A Heurística de Heath–Pemmaraju (1994) para o Problema da Triangularização de Peso Mínimo*

Fábio Henrique Viduani Martinez

Novembro de 1999

Resumo

Dado um conjunto de pontos no plano, uma triangularização é um conjunto maximal de segmentos que não se interceptam e que conectam estes pontos. O peso de uma triangularização é a soma das distâncias euclidianas de seus segmentos. Nenhum algoritmo de tempo polinomial é conhecido para encontrar uma triangularização de peso mínimo e também não se conhece uma demonstração de que o problema da triangularização de peso mínimo é NP-difícil. Estudamos uma heurística de Heath e Pemmaraju [15] que triangulariza um conjunto de n pontos em tempo $O(n^3)$ e nunca produz uma triangularização cujo peso é maior que aquela produzida pela triangularização gulosa. Este algoritmo produz uma triangularização ótima se os pontos são vértices de um polígono convexo. Resultados experimentais também foram apresentados neste trabalho, indicando, para estes experimentos particulares, que o algoritmo proposto raramente produz uma triangularização não ótima e, ainda, apresenta melhores resultados que uma heurística bastante similar proposta por Lingas [33]. Na direção de mostrar que o problema da triangularização de peso mínimo é NP-difícil, duas generalizações muito próximas do problema da triangularização de peso mínimo são provadas serem NP-difíceis. Resultados anteriores e posteriores a este trabalho também são apresentados.

1 Introdução

1.1 Conceitos Básicos

Seja $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ um conjunto de pontos no plano, onde cada ponto p_i tem as coordenadas (x_i, y_i). Considere que não existem três pontos colineares em P. Seja (p_i, p_j), com $i \neq j$, o **segmento de reta** com extremos em p_i e p_j. Seja $E(P) = \{(p_i, p_j) : i \neq j\}$ o conjunto de todos os possíveis segmentos com extremos em P. Dois segmentos **se interceptam** se existe um ponto comum a estes segmentos que não é um extremo de qualquer dos dois segmentos. Uma **triangularização** $T(P)$ dos pontos em P é um conjunto maximal de segmentos que não se interceptam dois a dois. Seja $\mathrm{CH}(P)$ o conjunto de segmentos que fazem parte do fecho convexo de P.

Qualquer triangularização $T(P)$ tem as seguintes propriedades:

1. $\mathrm{CH}(P) \subseteq T(P) \subseteq E(P)$.
2. $|T(P)| = 3(n-1) - |\mathrm{CH}(P)|$. Ainda, como $3 \leq |\mathrm{CH}(P)| \leq n$, temos que $2n - 3 \leq |T(P)| \leq 3n - 6$.

*Seminário apresentado como parte dos requisitos para aprovação na disciplina MAC 5747 – Geometria Computacional, 2º semestre de 1999, ministrada pelo Professor Carlos Eduardo Ferreira.

A Propridedade 1 é trivialmente verificável e decorre das definições de cada um dos conjutos $\mathrm{CH}(P)$, $T(P)$ e $E(P)$. A igualdade $|T(P)| = 3(n-1) - |\mathrm{CH}(P)|$ da Propridade 2 pode ser demonstrada por indução no tamanho n do conjunto P.

O **peso** $w(p_i, p_j)$ de um segmento (p_i, p_j) é a distância euclidiana entre p_i e p_j e é dado por $w(p_i, p_j) = ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2}$. O **peso de uma triangularização** $T(P)$ é dado por $W(T(P)) = \Sigma_{(p_i,p_j)\in T(P)}$ $w(p_i, p_j)$. Uma **triangularização de peso mínimo**, também chamada de **triangularização ótima**, de um conjunto P de pontos do plano é uma triangularização de P que tem peso mínimo entre todas as possíveis triangularizações. O **problema da triangularização de peso mínimo** é então o seguinte:

Problema MWT : dado $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ um conjunto de n pontos no plano, encontrar uma triangularização de peso mínimo de P.

Uma triangularização de peso mínimo arbitrária de um conjunto de pontos P é denotada por $\mathrm{MWT}(P)$. Para ilustrar estes conceitos, a Figura 1 mostra uma triangularização de peso mínimo e uma triangularização arbitrária de um conjunto de dez pontos.

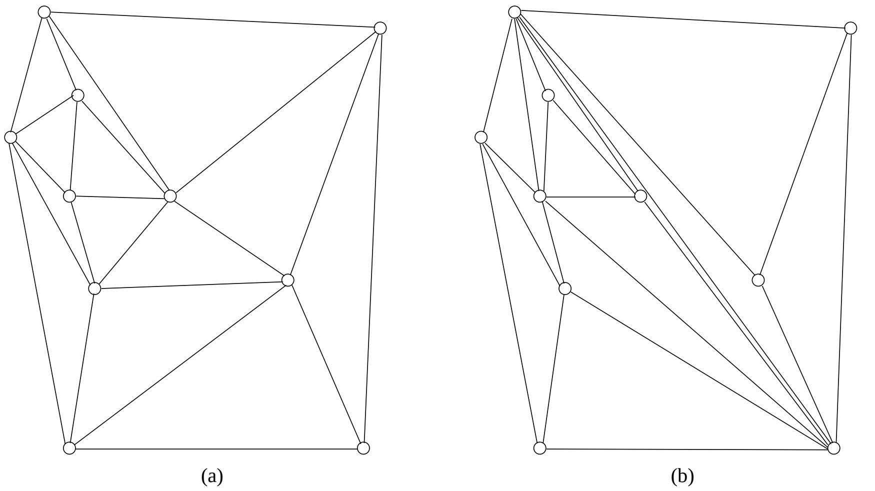

Figura 1: (a) Uma triangularização de peso mínimo e (b) uma triangularização arbitrária de um conjunto de dez pontos.

