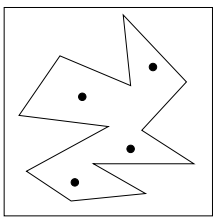
MAC 5747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

TEOREMA DA GALERIA DE ARTE

1. Introdução



O tópicos que iremos estudar pertence a área de geometria combinatória (*combinatorial gemeotry*), uma subárea de matemática e geometria computacional (ciência da computação). Em 1973, Victor Klee propôs o problema de determinar-se o menor número de guardas suficientes para 'guardar' o interior de uma sala de uma galeria de arte com n paredes.

Informalmente, cada guarda é considerado como um ponto fixo que enxerga (ou vê) tudo a sua volta. Um conjunto de guardas cobre uma sala se cada ponto da sala pode ser visto por algum guarda. A figura ao lado representa a planta de uma sala de uma galeria de arte com 12 paredes, 4 guardas são suficientes para cobrir a sala (podemos cobrir a sala com menos guardas?).

Estudaremos a seguir o chamado Teorema da Galeria de Arte (*Chvátal's Art Gallery Theorem* ou *Watchman Theorem*) que diz que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir uma sala com n paredes. Este teorema simples tem sido estendido por matemáticos em várias direções (cf. [7]) e tem sido desenvolvido por cientistas da computação no estudo de algoritmos de partição de polígonos (que veremos mais adiante durante esta disciplina).

O fragmento de texto a seguir foi extraído de *How many guards in the Gallery* de Ian Steawart [10].

> **State-of-the-art Gallery houses the Sandy Warthog collection.** ...
>
> "Naturally the Warthog Collection will be fitted with all the latest electronic surveillance gear," said Harry Sams, chief of security. "An individual micro-camera will face every painting—"
>
> "No, I want something special for the Warthog Collection," interrupted Parrot.
>
> "Uh—*how* special?"
>
> "*Real* special, Harry. I want guards. Human guards."
>
> "Boss, let's not get too ambitius, huh? Do you realize the cost in positive security vetting alone? Not to mention medical insurance, severance pay, cofee-break tokens. Real people cost real money, Boss. No, what I suggest is the latest sniffer robots from Notsobitchi and maybe a coupla–"
>
> "I want guards, Harry."

Date: 29 de agosto de 2002.

"Boss. Guards. Uh—how many?"

"Enough to make sure that every square inch of the building can be seen by at least one guard. I want each guard stationed on a swivel chair, so that in effect each one has all-around vision. Hire as many as the job needs—but not a single guard extra, you understand? Human guards cost real money, you know."

...

Observação. Os tópicos que cobriremos a seguir foram extraídos do livro de O'Rourke [7], Capítulo 1 de O'Rourke[8] e das notas de aula de Mount [6]. Veja também Steawart [10].

2. Definições e convensões

Uma *curva poligonal* é uma seqüência finita $(v_0, e_0, v_1, \ldots, e_{n-2}, v_{n-1})$ onde $v_0, \ldots, v_{n-1}$ são pontos em $\mathbb{R}^2$ e e_i é um segmento de reta com extremidades v_i e v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$. Os pontos $v_0, \ldots, v_{n-1}$ também são chamados de *vértices* e os segmentos $e_0, \ldots, e_{n-2}$ de *arestas*. (Notação: os índices serão considerados ciclicamente, assim, por exemplo, $v_n = v_0$, $e_{n-1} = e_0$, ...) Um curva poligonal é *fechada* se o último ponto da seqüência e igual ao primeiro, ou seja, $v_0 = v_n$. Um curva polígonal é *simples* se ela não se autointersecta. Mais precisamente, isto significa que o segmento e_i so intersecta (possivelmente) o segmento e_{i+1} no ponto v_{i+1} $(i = 0, \ldots, n-2)$. Veja Figura 1.

