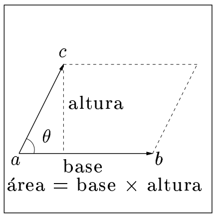
MAC 5747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

ÁREA DE POLÍGONOS

1. Introdução



Nesta parte da disciplina estudaremos como computar a área de um polígono. Os tópicos que estudaremos, como 'orientação de triângulo,' nos serão muito úteis para, em breve, descrevermos algumas operações primitivas (predicados geométricos) que usaremos em vários pontos durante o andamento da disciplina.

Observação. Os tópicos que cobriremos a seguir foram extraídos do Capítulo 1 de O'Rourke[3] (cálculo da área de um polígono), do Capítulo 4 de Laszlo [2] (orientação de triângulos), e do livro Caroli, Callioli e Feitosa [1] (vetores e geometria).

2. Área de um triângulo

Denotaremos um triângulo que tem vértices a, b, c por $\triangle(a, b, c)$.

Fixemos uma orientação no espaço $\mathbb{R}^3$ e seja $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal positiva. O *produto vetorial* de dois vetores $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ e $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ é o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} := \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

que é obtido através do desenvolvimento pela primeira linha do determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Sabe-se que a norma do vetor $\vec{u}\times\vec{v}$, denotada por $||\vec{u}\times\vec{v}|| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ |\text{sen}\ \theta|$ é igual a área do paralelogramo com lados $\vec{u}$ e $\vec{v}$, onde θ é o ângulo do vetor $\vec{u}$ ao $\vec{v}$ (veja Figura 1).

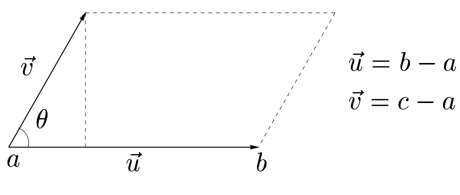


Figura 1. Área do paralelogramo

Date: 27 de março de 2000.

Reescrevendo o determinante acima temos que

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\vec{i} + (u_z v_y - u_x v_z)\vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\vec{k}.$$

Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores em $\mathbb{R}^2$ temos que $u_z = v_z = 0$. Definimos a *área sinalizada* $\mathcal{A}(T)$ de um triângulo $T := \triangle(a, b, c)$ por

$$\mathcal{A}(T) := \frac{1}{2}(u_x v_y - u_y v_x)$$

Suponhamos que $a = (a_x, a_y), b = (b_x, b_y)$ e $c = (c_x, c_y)$. Assim,

$$u_x = b_x - a_x, \quad u_y = b_y - a_y, \quad v_x = c_x - a_x \quad \text{e} \quad v_y = c_y - a_y.$$

Utilizando as igualdades acima para reescrevemos a fórmula da área sinalizada obtemos que

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(T) &= (b_x - a_x)(c_y - a_y) - (b_y - a_y)(c_x - a_x) \\ &= b_x c_y - a_y b_x - a_x c_y + a_x a_y - b_y c_x + a_x b_y + a_y c_x - a_x a_y \\ &= a_x b_y - a_y b_x + a_y c_x - axc_y + b_x c_y - c_x b_y. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2\mathcal{A}(T) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

Notemos que se a, b e c forem colineares então $\mathcal{A}(T) = 0$, o que faz sentido.

3. Orientação de triângulos

Dados três pontos no plano a, b e c, não colineares, diremos que o triângulo $\triangle(a, b, c)$ está orientado *positivamente* se o ponto c está à esquerda do segmento orientado $\vec{ab}$ e diremos o triângulo está orientado *negativamente* se c está à direita de $\vec{ab}$, como se encontra ilustrado na Figura 2. Notemos que se $\triangle(a, b, c)$ está orientado positivamente então $\triangle(a, c, b)$ está orientado negativamente.

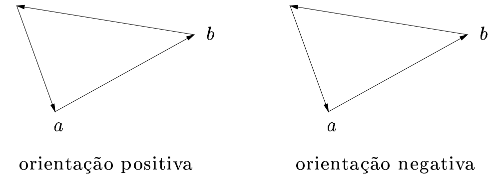


Figura 2. Orientação de triângulos.

Sejam $\vec{u} := b - a$ e $\vec{v} := c - a$. O problema de decidir se o ponto c está à esquerda ou à direita do segmento orientado $\vec{ab}$ pode ser reduzido a um problema envolvendo o ângulo θ de $\vec{u}$ até $\vec{v}$, ou seja, o ângulo começando em $\vec{u}$ e indo até $\vec{v}$ no sentido anti-horário, veja Figura 3. Notemos também que o ângulo *de* $\vec{u}$ até $\vec{v}$ é diferente do ângulo *de* $\vec{v}$ até $\vec{u}$ (ou seja, a frase de-x-até-y é não-comutativa).