Em [15], este problema é atacado em duas direções. Na primeira direção, os autores propõem o algoritmo de triangularização gulosa com árvore geradora (*greedy spanning tree triangulation* – GST-T), que triangulariza um conjunto de n pontos em tempo $O(n^3)$. O algoritmo GST-T é bastante semelhante à heurística da triangularização com árvore geradora mínima (*minimum spanning tree triangulation* – MST-T) de Lingas [33]. Ambos GST-T e MST-T seguem uma estrutura algorítmica de dois passos. No primeiro passo, P é visto como um conjunto de vértices e $E(P)$ como um conjunto de arestas de um grafo, e cada um dos algoritmos escolhe uma árvore geradora de $(P, E(P))$. A escolha da árvore geradora é crucial e os algoritmos GST-T e MST-T diferem nesta escolha. No segundo passo, uma triangularização ótima contendo a árvore geradora é obtida usando um algoritmo de programação dinâmica que é uma extensão de um algoritmo devido a Gilbert [13, 6] que triangulariza otimamente o interior de um polígono simples. Se todo ponto de P está no fecho convexo, então ambos os algoritmos triangularizam otimamente P. O algoritmo MST-T nunca produz uma triangularização que tem peso maior que uma triangularização de Delaunay; o algoritmo GST-T nunca produz uma triangularização que tem peso maior que uma triangularização gulosa. Entretanto, experimentos apresentados em [15] levaram os autores a acreditar que o algoritmo GST-T raramente produz uma triangularização não ótima e produz uma triangularização ótima mais freqüentemente que o algoritmo de triangularização gulosa. Mesmo quando o GST-T falha na obtenção de uma triangularização ótima, os experimentos realizados sobre os algoritmos MST-T e GST-T apresentaram resultados muito próximos dos resultados ótimos, motivando os autores a conjecturar que ambos produziam triangularizações dentro de um fator $O(1)$ da triangularização de peso mínimo, no pior caso. Posteriormente, como veremos na Seção 1.3, esta conjectura foi mostrada não ser correta.

Também neste trabalho [15], foi apresentada uma formulação do problema da triangularização de peso mínimo como um problema da Teoria dos Grafos. Esta formulação motivou o estudo de uma variedade de problemas relacionados em grafos. A demonstração de que um destes problemas é NP-difícil é apresentada. Além disso, outro resultado nesta classe de complexidade foi motivado por um resultado devido a Lloyd [34]. Dado P e E', onde E' é um subconjunto de $E(P)$ que contém pelo menos uma triangularização de P, o problema de encontrar uma triangularização de peso mínimo de P que é subconjunto de E' foi mostrado ser NP-difícil.

1.2 Uma Motivação

Uma motivação bastante citada nos trabalhos desenvolvidos é que o problema da triangularização de peso mínimo tem aplicações na aproximação numérica de dados[1]. Yoeli [49] propôs uma técnica chamada *método poliédrico* para calcular o valor de uma função f em um ponto arbitrário p, onde o valor de f é dado sobre um conjunto de pontos p_i espaçados irregularmente, com $i = 1, 2, \ldots, n$. Nesta técnica, a função superfície é aproximada por uma triangularização dos pontos p_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Se o ponto p estiver em alguma face da triangularização, então $f(p)$ pode ser aproximado pela interpolação linear dos valores de f dos três pontos daquela face. Uma triangularização de peso mínimo tem boas propriedades numéricas e boa aproximação da função superfície.

1.3 Resultados Anteriores e Posteriores

A complexidade do problema da triangularização de peso mínimo está aberta desde 1975, quando o problema foi mencionado por Shamos e Hoey [39] e permanece um dos últimos quatro problemas em aberto da lista original de 12 problemas em aberto de Garey e Johnson [12]. As conseqüências das tentativas de mostrar que o problema da triangularização de peso mínimo é NP-difícil são alguns resultados relacionados. Em um dos primeiros resultados, Lloyd em [34] mostrou que dado um conjunto de pontos P no plano e um subconjunto E' de $E(P)$, o problema de determinar se E' contém uma triangularização de P é NP-completo. Em seguida, Lingas em [32] mostrou que o problema de determinar a triangulação geométrica de peso mínimo de polígonos multiconexos é NP-completo.

As triangularizações gulosa e de Delaunay sempre foram bastante estudadas como boas aproximações da triangularização de peso mínimo. A **triangularização gulosa** é construída por um algoritmo guloso que escolhe sempre a menor aresta que não intercepta qualquer outra aresta previamente escolhida. O algoritmo mais eficiente para a triangularização gulosa tem complexidade de tempo no caso médio $O(n)$ e complexidade de espaço $O(n)$ [2, 26, 7, 22, 30, 29]. A **triangularização de Delaunay** é o dual planar do diagrama de Voronoi e pode ser construída em tempo $O(n \log n)$ por um algoritmo de divisão-e-conquista [39]. Contra-exemplos simples para mostrar que o algoritmo guloso e o algoritmo de Delaunay não produzem uma triangularização ótima são apresentados em [34].

[1] Mais precisamente, *numerical approximation of bivariate data* [15].