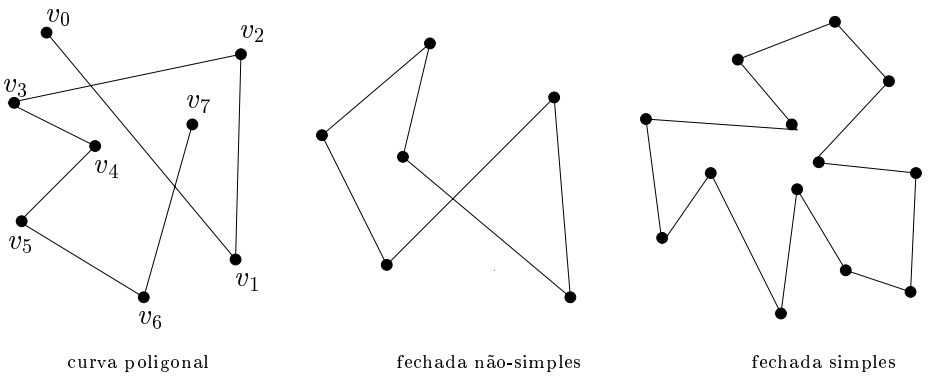


Figura 1. Curvas poligonais.

O famoso Teorema de Jordan diz que toda curva plana fechada simples divide o plano em duas regiões (o *interior* e o *exterior* da curva). Nós definimos um *polígono* como sendo a região fechada do plano (no sentido topológico) limitada por uma curva poligonal fechada simples. O termo *polígono simples* também é freqüentemente usado com este mesmo sentido. Convensionaremos que os vértices de um polígono serão sempre listados na ordem em que eles aparecem ao percorrermos a fronteira do polígono no sentido anti-horário, veja a Figura 2. A fronteira de um polígono P será denotada por ∂P. Da nossa definição temos que $\partial P \subset P$.

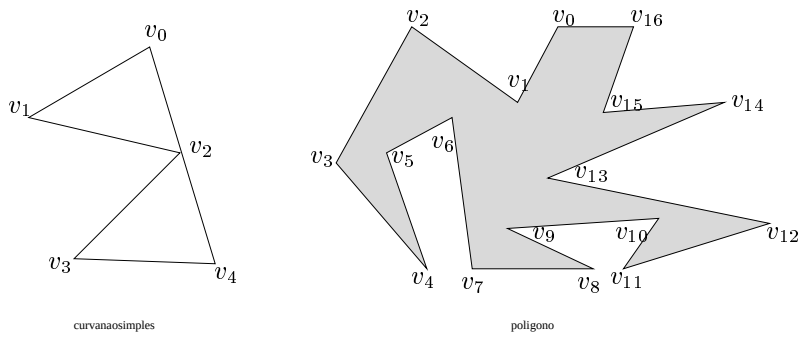


FIGURA 2. Uma curva poligonal fechada que não forma um polígono e uma que forma um polígono.

3. Problema da Galeria de Arte

Nós diremos que dois pontos p e q de um polígono P *vêem* ou *enxergam* um ao outro se o segmento que liga p e q, denotado por pq, está inteiramente contido no polígono P.

A planta de uma sala, com n paredes, de uma galeria de arte pode ser vista como sendo um polígono formado por n vértices (ou arestas). Considere o problema de determinar-se onde devemos dispor guardas na galeria de tal modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um guarda. Pensaremos em um guarda como sendo um ponto e diremos que um conjunto de guardas *guardam* ou *cobrem* um polígono se cada ponto do polígono pode ser visto por pelo menos um guarda. Victor Klee propôs o seguinte problema.

Problema 1. *Dado n determinar, como uma função de n, o número mínimo de guardas suficientes para cobrirmos um polígono com n vertices.*

Observemos que a única informação que temos sobre o polígono é o seu número de lados (ou arestas), não sabemos nada sobre a estrutura do polígono. O problema pergunta pelo menor número de guardas suficientes para cobrir qualquer polígono com n lados. Na Figura 3 vemos um polígono onde 3 guardas são suficiente e um onde 4 guardas são suficientes.

Se denotarmos por $g(P)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono P e por $G(n)$ o menor número de guardas necessários para cobrirmos um polígono com n vértices, então temos que

$$G(n) = \max\{g(P) \mid P \text{ é um polígono com } n \text{ vértices}\}.$$

Não é difícil vermos que $G(n)$ é menor do que n. Podemos colocar um guarda em cada vértice do polígono. Apesar deste fato ser trivial é interessante notar a generalização para o espaço tridimensional é falsa (!).

