MAC0331 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1. Instruções

Entregue os exercícios 3, 4 e 6 na aula do dia 31 de outubro, quinta-feira.

2. Exercícios

1. (Exercício 2.3.4.5 de [4] — Polígono $\Rightarrow$ quadriláteros convexos) Prove ou dê um contra-exemplo: Todo polígono com um número par de vértices pode ser particionado por diagonais em quadriláteros convexos.
2. (Exercício 2.3.4.6 de [4] — Polígono $\Rightarrow$ quadriláteros) Prove ou dê um contra-exemplo: Todo polígono com um número par de vértices pode ser particionado por diagonais em quadriláteros.
3. (Exercício 2.5.4.1 de [4] — Algoritmo de Hertel e Mehlhorn: pior caso em relação ao número de partes) Encontre um polígono genérico que pode levar ao pior caso do algoritmo de Hertel e Mehlhorn: existe uma triangularização e uma ordem para a remoção das diagonais não-essenciais que produz $2r$ partes convexas, onde r é o número de vértices reflexos do polígono).
4. (Exercício 2.5.4.2 de [4] — Algoritmo de Hertel e Mehlhorn: pior caso em relação ao ótimo) Encontre um polígono genérico que pode levar ao pior caso do algoritmo de Hertel e Mehlhorn em relação à partição ótima: o algorimo de Hertel e Mehlhorn produz $2r$ partes convexas, mas existe uma partição por diagonais com $\lceil r/2 \rceil + 1$ partes convexas, onde r é o número de vértices reflexos do polígono.
5. Seja P um polígono convexo cujos vértices estão em um vetor em ordem anti-horária. Descreva um algoritmo que decide se um dado ponto p pertence a P. A complexidade de tempo do seu algoritmo deve ser $O(\log n)$.
6. (*Minimum weight triangulation*) Este exercício mostra um exemplo de um algoritmo geométrico que faz decisões ótimas a cada passo, entretanto ele não fornece uma solução que é ótima globalmente. Dado um conjunto de pontos no plano, uma triangularização é um conjunto maximal de segmentos de reta ligando os pontos tal que dois a dois os segmentos não se intersectam "propriamente" (veja Figura 1). O peso de uma triangularização é a soma dos comprimentos dos segmentos. Dado um conjunto de pontos no plano, o *Problema da Triangularização de Peso Mínimo* é o problema de encontrar, entre todas as triangularizações do conjunto de pontos dado, uma cujo peso seja mínimo.

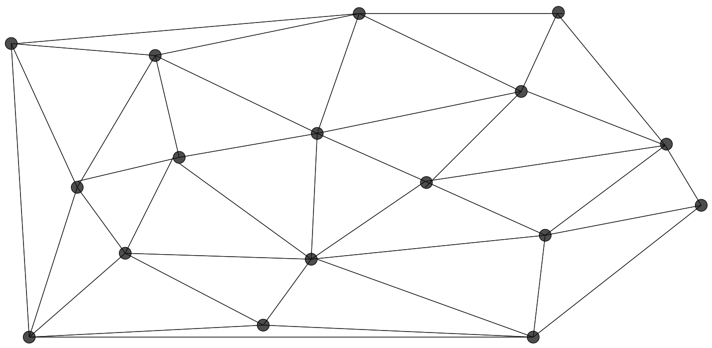

FIGURA 1. Uma triangularização de um conjunto de pontos.

[A complexidade do Problema da Triangularização de Peso Mínimo está aberta desde 1975 quando foi mencionado por Shamos e Hoey (cf. [6]). Não se conhece algoritmo polinomial para resolver este problema e também não se sabe se o problema é NP-difícil. O melhor algoritmo de tempo polinomial conhecido produz uma triangularização que, no pior caso é $O(\log n)$ vezes o peso de uma triangularização de peso mínimo (cf. Plaisted e Hong [5], veja também Heath e Pemmaraju [3]).]

Uma triangularização *gulosa* (*greedy*) de um conjunto de pontos é uma triangularização produzida pelo seguinte algoritmo:

Algoritmo Guloso(S)
`Entrada:` Um conjunto finito S de pontos no plano.
`Saída:` Uma triangularização de S.
$T \leftarrow \emptyset$;
$L \leftarrow$ o conjunto de todos os segmentos ligando pares de pontos de S;
while $L \neq \emptyset$ **do**
  Seja e um segmento em L de menor comprimento;
  Remova e de L;
  if (e não intersecta os segmentos em T) **then**
    Insira e em T;
endwhile

O Algoritmo Guloso escolhe uma aresta de comprimento mínimo em cada passo. Contrua um instância S para o algoritmo tal que S tem 5 pontos e a triangularização gulosa de S não é uma triangularização de peso mínimo. Para isso:

(a) Forneça as coordenadas dos pontos;
(b) Mostre uma triangularização de peso mínimo de S;
(c) Mostre uma triangularização gulosa de S; e
(d) Calcule os pesos de ambas as triangularizações.

[Demonstra-se que a triangularização gulosa produz no pior caso uma triangularização que é $\Theta(n)$ vezes mais pesada que uma triangularização ótima.

O Capítulo 16 de Cormen, Leiserson e Rivest [1] apresenta um algoritmo que encontra uma triangularização ótima de um polígono convexo através de programação dinâmica.

Sobre outros problemas de triangularização consulte o Capítulo 4, Seção 6 de [2].]

Referências

[1] T.H. Cormen, C.E. Leiserson e R.L. Rivest, *Introduction to algorithms*, The MIT Electrical Engineering and Computer Scienece Series, The MIT Press, MacGraw-Hill Book Company, 1990, QA758 C811i.

[2] L.H. Figueiredo e P.C.P. Carvalho, *Introdução à geometria computacional*, 18º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991, QA758 F475i.

[3] L.S. Heath e S.V. Pemmaraju, New results for the minumum weight triangulation problem, *Algorithmica* **12** (1994), 533–552.

[4] J. O'Rourke, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.

[5] D.A. Plaisted e J. Hong, A heuristic triangulation algorithm, *Journal of Algorithms* **8** (1987), 405–437.

[6] M.I. Shamos e D. Hoey, Geometric intersection problems, *Proceedings of the 17th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1976, pp. 208–215.