Denote por $\mathrm{GT}(T)$, $\mathrm{DT}(T)$ e $\mathrm{MWT}(T)$ uma triangularização gulosa, uma triangularização de Delaunay e uma triangularização de peso mínimo de P, respectivamente. Uma medida de quão próxima uma triangularização $T(P)$ está da triangularização de peso mínimo é dada pela razão

$$R(T(P)) = \frac{W(T(P))}{W(\mathrm{MWT}(P))}.$$

Como a triangularização gulosa e a triangularização de Delaunay não são ótimas, as razões de aproximação de pior caso $R(\mathrm{GT}(P))$ e $R(\mathrm{DT}(P))$ fornecem uma indicação de quão bem estas triangularizações se aproximam de $\mathrm{MWT}(P)$. Levcopoulos em [21] apresentou um limitante inferior para a triangularização gulosa, provando que, para cada n, existe um conjunto P com n pontos com a propriedade que

$$R(\mathrm{GT}(P)) = \Omega(\sqrt{n}).$$

Em [26, 22], Levcopoulous e Krznaric mostraram que a triangularização gulosa de um conjunto P tem peso total das arestas não maior que $O(\sqrt{n})$ vezes o peso ótimo. Este resultado, em conjunto com o limitante anteriormente estabelecido, finalizam a questão da razão de aproximação de pior caso entre a triangularização gulosa e a triangularização de peso mínimo. Em um trabalho complementar, Kirkpatrick [17] construiu, para cada n, um conjunto P com n pontos com a propriedade que

$$R(\mathrm{DT}(P)) = \Theta(n).$$

Assim, a triangularização gulosa e a triangularização de Delaunay podem ser aproximações arbitrariamente ruins de uma triangularização de peso mínimo.

Lingas em [33] propôs a heurística da triangularização com árvore geradora mínima MST-T para o problema da triangularização de peso mínimo que tem tempo de execução $O(n^3)$ e parece ter um bom desempenho no caso médio.

A heurística da triangularização gulosa com árvore geradora GST-T proposta por Heath e Pemmaraju em [15] para o problema da triangularização de peso mínimo também tem tempo de execução $O(n^3)$, tem bom desempenho no caso médio e, em geral, fornece melhores resultados que aqueles obtidos pelo MST-T.

Alternativas a estas heurísticas foram lançadas por Xu e Zhou em [45]. Os autores propuseram duas heurísticas melhoradas, com tempo de execução $O(n^3)$ e que nunca produzem triangularizações piores que aquelas produzidas pelos algoritmos MST-T e GST-T. Os dois algoritmos também produzem uma triangularização ótima se os pontos são vértices de um polígono convexo e também em alguns casos especiais.

Em 1996, Levcopoulos e Krznaric em [23] mostraram que as duas heurísticas anteriores, de Lingas [33] e de Heath e Pemmaraju [15], podem produzir triangularizações que são $\Omega(n)$ e $\Omega(\sqrt{n})$ vezes maiores que uma triangularização ótima, respecivamente, onde estes limitantes são justos. Isto é,

$$R(\text{MST-T}(P)) = \Omega(n)$$

e

$$R(\text{GST-T}(P)) = \Omega(\sqrt{n}).$$

Isso significa que, assim como a triangularização gulosa e a triangularização de Delaunay, a triangularização com árvore geradora mínima de Lingas [33] e a triangularização gulosa com árvore geradora de Heath e Pemmaraju [15] também podem ser aproximações arbitrariamente ruins de uma triangularização de peso mínimo. Em outro trabalho [26, 22], os mesmos autores mostraram que existe um algoritmo de tempo polinomial que sempre produz uma triangularização cujo peso total é, no máximo, um fator constante vezes o peso de uma triangularização de peso mínimo.

Plaisted e Hong em [37] apresentaram um algoritmo de triangularização e mostraram que o peso da triangularização que este algoritmo produz é $O(\log n)$ vezes maior que o peso de uma triangularização ótima. A complexidade de tempo do algoritmo de Plaisted e Hong é $O(n^5)$, mas Smith em [40] apresentou uma melhora significativa deste algoritmo, cuja complexidade de tempo é $O(n^2 \log n)$. O algoritmo de triangularização quase-gulosa de Levcopoulos e Krznaric [26, 22] tem tempo de execução $O(n \log n)$ e tem fator de aproximação $O(1)$ da triangularização ótima. Os fatores de aproximação destas heurísticas [37] e [26, 22] dependem de duas características: (i) um bom particionamento do plano em polígonos convexos vazios, e (ii) uma boa triangularização destes polígonos conexos. Especialmente para a heurística da triangularização quase-gulosa, o fator de aproximação constante depende crucialmente do segundo passo, isto é, de quão bem as triangularizações dos polígonos convexos podem ser aproximadas de triangularizações ótimas. Além disso, para preservar o limitante de tempo $O(n \log n)$, o segundo passo deve também ser executado em tempo $O(n \log n)$. Na verdade, a triangularização quase-gulosa pode ser computada em tempo linear se a árvore geradora mínima ou a triangularização de Delaunay é fornecida. Em um trabalho mais recente[25], Levcopoulos e Krznaric propuseram um algoritmo de aproximação de tempo linear para a triangularização de peso mínimo de polígonos convexos.

2 A Heurística de Heath–Pemmaraju

Antes de apresentar o algoritmo GST-T, descreveremos um algoritmo que é essencial como uma sub-rotina para esta heurística. O algoritmo de programação dinâmica de Gilbert [13, 6] triangulariza de forma ótima o interior de um polígono simples em tempo $O(n^3)$. O algoritmo de Gilbert pode ser facilmente estendido para triangularizar uma figura mais geral, chamada célula. Uma **célula** é qualquer face interior de um grafo planar obtido pelo desenho de linhas retas imersas neste grafo [15]. Qualquer célula pode ser representada unicamente por uma seqüência de vértices $p_1, p_2, \ldots, p_n$ encontrados em um percurso no sentido anti-horário da fronteira da célula. A Figura 2 mostra uma exemplo de uma célula.