EXERCÍCIO. Encontre um poliedro em $\mathbb{R}^3$ tal que mesmo colocando um guarda em cada vértice teremos pontos no interior do poliedro que não são visto por nenhum dos guardas. (Este poliedro é certamente não-convexo.)

Salas que têm o formato de um polígono convexo, com qualquer número de vértices, podem ser cobertas por apenas um guarda, colocado em quaquer

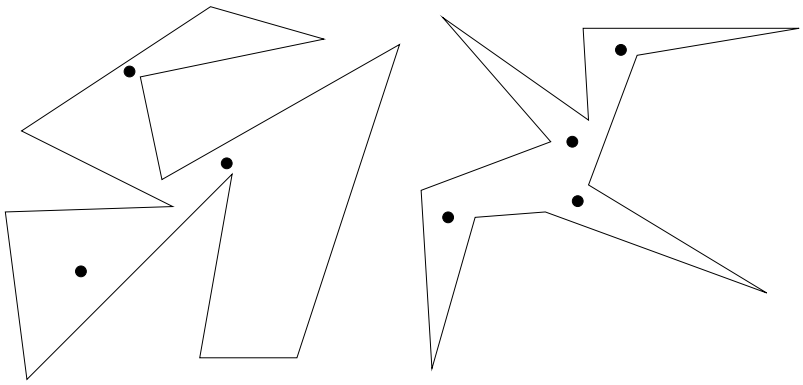


FIGURA 3. Um polígono coberto por 3 guardas e um outro coberto por 4 guardas. É possível usarmos menos guardas?

ponto da sala. Todo polígono com três vértices é convexo, logo $G(3) = 1$. Existem polígono com quatro vértices que não são convexos. Diremos que um vértice de um polígono é *reflexo* ou *concavo* se o seu ângulo interior é maior do que π. Já, se o ângulo interior do vértice de um polígono for no máximo π diremos que o vértices é *convexo* (veja Figura 4).

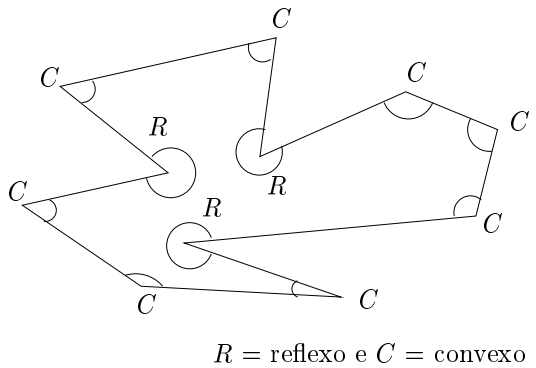


FIGURA 4. Um polígono e seus vértices reflexos e convexos.

Um polígono com quatro vértices (um quadrilátero) pode ter no máximo 1 ângulo reflexo, mas mesmo assim é possível cobrirmos o polígono com apenas um guarda, assim $G(4) = 1$. Um polígono com cinco vértices pode ter 0, 1 ou 2 vértices reflexos. Fazendo alguns experimentos podemos ver que polígonos com 5 vértices podem ser cobertos por apenas 1 guarda, ou seja $G(5) = 1$. Existem polígonos com 6 vértices que necessitam de 2 guardas para serem cobertos. A situação está ilustrada na Figura 5.

Um questão interessante em geometria combinatória é saber como o número de guardas necessários para cobrir um polígono cresce como uma função de n. O polígono 'pente' da Figura 6 mostra que $G(n) \geq \lfloor n/3 \rfloor$. Veremos na próxima seção que este número é sempre suficiente, ou seja, um polígono com n vértices pode ser sempre guardado por no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas.