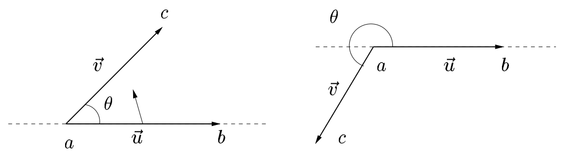


FIGURA 3. Ângulo de $\vec{u}$ até $\vec{v}$.

Se θ é um ângulo tal que $0 < \theta < \pi$ então o ponto c está à esquerda do segmento orientado $\vec{ab}$, ou, equivalentemente, o triângulo $\triangle(a, b, c)$ está orientado positivamente. Já se θ é um ângulo que satisfaz $\pi < \theta < 2\pi$ então o ponto c está à direita do segmento orientado $\vec{ab}$.

Seja agora θ_v e θ_u o ângulo de $\vec{i}$ até os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$, respectivamente. Para decidirmos a orientação do triângulo $\triangle(a, b, c)$ basta calcularmos o ângulo $\theta = \theta_v - \theta_u$, como está ilustrado na Figura 4, e utilizaramos a tabela abaixo.

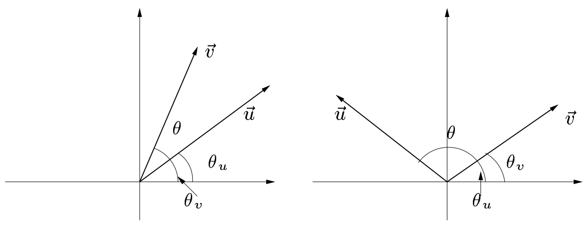


FIGURA 4. Ângulos de $\vec{i}$ até $\vec{u}$ e até $\vec{v}$.

caso	intervalo	orientação $\triangle(a, b, c)$	sinal sen θ
1	$-180^o < \theta < -360^o$	$+$	$+$
2	$-180^o < \theta < 0$	$-$	$-$
3	$0^o < \theta < 180^o$	$+$	$+$
4	$180^o < \theta < 360^o$	$-$	$-$

Observemos que o sinal de $\triangle(a, b, c)$ é o mesmo que o sinal de sen θ. Pela Lei dos Senos temos que

$$\text{sen } \theta = \text{sen } (\theta_v - \theta_u) = \text{sen } \theta_v \cos\theta_u - \text{sen } \theta_u \cos\theta_v,$$

e, como

$$\cos\theta_u = \frac{u_x}{||\vec{u}||}, \quad \text{sen } \theta_u = \frac{u_y}{||\vec{u}||}, \quad \cos\theta_v = \frac{v_x}{||\vec{v}||}, \quad \text{e sen } \theta_v = \frac{v_y}{||\vec{v}||},$$

então, reescrevendo a Lei dos Senos aplicada ao ângulo $\theta = \theta_v - \theta_u$, obtemos

$$\text{sen } \theta = \text{sen } (\theta_v - \theta_u) = \frac{1}{||\vec{u}|| \; ||\vec{v}||}(u_x v_y - u_y v_x).$$

Portanto, o sinal de sen $\theta =$ sen $(\theta_v - \theta_u)$ é igual ao sinal de $u_x v_y - u_y v_x$, que por sua vez é igual ao sinal de $\mathcal{A}(T)$, onde T é o triângulo $\triangle(a, b, c)$.

Resumindo, para decidirmos se o triângulo $T := \triangle(a, b, c)$ está orientado positivamente, ou, equivalentemente, se o ponto c está à esquerda do segmento orientado $\vec{ab}$, precisamos apenas calcular $\mathcal{A}(T)$. Se $\mathcal{A}(T) > 0$ então $\triangle(a, b, c)$ está orientado positivamente (i.e. c está à esquerda de $\vec{ab}$) e se

$\mathcal{A}(T) < 0$ então $\triangle(a, b, c)$ está orientado negativamente (i.e., c está à direita de $\vec{ab}$).

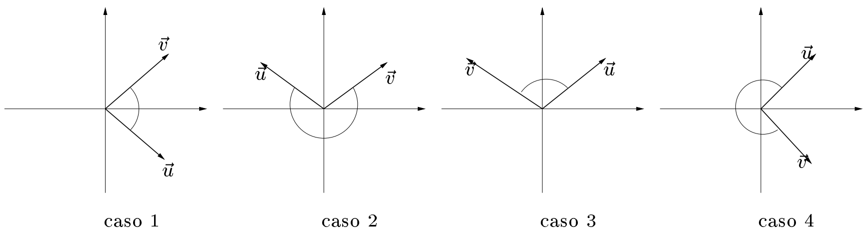


FIGURA 5. Ângulos de $\vec{u}$ até $\vec{v}$.