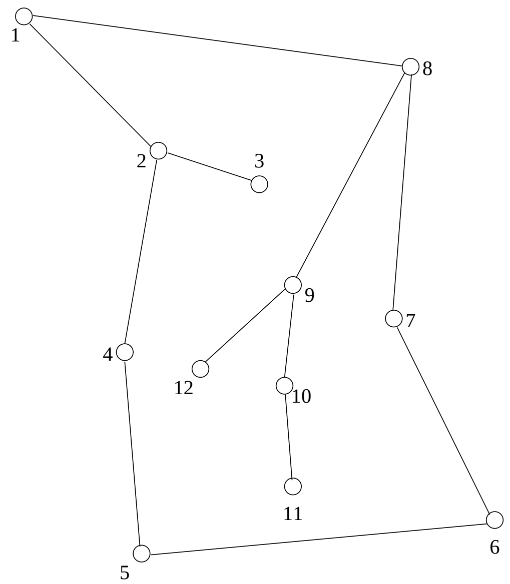

Figura 2: Uma célula com 12 pontos, representada pela seqüência 1, 2, 3, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 12, 9, 8.

Proposição 2.1 *Uma célula de n pontos pode ser otimamente triangularizada em tempo $O(n^3)$.*

□

A extensão do algoritmo de Gilbert mencionada acima, chamada triangularização ótima de células (*optimal cell triangulation* – OCT), é chamada como uma sub-rotina em MST-T e GST-T. Mais detalhes podem ser encontrados em Heath e Pemmaraju [14]. Apresentaremos agora o algoritmo MST-T [33].

Triangularização com Árvore Geradora–Delaunay (MST-T)
Entrada: um conjunto de n pontos $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
Saída: uma triangularização MST-T(P).

01. Compute a triangularização de Delaunay DT(P).
02. Compute uma árvore geradora mínima DMST(P) de $(P, E(P))$, utilizando a seguinte atribuição de custos para os segmentos em $E(P)$:

$$c((p_i, p_j)) = \begin{cases} \infty & \text{se } (p_i, p_j) \notin \mathrm{DT}(P), \\ 0 & \text{se } (p_i, p_j) \in \mathrm{CH}(P), \\ w(p_i, p_j) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

03. Utilize o algoritmo OCT para triangularizar otimamente a célula única definida por CH(P) $\cup$ DMST(P), produzindo MST-T(P).

O efeito dos pesos utilizados no Passo 2 é que todos os segmentos em CH(P), menos um deles, está na árvore geradora mínima MST(P). O segmento omitido é árbitrário. Os Passos 1 e 2 necessitam de tempo $O(n \log n)$, enquanto que o Passo 3 necessita de tempo $O(n^3)$. Um exemplo de uma célula produzida no final do Passo 2 do algoritmo é apresentado na Figura 3.

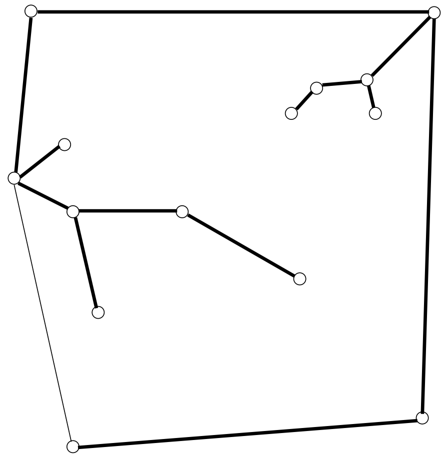

Figura 3: Um célula criada no final do Passo 2 do algoritmo MST-T.

Seja $I(P) = \mathrm{MST}(P) \setminus \mathrm{CH}(P)$ os segmentos interiores da árvore geradora mínima e seja $j(P) = \max\{w(p_i, p_j) \colon (p_i, p_j) \in I(P)\}$. Lingas [33] demonstrou o seguinte limitante superior para o peso de uma triangularização produzida pelo MST-T, comparada com a triangularização de peso mínimo.

Proposição 2.2 *Para um conjunto P de n pontos,*

$$R(\text{MST-T}(P)) = O\left(\frac{n \times j(P)}{W(\text{MWT}(P))} + \log n\right).$$

$\square$

As próximas proposições seguem imediatamente do algoritmo MST-T.

Proposição 2.3 *Se P contém somente vértices de um polígono convexo, então* MST-T(P) *é ótima.*

$\square$

Proposição 2.4 *Para qualquer conjunto de pontos P,* MST-T(P) *nunca é pior que a triangularização de Delaunay de P, isto é,*

$$W(\text{MST-T}(P)) \leq W(\text{DT}(P)).$$

$\square$

O algoritmo MST-T produz uma triangularização ótima se e somente se todos os segmentos na árvore geradora escolhidos no Passo 2 estão também em alguma triangularização de peso mínimo particular. Este não é sempre o caso, como mostra a Figura 4.

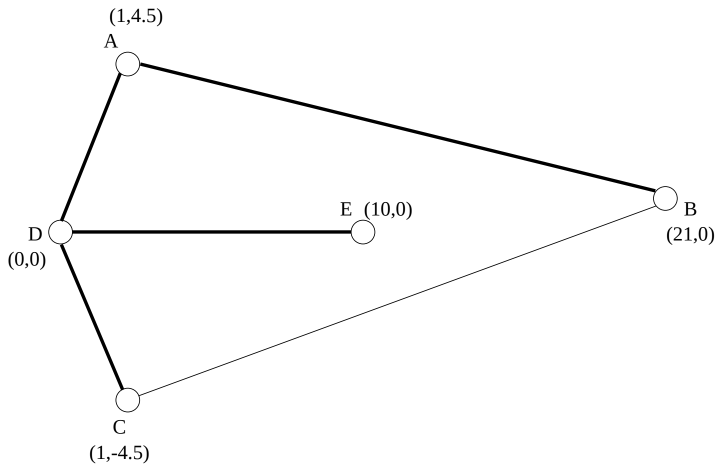

Figura 4: Um contra-exemplo para o algoritmo MST-T. Note que $|\text{AE}| = |\text{CE}| = 10.06, |\text{DE}| = 10, |\text{AC}| = 9$ e $|\text{BE}| = 11$. Mais detalhes em [15].