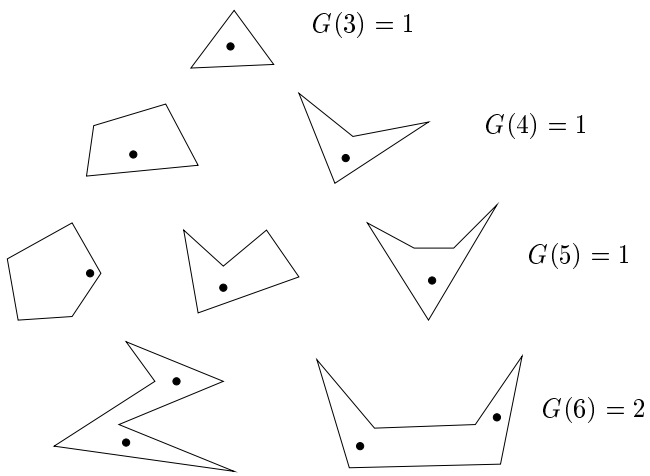


FIGURA 5. Polígonos como no máximo 5 vértices podem ser cobertos com apenas 1 guarda, mas alguns polígonos com 6 vértices necessitam 2 guardas.

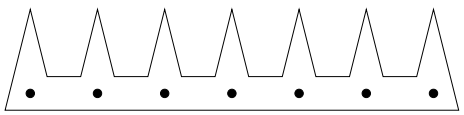


FIGURA 6. Exemplo de polígonos onde $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são necessários.

4. Teorema da galeria de arte

Estudaremos agora um resultado muito bacana em geometria combinatória, o chamado *Chvátal's Art Gallery Theorem.*

Teorema 2 (Teorema da Galeria de Arte)**.** *Dado um polígono com n vértices existe uma maneira de dispormos no máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas neste polígono de modo que cada ponto do polígono seja coberto por pelo menos um guarda.*

A primeira demonstração deste teorema é, naturalmente, devida a Chvátal [2]. Fisk [3], três anos mais tarde, apresentou uma prova muito simples deste teorema. É esta a prova que veremos a seguir.

A demonstração de Fisk é baseada em dois conceitos: triangulação de polígonos e coloração de vértices de um grafo.

4.1. Diagonais e triangulação.

Dois vértices u e v de um polígono P se vêem ou exergam *claramente* se o segmento uv com extremos u e v está inteiramente contido em P e se, além disso, a intersecção de uv com a fronteira ∂P de P é igual a $\{u, v\}$. Ou seja u e v se vêem claramente se

(i) $ab \subset P$; e
(ii) $ab \cap \partial P = \{a, b\}$.

Uma *diagonal* de um polígono P é um segmento de reta entre dois vértices de P que se vêem claramente. Duas diagonais distintas uv e wx de P se cruzam se $uv \cap wx \not\subset \{u, v, w, x\}$. Se colocarmos em um polígono P o maior número possível de diagonais que duas-a-duas não se cruzam obteremos uma

triangulação do polígono P. Uma triangulação de P pode ser vista como a união das arestas de P e um conjunto maximal de diagonais de P que duas-a-duas não se intersectam, a não ser, eventualmente, nos seus extremos. Uma outra maneira de pensarmos em uma triangulação de um polígono P (e as vezes será mais conveniente pensarmos desta maneira) é como um conjunto de triângulos que cobrem o polígono P e que se intersectam apenas em vértices e diagonais de P. A Figura 7 mostra a triangulação de um polígono.

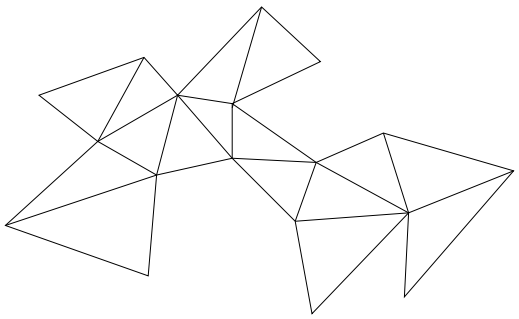


FIGURA 7. Triangulação de um polígono.

Teorema 3 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado em triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

Demonstraremos o Teorema 3 na próxima seção. A demonstração é baseada no fato de que todo polígono com pelo menos 4 vértices possui uma diagonal. Este fato pode parecer trivial, entretanto, teremos um pouco de trabalho em verificá-lo.

4.2. **Coloração de vértices de um grafo.** Um grafo $G = (V, E)$ é *k-colorível* se for possível atribuirmos cores $c_1, \ldots, c_k$ aos (ou colorirmos os) vértices de G de tal forma que se u e v são vértices adjacentes em G então a cor atribuída a u é diferente da cor atribuída a v.