4. Área de um polígono convexo

Para calcularmos a área de um polígono convexo P com vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$, ou seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, podemos primeiro triangularizar P e depois somar as áreas de cada um dos triângulos, veja Figura 6.

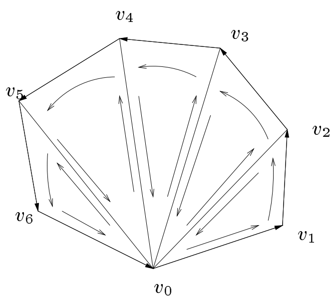


FIGURA 6. Polígono convexo e uma de suas triângularizações.

A área sinalizada $\mathcal{A}(P)$ de um polígono convexo P é dada por

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(v_0, v_1, v_2) + \mathcal{A}(v_0, v_2, v_3) + \cdots + \mathcal{A}(v_0, v_{n-1}, v_n),$$

onde $\mathcal{A}(v_0, v_i, v_{i+1})$ é a área sinalizada do triângulo $\triangle(v_0, v_i, v_{i+1})$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Notemos que os triângulos $\triangle(v_0, v_i, v_{i+1})$ estão todos orientados positivamente, ou seja

$$\mathcal{A}(v_0, v_i, v_{i+1}) > 0, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n_1.$$

É de se esperar que a área sinalizada de um polígono não depende da triângularização, contanto que todos os triângulos sejam orientados positivamente. Consideremos um quadrilátero convexo $Q = (a, b, c, d)$. Existem duas triangularizações distintas de Q, como está ilustrado na Figura 7.

Temos que

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(a, b, c) + \mathcal{A}(a, c, d) = \mathcal{A}(d, a, b) + \mathcal{A}(d, b, c).$$

Se $a = (a_x, a_y), b = (b_x, b_y), c = (c_x, cy), d = (d_x, d_y)$ então

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(Q) &= a_x b_y - a_y b_x + a_y c_x - a_x c_y + b_x c_y - b_y c_x \\ &\quad + a_x c_y - a_y c_x + a_y d_x - a_x d_y + c_x d_y - d_x c_y. \end{aligned}$$

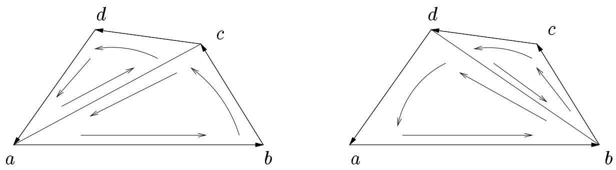


FIGURA 7. Quadrilátero convexo e suas duas triangularizações.

Vemos que os termos $a_y c_x - a_x c_y$ aparecem em $\mathcal{A}(a,b,c)$ e em $\mathcal{A}(a,c,d)$ com sinais trocados, donde podemos perceber que termos 'correspondentes' à diagonal ac se cancelam. Assim, generalizando teremos dois termos por aresta do polígono e nenhum termo por diagonal. Portanto, se $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ é um polígono convexo, onde $v_i = (x_i, y_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$, então a área sinalizada $\mathcal{A}(P)$ de P satisfaz

$$2\mathcal{A}(P) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}),$$

onde os índices são tomados módulo n. Veremos que está fórmula pode ser generalizada para polígonos não convexos.

EXERCÍCIO. Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ um polígono convexo. Prove por indução no número de vértices de P que

$$2\mathcal{A}(P) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}).$$

5. Área de um quadrilátero

Vimos como podemos calcular a área de um quadrilátero convexo. Observaremos a seguir que a fórmula que usamos para calcularmos a área de um quadrilátero convexo também pode ser usada para calcularmos a área de quadrilátero não-convexo. Na realidade, como veremos na próxima seção, a fórmula para o calculo da área de um polígono convexo pode ser usada para calcularmos a área de um polígono qualquer.

Seja $Q = (a, b, c, d)$ um polígono não-convexo. Q possui uma única triangularização, seja bd a única diagonal de Q como mostra a Figura 8. Pela figura podemos perceber que a área sinalizada $\mathcal{A}(Q)$ de Q é dada por

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(a,b,d) + \mathcal{A}(b,c,d).$$

Por outro lado, ainda através da figura podemos perceber que

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(a,b,c) + \mathcal{A}(a,c,d),$$

já que área $\mathcal{A}(a,b,c)$ é positiva e área $\mathcal{A}(a,c,d)$ é negativa. Portanto, temos que

$$\mathcal{A}(Q) = \mathcal{A}(a,b,d) + \mathcal{A}(b,c,d) = \mathcal{A}(a,b,c) + \mathcal{A}(a,c,d),$$

que é exatamente a mesma expressão da seção anterior, apesar de ac não ser um diagonal de Q. Como veremos na próxima seção este raciocínio pode ser estendido para um polígono arbitrário.