O algoritmo MST-T produz triangularizações ótimas para quaisquer contra-exemplos na literatura [21, 17, 35, 34], utilizados para mostrar que a triangularização gulosa ou a triangularização de Delaunay não são ótimas. Apesar de os autores em [15] não terem sido capazes de dizer qualquer coisa sobre o comportamento assintótico de $R(\text{MST-T}(P))$, eles conjecturaram que $R(\text{MST-T}(P)) = O(1)$, motivados pela observação que os efeitos de uma árvore geradora mínima "ruim" parecia ser local. Como mencionamos anteriormente, esta conjectura foi mostrada ser incorreta [23].

Uma outra forma de escolher a árvore geradora na primeira fase desta técnica foi utilizada na heurística de Heath e Pemmaraju [15]. O algoritmo, chamado algoritmo de triangularização gulosa com árvore geradora, também tem complexidade de tempo $O(n^3)$ e apresenta melhores resultados experimentais, para os experimentos selecionados em [15], que a heurística anterior de Lingas [33]. O algoritmo é descrito a seguir.

Triangularização com Árvore Geradora–Gulosa (GST-T)
Entrada: um conjunto de n pontos $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
Saída: uma triangularização GST-T(P).

01. Compute a triangularização gulosa GT(P).
02. Compute uma árvore geradora mínima GMST(P) de $(P, E(P))$, utilizando a seguinte atribuição de custos para os segmentos em $E(P)$:

$$c((p_i, p_j)) = \begin{cases} \infty & \text{se } (p_i, p_j) \notin \mathrm{GT}(P), \\ 0 & \text{se } (p_i, p_j) \in \mathrm{CH}(P), \\ w(p_i, p_j) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

03. Utilize o algoritmo OCT para triangularizar otimamente a célula única definida por CH(P) $\cup$ GMST(P), produzindo GST-T(P).

Como para o MST-T, a complexidade de tempo do terceiro passo domina a complexidade de tempo do algoritmo e, portanto, temos que o GST-T tem tempo $O(n^3)$. As propriedades a seguir são válidas e seguem imediatamente do algoritmo GST-T.

Proposição 2.5 *Se P contém somente vértices de um polígono convexo, então* GST-T(P) *é ótima.*

□

Proposição 2.6 *Para qualquer conjunto de pontos P,* GST-T(P) *nunca é pior que a triangularização gulosa de P, isto é,*

$$W(\text{GST-T}(P)) \leq W(\mathrm{GT}(P)).$$

□

Um resultado equivalente à Proposição 2.2 também foi provado. Defina $gj(P) = \max\{w(p_i, p_j)\colon (p_i, p_j) \in \mathrm{GMST}(P) \setminus \mathrm{CH}(P)\}$ o maior segmento em GMST(P) $\setminus$ CH(P). Heath e Pemmaraju em [15] propuseram o seguinte teorema.

Teorema 2.1 *Para qualquer conjunto P de n pontos,*

$$R(\text{GST-T}(P)) = O\left(\frac{n \times gj(P)}{W(\mathrm{MWT}(P))} + \log n\right).$$

□

O algoritmo GST-T produz uma triangularização ótima se e somente se todos os segmentos na árvore geradora mínima da triangularização gulosa, escolhidos no Passo 2, estão também em alguma triangularização de peso mínimo particular. Este não é sempre o caso, como mostra a Figura 5.

Como o MST-T, o algoritmo GST-T produz triangularizações ótimas para quaisquer contra-exemplos na literatura [21, 17, 35, 34], utilizados para mostrar que a triangularização gulosa ou a triangularização

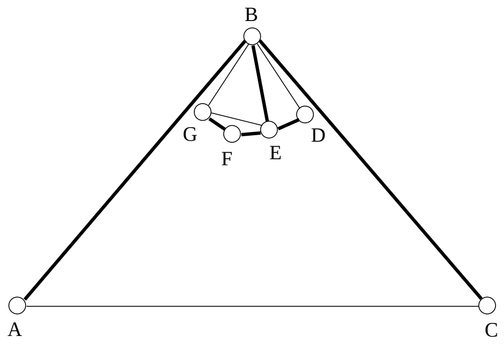

Figura 5: Um contra-exemplo para o algoritmo GST-T. Outros detalhes em [15].

de Delaunay não são ótimas. Apesar de os autores em [15] não terem sido capazes de dizer qualquer coisa sobre o comportamento assintótico de $R(\text{GST-T}(P))$, eles também conjecturaram que $R(\text{GST-T}(P)) = O(1)$, motivados por comparações entre o algoritmo GST-T e o algoritmo GT. Como mencionamos anteriormente, esta conjectura também foi mostrada ser incorreta [23].

3 Resultados Experimentais

No trabalho de Heath e Pemmaraju [15], os algoritmos GT, MST-T e GST-T foram testados com 1.200 conjuntos de 15, 20 e 25 pontos escolhidos aleatoriamente, sendo 400 conjuntos de cada respectivo tamanho. Além disso, uma algoritmo de busca exaustiva foi empregado para encontrar uma triangularização de peso mínimo de cada conjunto. Este algoritmo examina todas as possíveis triangularizações existentes para um dado conjunto de pontos e escolhe aquela de peso mínimo. Dessa forma, a busca exaustiva é capaz de encontrar uma triangularização ótima para conjuntos de até 25 pontos. Testes com conjuntos maiores são impraticáveis devido ao tempo necessário para a busca exaustiva.

A Tabela 1 lista, para cada tamanho, o número de vezes que cada algoritmo falha na produção de uma triangularização ótima para aquele tamanho.

	Número de falhas		
Tamanho	GT	MST-T	GST-T
15	44	5	1
20	61	11	0
25	69	12	1
Total	174	28	2

Tabela 1: Falhas na busca da triangularização ótima.