Associaremos um grafo (planar) $G_T = (V, E)$ à triangulação T de um polígono P da seguinte maneira. O conjunto do vértices V de G_P será o conjunto dos vértices de P e existirá uma aresta em E ligando vértices u e v de G_P se o segmento uv faz parte da triangulação T, veja a Figura 8.

É um fato conhecido que todo grafo planar pode ser 4-colorido (o famoso *Teorema das 4 Cores*). Com grafos associados à triangulações, que são planares, podemos fazer melhor que isto.

Teorema 4. *Seja G_T um grafo associado a uma triangulação de um polígono. Então G_T é 3-colorível.*

O teorema anterior também será demonstradoo na próxima seção.

4.3. **Demonstração do Teorema da Galeria de Arte.** Seja P um polígono com n vértices. Mostraremos que P pode ser coberto por $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas. Pelo Teorema 3 sabemos que todo polígono é triangularizável, em particular seja T uma triangulação de P. Do Teorema 4 sabemos que o grafo G_T

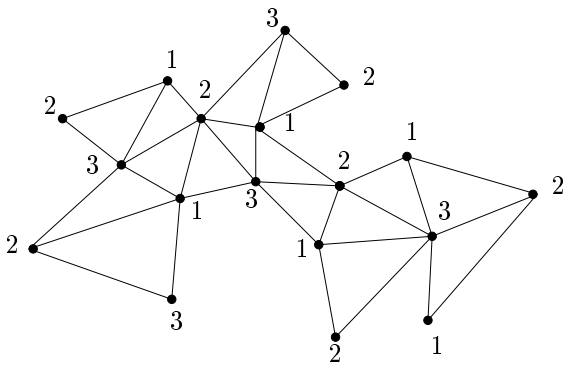


FIGURA 8. Grafo associado a triangulação da Figura 7 e uma 3-coloração deste grafo. As cores são 1, 2 e 3.

associado a T é 3-colorível. Considere uma tal 3-coloração e suponha que as cores usadas foram, digamos, azul, verde e amarela. Observemos que cada triângulo de T tem pelo tem um vértices de cada uma dessas cores. Como a coleção de triângulos de T cobrem P e cada triângulo tem um vértice de cor amarela (ou qualquer outra cor) então guardas colocados nos vértices amarelos cobrem P. Analogamente, guardas colocados em vértices de cor azul cobrem P e guardas colocado em vértices de cor verde cobrem P. Pelo menos uma dessas 3 cores é usada em não mais do que $n/3$ vértices. Como o número de vértices com uma determinada cor é um número inteiro podemos trocar $n/3$ por $\lfloor n/3 \rfloor$. Logo, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são suficiente e eventualmente necessários para cobrirmos um polígono com n vértices. ∎

5. Teoria de triangulações

Neste seção provaremos alguns resultados relacionados com triangulação de polígonos. Também mostraremos o Teorema 3 e 4, que deixamos de provar na seção anterior. Para estudarmos os aspectos algorítmicos de triangulação e partição de polígono ainda teremos que esperar um pouco.

Lema 5. *Todo polígono tem um vértice estritamente convexo.*

Demonstração. Seja P um polígono. Oriente as arestas de P no sentido antí-horário. Um transeunte andando sobre ∂P, e seguindo a orientação, teria o interior do polígono à sua esquerda. Assim, em um vértice estritamente convexo o nosso transeunte virará à esquerda e em um vértice estritamente reflexo ele virará à direita.

Seja v o vértice de P com

(i) y-coordenada mínima; e
(ii) x-coordenada máxima, respeitando (i).

Seja l a reta horizontal passando sobre v. A aresta seguindo v deve estar acima de l (veja Figura 9). Logo, nosso traseunte deve vira à esquerda em v. Portanto, v é um vértice estritamente convexo. ∎

Lema 6 (Meister [5])**.** *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui um diagonal.*

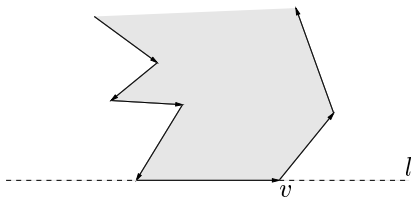


FIGURA 9. Ilustração da prova do Lema 5.

