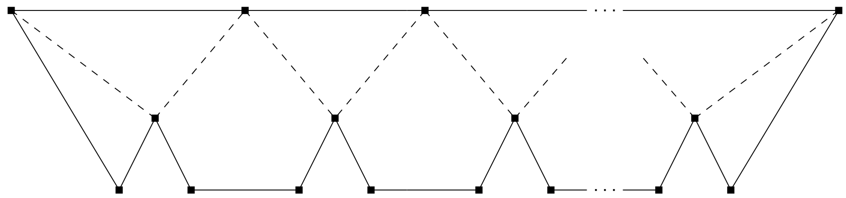
MAC 5747 – Geometria Computacional
Prof. José Coelho de Pina
Monitor: Fábio Henrique Viduani Martinez

LISTA DE EXERCÍCIOS 6 – RESPOSTAS

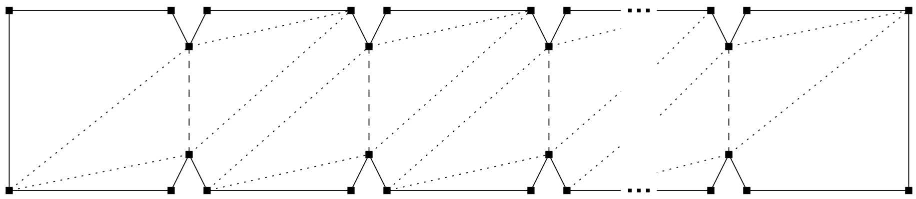
3. (Exercício 2.5.4.1 de [4] — Algoritmo de Hertel e Mehlhorn: pior caso em relação ao número de partes) Encontre um polígono genérico que pode levar ao pior caso do algoritmo de Hertel e Mehlhorn: existe uma triangularização e uma ordem para a remoção das diagonais não-essenciais que produz $2r$ partes convexas, onde r é o número de vértices reflexos do polígono).

   [**Resposta por Renato Carmo**].



   Observe que todas as diagonais (tracejadas) são essenciais.

4. (Exercício 2.5.4.2 de [4]) — Algoritmo de Hertel e Mehlhorn: pior caso em relação ao ótimo) Encontre um polígono genérico que pode levar ao pior caso do algoritmo de Hertel e Mehlhorn em relação à partição ótima: o algorimo de Hertel e Mehlhorn produz $2r$ partes convexas, mas existe uma partição por diagonais com $\lceil r/2 \rceil + 1$ partes convexas, onde r é o número de vértices reflexos do polígono.



   As linhas pontilhadas são as diagonais do algoritmo de Hertel e Melhorn e as linhas tracejadas são as diagonais de uma partição ótima.

6. (*Minimum weight triangulation*) Este exercício mostra um exemplo de um algoritmo geométrico que faz decisões ótimas a cada passo, entretanto ele não fornece uma solução que é ótima globalmente. Dado um conjunto de pontos no plano, uma triangularização é um conjunto maximal de segmentos de reta ligando os pontos tal que dois a dois os segmentos não se intersectam "propriamente" (veja Figura 1). O peso de uma triangularização é a soma dos comprimentos dos segmentos. Dado um conjunto de pontos no plano, o *Problema da Triangularização de Peso Mínimo* é o problema de encontrar, entre todas as triangularizações do conjunto de pontos dado, uma cujo peso seja mínimo.

   [A complexidade do Problema da Triangularização de Peso Mínimo está aberta desde 1975 quando foi mencionado por Shamos e Hoey (cf. [6]). Não se conhece algoritmo polinomial para resolver este problema e também não se sabe se o problema é NP-difícil. O melhor algoritmo de tempo polinomial conhecido produz uma triangularização que, no pior caso é $O(\log n)$ vezes o peso de uma triangularização de peso mínimo (cf. Plaisted e Hong [5], veja também Heath e Pemmaraju [3]).]