A Tabela 2 é uma comparação do peso médio das triangularizações produzidas por cada algoritmo, para cada tamanho. A tabela evidencia, para estes experimentos, que os algoritmos MST-T e GST-T produzem, no caso médio, triangularizações que estão dentro de uma pequena constante de aproximação da triangularização de peso mínimo. Infelizmente, como Levcopoulos e Krznaric mostraram em [23], existe uma classe de exemplos para a qual estas observações não estão corretas.

	Peso médio da triangularização			
Tamanho	Ótima	GT	MST-T	GST-T
15	298.697,76	309.873,34	299.236,84	298.697,76
20	349.238,62	373.288,61	350.176,36	349.238,62
25	437.233,88	479.283,36	439.846,97	437.233,88

Tabela 2: Peso médio das triangularizações produzida.

A Tabela 3 compara a triangularização de pior caso produzida por cada algoritmo. Para cada triangularização $T(P)$ e para cada tamanho, a Tabela 3 mostra o percentual de pior caso sobre a triangularização ótima:

$$\frac{W(T(P)) - W(\mathrm{MWT}(P))}{W(\mathrm{MWT}(P))} = R(T(P)) - 1.$$

	% de pior caso sobre ótima		
Tamanho	GT	MST-T	GST-T
15	4,4963	0,9701	0,0017
20	10,1832	1,0017	0,0000
25	17,3897	1,5323	0,0003

Tabela 3: Percentagem de pior caso sobre as triangularizações ótimas produzidas.

Como ambos os algoritmo MST-T e GST-T pareciam heurísticas muito boas, os algoritmos foram testados um contra o outro para conjuntos de pontos maiores. Para cada conjunto de tamanho 30, 35, 40, 45 e 50, um total de 200 pontos selecionados aleatoriamente foram triangularizados pelos algoritmos MST-T e GST-T. Os resultados são mostrados na Tabela 4.

	GST-T versus MST-T		
Tamanho	GST-T $>$ MST-T	GST-T $=$ MST-T	GST-T $<$ MST-T
30	0	157	43
35	0	169	31
40	0	169	31
45	1	151	48
50	0	153	47

Tabela 4: Comparação direta entre GST-T e MST-T.

4 Resultados em Teoria das Complexidades

Usando a notação de Garey e Johnson [12], o problema da triangularização de peso mínimo pode ser formulado da seguinte forma.

Triangularização de Peso Mínimo (MWT)
Instância: Um conjunto P de pontos no plano e um número racional positivo k.
Questão: Existe uma triangularização de P cujo peso não é maior que k?

A complexidade computacional deste problema de decisão permanece em aberto. Lloyd em [34] demonstrou que o seguinte problema relacionado a MWT é NP-completo.

Existência da Triangularização (Triang)

Instância: Um conjunto P de pontos no plano e um conjunto de segmentos $E' \subseteq E(P)$.

Questão: E' contém uma triangularização de P?

Este problema foi mostrado ser NP-completo através de uma redução de SAT.

O problema da triangularização de peso mínimo pode ser visto de várias formas. Uma forma particular é considerar P como o conjunto de vértices de um rafo G e $E(P)$ como o conjunto de arestas de G. Então, G é o grafo completo com $|P|$ vértices. Os tamanhos dos segmentos em $E(P)$ são os pesos associados às arestas de G.

Nesta seção, apresentamos os resultados de Heath e Pemmaraju em [15], que provaram que outros dois problemas relacionados a MWT são NP-completos. O primeiro problema é obtido inicialmente através da construção de um novo grafo a partir do grafo G.

Seja

$$C = \{(e_i, e_j) \in E(P) \times E(P) \colon e_i \text{ e } e_j \text{ se interceptam}\}$$

o conjunto de cruzamentos de G. Então $G^c = (E(P), C)$ é o **grafo de cruzamentos** de G. A Figura 6 ilustra um grafo G e seu grafo de cruzamentos G^c.

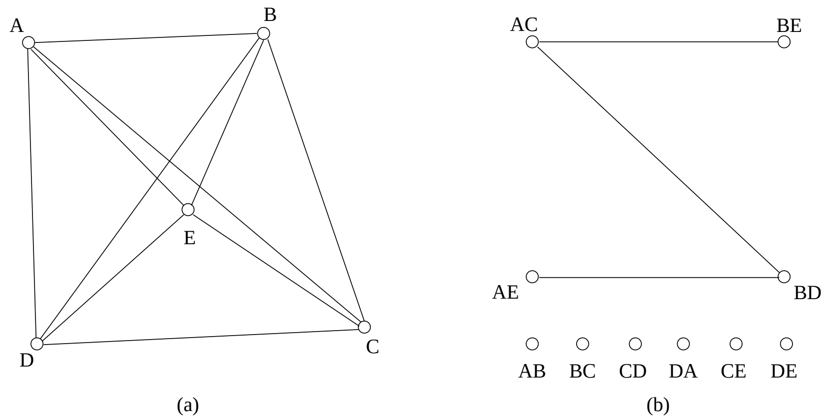

Figura 6: (a) Um grafo e (b) seu grafo de cruzamentos.

O problema da triangularização de peso mínimo pode ser apresentado em termos do grafo de cruzamentos G^c como segue:

Triangularização de Peso Mínimo, Versão de Otimização

Dado um grafo de cruzamento s G^c, onde a cada vértice (segmento) é atribuído um peso igual à sua distância euclidiana, encontre um conjunto independente maximal de peso total mínimo.

Atribuindo pesos racionais arbitrários aos vértices e reescrevendo o problema como um problema de decisão, temos o seguinte:

Conjunto Independente Maximal Restrito ao Peso Mínimo (RMMI)

Instância: Um grafo de cruzamentos $G^c = (E, C)$, um peso racional positivo $w(e)$ para cada $e \in E$ e um número racional positivo k.

Questão: Existe um conjunto independente maximal $I \subseteq E$ tal que $\sum_{e \in I} w(e) \leq k$?