Demonstração. Seja P um polígono com $n \geq 4$ vértices e seja v um vértice estritamente convexo de P. Sejam u e w vértices adjacentes a v. Se uw é uma diagonal do polígono então não há o que demonstrar. Logo, suponhamos que uw não é uma diagonal de P, ou seja

- ou $uw \not\subset P$;
- ou $uw \subset P$ e $vw \cap \partial P \not\subset \{v, w\}$.

Como $n \geq 4$ então o triângulo de vértices v, u, w, denotado por $\triangle(v, u, w)$, contém pelo menos um vértice de P distinto de v, u e w. Seja t um vértice de P em $\triangle(v, u, w)$ mais-próximo de v; onde a distância é medida ortogonalmente à reta passando pelo segmento uw. Logo, t é o primeiro vértice de P atingido quando movemos a reta l paralela a vw de v na direção de uw (veja Figura 10).

Afirmamos que vt é uma diagonal de P. De fato, seja L a reta passando por t e paralela ao segmento uw. Notemos que a intersecção do semiplano determinado por L contendo o vértice v com o triângulo $\triangle(u, v, w)$ é um triângulo que não tem *nenhum* ponto de ∂P no seu interior. Logo, o vértice v vê t claramente. Portanto, vt é uma diagonal de P. ∎

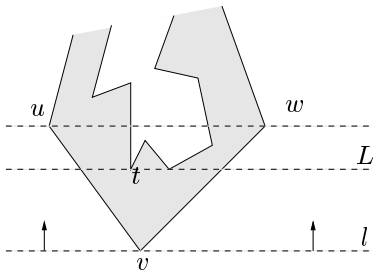


FIGURA 10. Ilustração da prova do Lema 6.

Estamos prontos para provar o Teorema 3. Abaixo repetimos o seu enunciado.

Teorema 7 (Triangulação)**.** *Todo polígono pode ser particionado triângulos através da inclusão de diagonais (zero ou mais).*

Demonstração. Seja P um polígono. A prova é por indução no número n de vértices do polígono P. Se $n = 3$ o polígono é um triângulo e o teorema vale, já que não precisamos adicionar nenhuma diagonal.

Suponha que $n \geq 4$. Pelo Lema 6 sabemos que P possui uma diagonal d. O segmento d particiona P em dois polígonos com menos do que n vértices;

cada um tendo d como aresta. Aplicando a hipótese de indução temos que cada um desses (sub)polígono pode ser triangularizado. Logo, combinando as triangulações de cada um dos polígonos e d obtemos uma triangulação de P. (A situação está ilustrada na Figura 11.) ∎

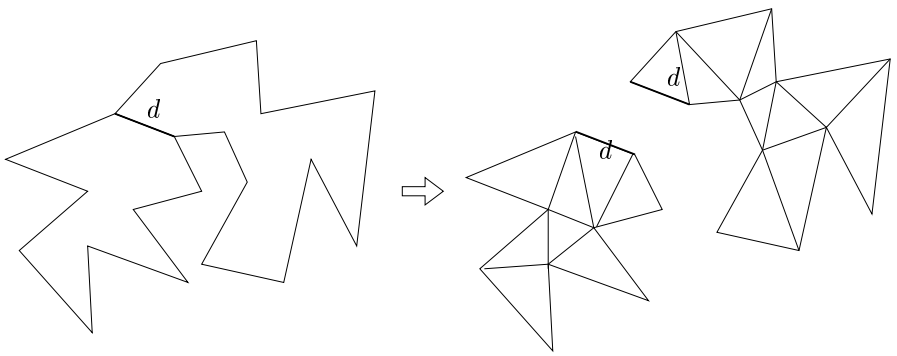


FIGURA 11. Ilustração da prova do Teorema 6.

Lema 8 (Número de diagonais). *Toda triangulação de um polígono de n vértices consiste de $n-3$ diagonais e $n-2$ triângulos.*

Demonstração. Seja P um polígono. Provaremos o lema por indução no número n de vértices de P. Ambas as afirmações são verdadeiras para $n = 3$, ou seja, para um triângulo.