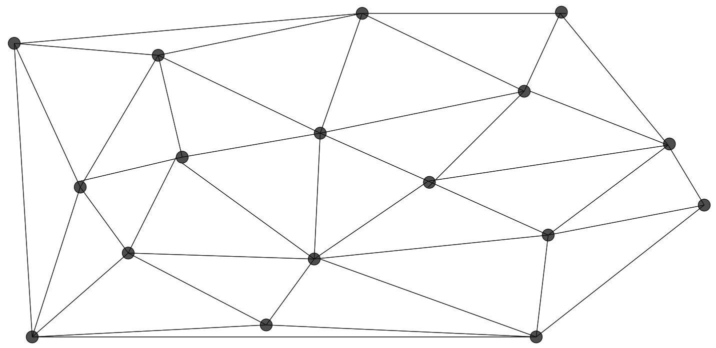


Figura 1: Uma triangularização de um conjunto de pontos.

Uma triangularização *gulosa* (*greedy*) de um conjunto de pontos é uma triangularização produzida pelo seguinte algoritmo:

Algoritmo Guloso(S)
`Entrada:` Um conjunto finito S de pontos no plano.
`Saída:` Uma triangularização de S.
$T \leftarrow \emptyset$;
$L \leftarrow$ o conjunto de todos os segmentos ligando pares de pontos de S;
while $L \neq \emptyset$ **do**
  Seja e um segmento em L de menor comprimento;
  Remova e de L;
  if (e não intersecta os segmentos em T) **then**
    Insira e em T;
endwhile

O Algoritmo Guloso escolhe uma aresta de comprimento mínimo em cada passo. Contrua um instância S para o algoritmo tal que S tem 5 pontos e a triangularização gulosa de S não é uma triangularização de peso mínimo. Para isso:

(a) Forneça as coordenadas dos pontos;

(b) Mostre uma triangularização de peso mínimo de S;

(c) Mostre uma triangularização gulosa de S; e

(d) Calcule os pesos de ambas as triangularizações.

[Demonstra-se que a triangularização gulosa produz no pior caso uma triangularização que é $\Theta(n)$ vezes mais pesada que uma triangularização ótima.

O Capítulo 16 de [1] apresenta um algoritmo que encontra uma triangularização ótima de um polígono convexo através de programação dinâmica.

Sobre outros problemas de triangularização consulte o Capítulo 4, Seção 6 de [2].]

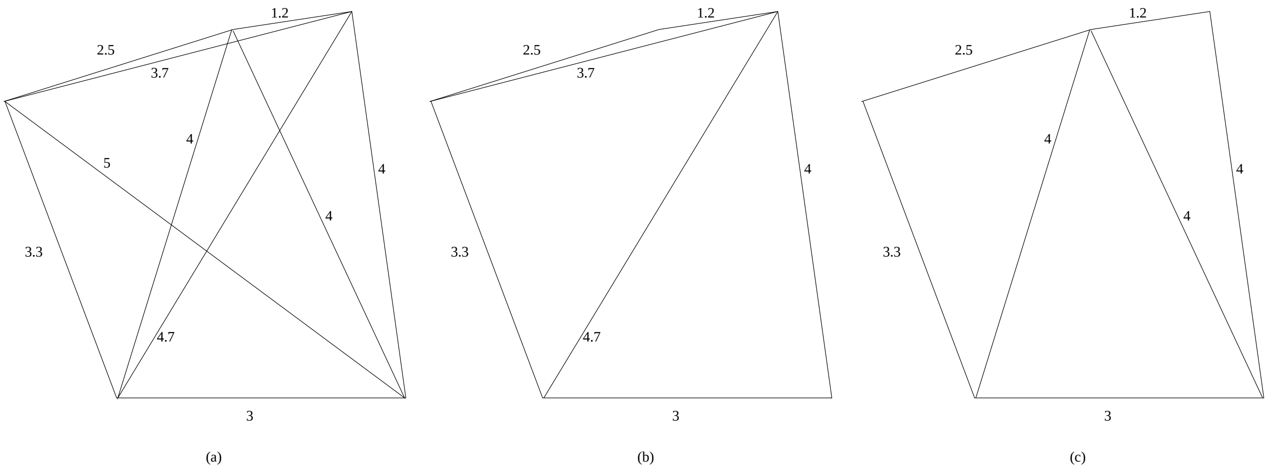


Figura: (a) Uma instância S para o algoritmo tal que S tem 5 pontos. (b) Uma triangularização gulosa de peso 22,4. (c) Uma triangulariação ótima de peso 22.