Este problema, bastante semelhante ao problema MWT, é facilmente demonstrado ser NP-completo. A prova do teorema a seguir, dada por Heath e Pemmaraju em [15], é essencialmente idêntica a um resultado de Anagnostou [3, 4] e é obtida pela redução de Triang.

Teorema 4.1 *RMMI é NP-completo.*

□

O segundo e mais importante resultado demonstrado por Heath e Pemmaraju em [15] é um problema geométrico de decisão. Motivados pelo resultado para Triang de Lloyd [34], os autores propuseram a seguinte generalização de MWT.

Triangularização de Peso Mínimo Generalizada (GMWT)

Instância: Um conjunto P de pontos no plano, um conjunto de segmentos $E' \subseteq E(P)$ tal que E' contém uma triangularização de P e um número racional positivo k.

Questão: Existe uma triangularização em E' cujo peso não é maior que k?

Teorema 4.2 *GMWT é NP-difícil.*

□

A demonstração deste teorema é feita via redução de Triang.

5 Considerações Finais

O trabalho de Heath Pemmaraju [15] apresentou tentativas de progresso em duas direções na determinação da complexidade do problema da triangularização de peso mínimo. Na primeira direção, dois algoritmos foram apresentados, sendo que um deles é devido a Lingas [33], que apresentou desempenho bem melhor que algoritmos anteriores, sobre alguns experimentos. Enquanto MST-T nunca é pior que DT, o algoritmo GST-T nunca é pior que GT. Para os experimentos realizados, o GST-T raramente produziu triangularizações não ótimas comparado com os algoritmos GT e MST-T. Mesmo quando uma triangularização não ótima foi produzida pelo GST-T, tal triangularização se apresentou bastante próxima da triangularização de peso mínimo. Ambos os algoritmos MST-T e GST-T produzem triangularizações de peso mínimo quando P é convexo. Estes resultados levaram os autores a estabelecer a seguinte conjectura.

Conjectura 5.1 *Os algoritmos MST-T e GST-T produzem triangularizações que têm razões de aproximação $O(1)$ da triangularização de peso mínimo, no pior caso.*

Esta conjectura foi derrubada por Levcopoulos e Krznaric [23], como mencionado na Seção 1.3. Outros algoritmos vêm sendo propostos [37, 40, 22, 25, 26] com melhores razões de aproximação e tempos de execução.

Na segunda direção, os autores apresentaram dois resultados em NP. Estes resultados mostram que duas generalizações do problema da triangularização de peso mínimo são NP-difíceis. O primeiro resultado neste sentido foi formulado como um problema da Teoria dos Grafos. O segundo resultado foi estabelecido para um problema geométrico de decisão que é uma generalização do problema da triangularização de peso mínimo. Motivado por estes resultados, os autores apresentaram a seguinte conjectura.

Conjectura 5.2 *O problema MWT é NP-difícil.*

Este problema ainda está em aberto.

Referências

[1] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, and R. Hainz. New results on MWT subgraphs. *Inform. Process. Lett.*, 69(5):215–219, 1999.

[2] O. Aichholzer, F. Aurenhammer, G. Rote, and Y.-F. Xu. Constant-level greedy triangulations approximate the MWT well. *J. Comb. Optim.*, 2(4):361–369, 1999.

[3] E. Anagnostou. Progress in minimum weight triangulation. Technical Report 232/90, Department of Computer Science, University of Toronto, 1990.

[4] E. Anagnostou and D. Corneil. Polynomial-time instances of the minimum weight triangulation problem. *Comput. Geom.*, 3(5):247–259, 1993.

[5] B. Aronov and S. Fortune. Approximating minimum-weight triangulations in three dimensions. *Discrete Comput. Geom.*, 21(4):527–549, 1999.

[6] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest. *Introduction to Algorithms.* MIT Electrical Engineering and Computer Science Series. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990.

[7] M. T. Dickerson, R. L. S. Drysdale, S. A. McElfresh, and E. Welzl. Fast greedy triangulation algorithms. *Comput. Geom.*, 8(2):67–86, 1997.

[8] M. T. Dickerson, J. M. Keil, and M. H. Montague. A large subgraph of the minimum weight triangulation. *Discrete Comput. Geom.*, 18(3):289–304, 1997. ACM Symposium on Computational Geometry (Philadelphia, PA, 1996).

[9] M. B. Dillencourt. Traveling salesman cycles are not always subgraphs of Delaunay triangulations or of minimum weight triangulations. *Inform. Process. Lett.*, 24(5):339–342, 1987.

[10] D. Eppstein. Approximating the minimum weight triangulation. In *Proceedings of the Third Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Orlando, FL, 1992)*, pages 48–57, New York, 1992. ACM.

[11] D. Eppstein. Approximating the minimum weight Steiner triangulation. *Discrete Comput. Geom.*, 11(2):163–191, 1994.

[12] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, New York, 1979.

[13] P. D. Gilbert. New results on planar triangulations. Master's thesis, University of Illinois, 1979.

[14] L. S. Heath and S. V. Pemmaraju. New results for the minimum weight triangulation problem. Technical Report 92-30, Department of Computer Science, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1992.

[15] L. S. Heath and S. V. Pemmaraju. New results for the minimum weight triangulation problem. *Algorithmica*, 12(6):533–552, 1994.

[16] J. M. Keil. Computing a subgraph of the minimum weight triangulation. *Comput. Geom.*, 4(1):13–26, 1994.

[17] D. G. Kirkpatrick. A note on Delaunay and optimal triangulations. *Inform. Process. Lett.*, 10:127–128, 1980.

[18] Y. Kyoda, K. Imai, F. Takeuchi, and A. Tajima. A branch-and-cut approach for minimum weight triangulation. In *Algorithms and computation (Singapore, 1997)*, pages 384–393. Springer, Berlin, 1997.