Suponhamos que $n \geq 4$. Particionemos P em dois polígono P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d. Suponhamos que P_1 tenha n_1 vértices e P_2 tenha n_2 vértices. Assim, temos que $n_1 + n_2 = n + 2$.

Aplicando a hipótese de indução ao polígono P_1 e ao polígono P_2, temos que toda triangulação de P_1 possui $n_1 - 3$ diagonais e toda triangulação de P_2 possui $n_2 - 3$ diagonais. Toda triangulação de P que possui d induz triangulações de P_1 e P_2. Assim, toda triangulação de P que possui d tem

$$(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n_1 + n_2 - 5 = n + 2 - 5 = n - 3$$

diagonais. Como a escolha de d foi arbitrária concluímos que toda triangulação de P possui $n-3$ diagonais. O número de triângulos é claramente um a mais que o número de diagonais. ∎

Lema 9 (Soma dos ângulos). *A soma dos ângulos internos de um polígono de n vértices é $(n-2)\pi$.*

Demonstração. Pelo Lema 8 existem $n-2$ triângulos em uma triangulação de um polígono com n vértices e cada triângulo contribui com π para a soma dos ângulos internos. ∎

Diremos que 3 vértices consecutivos u, v, w de um polígono formam uma *orelha* se vw é uma diagonal. Duas orelhas não se sobrepõem se os seus interiores são disjuntos.

Teorema 10 (Meister's Two Ears Theorem). *Todo polígono com pelo menos 4 vértices possui pelo menos duas orelhas.*

O teorema acima segue imediatamente do seguinte teorema.

Teorema 11. *Seja P um polígono com pelo menos 4 vértices e T uma triangulação de P. Então pelo menos dois triângulos de T formam orelhas de P.*

Demonstração. A demonstração é por indução no número de vértices n de P. Se $n = 4$ então P é um quadrilátero e os dois triângulos de T são orelhas de P. Suponhamos que $n \geq 5$. Particionemos P em dois polígono P_1 e P_2 através de uma diagonal arbitrária d de T. Sejam T_1 e T_2 as triangularizações de P_1 e P_2, repectivamente, obtidas através da restrição da triangulação T a P_1 e P_2. Pela hipótese de indução Cada um dos (sub)polígonos P_1 e P_2 é um triângulo ou, pela hipótese de indução, possuem duas orelhas formadas por triângulos em T_1 e T_2, respectivamente. Pelo menos um desses (possivelmente dois) triângulos de T_1 é uma orelha de P. Analogamente, pelo menos um desses (possivelmente dois) dos triângulos de T_2 é uma orelha de P. Como estes triângulos são disjuntos, a prova do teorema está completa. ∎

Estamos agora preparados para demonstrar o Teorema 4 da seção anterior.

Teorema 12. *Seja G_T um grafo associado a uma triangulação T de um polígono P. Então G_T é 3-colorível.*

Demonstração. A prova é por indução no número de vértices n de G_T. Claramente um triângulo é 3-colorível. Logo, podemos supor que $n \geq 4$. Pelo Teorema 11 sabemos que P tem uma (na realidade pelo menos duas) orelha que é formada por um triângulo $\triangle(u, v, w)$ de T. Seja P' o polígono obtido a partir de P através da removeção desta orelha (isto é, troque a subseqüência $\ldots, u, v, w, \ldots$ na fronteira ∂P de P, pela subseqüência $\ldots, u, w, \ldots$) e seja T' a triangulação de P' obtida a partir de T, simplesmente removendo-se $\triangle(u, v, w)$. P' tem $n-1$ vértices e pela hipótese de indução o grafo $G_{T'}$ associado a triangulação T' é 3-colorível . O grafo G_T pode ser obtido a partir de $G_{T'}$ simplesmente adicionando o vértice v e as arestas uv e vw. Logo, existe (um única!) maneira de estendermos a 3-coloração de $G_{T'}$ a uma 3-coloração de G_T ('pinte' v com a cor que não pintamos u nem w). ∎