[19] W. Lenhart and G. Liotta. Drawing outerplanar minimum weight triangulations. *Inform. Process. Lett.*, 57(5):253–260, 1996.

[20] W. Lenhart and G. Liotta. How to draw outerplanar minimum weight triangulations (extended abstract). In *Graph drawing (Passau, 1995)*, pages 373–384. Springer, Berlin, 1996.

[21] C. Levcopoulos. An $O(\sqrt{n})$ lower bound for the non-optimality of the greedy triangulation. *Inform. Process. Lett.*, 25:247–251, 1987.

[22] C. Levcopoulos and D. Krznaric. Quasi-greedy triangulations approximating the minimum weight triangulation. In *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Atlanta, GA, 1996)*, pages 392–401, New York, 1996. ACM.

[23] C. Levcopoulos and D. Krznaric. Tight lower bounds for minimum weight triangulation heuristics. *Inform. Process. Lett.*, 57(3):129–135, 1996.

[24] C. Levcopoulos and D. Krznaric. A near-optimal heuristic for minimum weight triangulation of convex polygons (extended abstract). In *Proceedings of the Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (New Orleans, LA, 1997)*, pages 518–527, New York, 1997. ACM.

[25] C. Levcopoulos and D. Krznaric. A linear-time approximation scheme for minimum weight triangulation of convex polygons. *Algorithmica*, 21(3):285–311, 1998.

[26] C. Levcopoulos and D. Krznaric. Quasi-greedy triangulations approximating the minimum weight triangulation. *J. Algorithms*, 27(2):303–338, 1998. 7th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Atlanta, GA, 1996).

[27] C. Levcopoulos and A. Lingas. On approximation behavior of the greedy triangulation for convex polygons. *Algorithmica*, 2:175–193, 1987.

[28] C. Levcopoulos and A. Lingas. Fast algorithms for the greedy triangulation. In *Proceedings of the Second Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, volume 447 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 238–250, Berlin, 1990. Springer-Verlag.

[29] C. Levcopoulos and A. Lingas. Greedy triangulation approximates the optimum and can be implemented in linear time in the average case. In *Advances in computing and information—ICCI '91 (Ottawa, ON, 1991)*, pages 139–148. Springer, Berlin, 1991.

[30] C. Levcopoulos and A. Lingas. Fast algorithms for greedy triangulation. *BIT*, 32(2):280–296, 1992.

[31] C. Levcopoulos, A. Lingas, and J.-R. Sack. Heuristics for optimum binary search trees and minimum weight triangulation problems. *Theoret. Comput. Sci.*, 66(2):181–203, 1989.

[32] A. Lingas. The greedy and Delaunay triangulations are not bad in the average case and minimum weight geometric triangulation of multiconnected polygons is NP-complete. In *Foundations of Computation Theory (Borgholm, 1983)*, pages 270–284. Springer, Berlin, 1983.

[33] A. Lingas. A new heuristic for minimum weight triangulation. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 8(4):646–658, 1987.

[34] E. L. Lloyd. On triangulations of a set of points in the plane. In *Proceedings of the Eighteenth IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 228–240, 1977.

[35] G. K. Manacher and A. L. Zobrist. Neither the greedy nor the Delaunay triangulation of a planar point set approximates the optimal triangulation. *Inform. Process. Lett.*, 9:31–34, 1979.

[36] H. Meijer and D. Rappaport. Computing the minimum weight triangulation of a set of linearly ordered points. *Inform. Process. Lett.*, 42(1):35–38, 1992.

[37] D. A. Plaisted and J. Hong. A heuristic triangulation algorithm. *J. Algorithms*, 8:405–437, 1987.

[38] K. H. Qin, M. L. Gong, B. Wu, and Z. S. Tang. An improved algorithm for triangulation with minimum weights. *J. Tsinghua Univ.*, 37(4):53–58, 1997.

[39] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest point problems. In *Proceedings of the Sixteenth IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 151–162, 1975.

[40] W. D. Smith. *Studies in Computational Geometry Motivated by Mesh Generation*. PhD thesis, Princeton University, 1989.

[41] C. A. Wang, F. Chin, and Y.-F. Xu. A new subgraph of minimum weight triangulations. In *Algorithms and computation (Osaka, 1996)*, pages 266–274. Springer, Berlin, 1996.

[42] C. A. Wang, F. Chin, and Y.-F. Xu. A new subgraph of minimum weight triangulations. *J. Comb. Optim.*, 1(2):115–127, 1997.

[43] C. A. Wang and Y.-F. Xu. Computing a minimum weight triangulation of a sparse point set. *J. Global Optim.*, 15(1):73–83, 1999.

[44] Y.-F. Xu. Minimum weight triangulations. In *Handbook of combinatorial optimization, Vol. 2*, pages 617–634. Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 1998.

[45] Y.-F. Xu and D. Zhou. Improved heuristics for the minimum weight triangulation problem. *Acta Math. Appl. Sinica (English Ser.)*, 11(4):359–368, 1995.

[46] B.-T. Yang. A better subgraph of the minimum weight triangulation. *Inform. Process. Lett.*, 56(5):255–258, 1995.

[47] B.-T. Yang. A better subgraph of the minimum weight triangulation. In *Computing and combinatorics (Xi'an, 1995)*, pages 452–455. Springer, Berlin, 1995.

[48] B.-T. Yang, Y.-F. Xu, and Z. Y. You. A chain decomposition algorithm for the proof of a property on minimum weight triangulations. In *Algorithms and computation (Beijing, 1994)*, pages 423–427. Springer, Berlin, 1994.

[49] P. Yoeli. Compilation of data for computer-assisted relief cartography. In *Display and Analysis of Spatial Data*. J. C. Davis and M. J. McCullagh, editors, Wiley, New York, 1975.