6. Exercicios

1. (Exercício 1.1.4.6 de [8] — guardando a parede) Construa um polígono P e disponha guardas em P de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em ∂P, mas existem pontos em P que não são vistos/cobertos pelos guardas.
2. (Exercício 1.1.4.6 de [8] — guardas em poliedros) Descreva um poliedro em $\mathbb{R}^3$ que mesmo colocando-se guardas em todos os vértices existim pontos do poliedro que não são cobertos pelos guardas.
   Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [7].
3. ('Tetraedrização' de poliedros) Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem 'buracos')

em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser particionado em tetrahedros tendo vértices selecionados dentre os vértices do politopo.
Sugestão. Veja o Capítulo 10 O'Rourke [7].
Observação. Ruppert e Seidel [9] mostraram que o seguinte problema é NP-completo: *dado:* um politopo P em $\mathbb{R}^3$; *questão:* P pode ser tetraedrizado? Below, De Loera e Richter-Gebert[1] provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em $\mathbb{R}^3$ é NP-difícil (note que isto, em particular, significa que politopos convexos possui tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante).

4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrir qualquer polígono com n vértices.

   Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos ∂P) e seja $V_k := \{v_i \mid i \mod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Apresente um um exemplo que mostra que o professor Sperto está enganado.
5. (Exercício 1.1.4.2 de [8] — Visibilidade clara) Seja $G'(n)$ o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com n vértices. Qual é a relação entre $G(n)$ e $G'(n)$?. A prova de Fisk estabelece que $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$? Tente determinar $G'(n)$ exatemente.
6. (Exercício 1.1.4.3 de [8] — Guardas nos vértices) Tente resolver o exercício anterior com a restrição que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
7. (Exercício 1.2.5.1 de [8] — Soma dos ângulos externos) Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com n vértices.
8. O *dual* de uma triangulação T de um polígono P é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de T e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum.

   Prove que o dual D de uma triangulação é uma árvore (uma árvore é um grafo conexo sem ciclos).
9. Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangulação de algum polígono.
10. (Exercício 1.2.5.3 de [8] — triangulações extremais) Quais polígonos tem o menor número de triangulações (em função do número de vértices n)? Um polígono de n vértices pode ter uma única triangulação? Quais polígonos de n vértices tem o maior número de triângulações distintas?
11. (Exercício 1.2.5.4 de [8] — número de triangulações) Qual o número de triangulações distintas de um polígono convexo com n vértices?
    Sugestão. Veja o Capítulo 10, páginas 505–508, de [4].
12. (Exercício 1.2.5.7 de [8] — rotações em árvores) Para aqueles que conhecem a operação de `rotação` para mander o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a oreparação de `rotação` em termos de triangulação de polígonos.

13. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6 Ele sugeriu que o vértice t, escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre v e t fosse mínima e afirmou que escolhendo t dessa maneira vt é uma diagonal do polígono P. O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstraçào do lema para fazer este exercício.)
14. (Minimizar o número de guardas está em NP) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: *dados:* um polígono P e pontos $p_1, \ldots, p_k$; *questão*: guardas colocados nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ cobrem P?
15. (Minimizar o número de guardas é NP-díficil) Considere o problema de decisão: *dados:* um polígono P e um inteiro positivo k; *questão*: P pode ser coberto por k guardas? Mostre que este problema é NP-completo.
Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [7].

Referências

[1] A. Below, J.A. De Loera e J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ACM-SIAM, 2000, pp. 65–66.

[2] V. Chvátal, A combinatorial theorem in plane geometry, *Journal of Combinatorial, Series B* **18** (1975), 39–41.

[3] S. Fisk, A short proof of Chvátal's watchman theoreom, *Journal of Combinatorial Theory, series B* **24** (1978), 374.

[4] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, Addison-Wesley, 1994, QA832 G861d.

[5] G.H. Meister, Polygons have ears, *American Mathematical Monthly* **82** (1975), 648.

[6] D. Mount, *CMSC 754: Computational geometry*, Spring 2000, Course Syllabus.

[7] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.

[8] ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, Second Edition, 1998.

[9] J. Ruppert e R. Seidel, On the difficult of triangulating three-dimensional non-convex polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* **7** (1992), 227–253.

[10] I. Stewart, How many guards in the gallery, *Scientific American* (1994), 88–90, Mathematical Recreations.