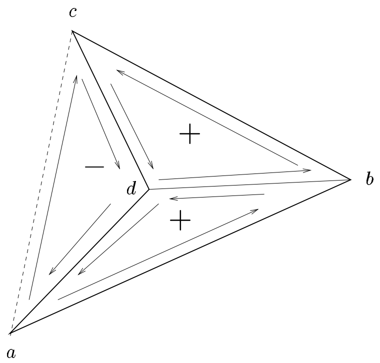


FIGURA 8. Quadrilátero não-convexo e sua única triangularização.

6. Teorema da área de polígonos

Seja $T = \triangle(a, b, c)$ um triângulo, com vértices orientados no sentido anti-horário, ou seja T está orientado positivamente. Seja ainda p um ponto arbitrário no plano. Afirmamos que

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(p, a, b) + \mathcal{A}(p, b, c) + \mathcal{A}(p, c, a).$$

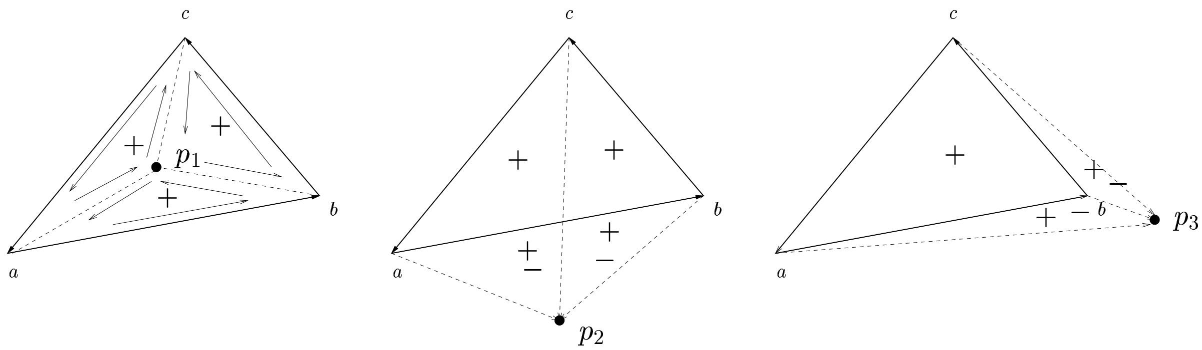


FIGURA 9. Triângulo T e possíveis posições do ponto p.

Analisando os casos que dependem da posição de p em relação ao triângulo T, ilustrados Figura 9, podemos verificar que a afirmação feita é de fato verdadeira. Se $p = p_1$ temos então que $\mathcal{A}(p, a, b), \mathcal{A}(p, b, c)$ e $\mathcal{A}(p, c, a)$ são todos positivos e a fórmula se verifica. Já se $p = p_2$ então $\mathcal{A}(p, b, c)$ e $\mathcal{A}(p, c, a)$ são positivos e $\mathcal{A}(p, a, b)$ é negativo e a soma é $\mathcal{A}(T)$. Analogamente para o o caso em que $p = p_3$. O lema abaixo resume a nossa discussão.

Lema 1. *Seja $T = \triangle(a, b, c)$ um triângulo orientado positivamente (i.e., os vértices a, b, c são atravessados nesta ordem ao percorrermos a fronteira de T no sentido anti-horário) e p um ponto qualquer no plano. Então*

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(p, a, b) + \mathcal{A}(p, b, c) + \mathcal{A}(p, c, a).$$

∎

Estenderemos o resultado do lema acima para polígono arbitrários. Esta extensão é conhecida pelo nome de *Teorema da Área de Polígonos*.

Teorema 2. *Seja P um polígono com vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$, listados em ordem anti-horária ao percorrermos a fronteira de P, e seja p um ponto qualquer no plano. Então*

$$\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(p, v_0, v_1) + \mathcal{A}(p, v_1, v_2) + \cdots + \mathcal{A}(p, v_{n-1}, v_0). \tag{1}$$

Ademais, se $v_i = (x_i, y_i)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, então

$$2\mathcal{A}(P) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}). \tag{2}$$

Prova. A demonstração será feita por indução no número de vértices de P. Se P tem 3 vértices então o resultado segue do Lema 1.

Suponhamos que equação (1) é verdadeira para polígonos com até $n-1$ vértices, $n \geq 4$, e suponhamos que P é um polígono com n vértices. Pelo Teorema das Duas Orelhas, P tem uma orelha. Renumere os vértices de P, se necessário, de tal forma que os vértices v_{n-2}, v_{n-1}, v_0 formem uma orelha. Seja $E = \triangle(v_{n-2}, v_{n-1}, v_0)$ e P' o polígono resultante de P após a remoção de E. Pela hipótese de indução temos que

$$\mathcal{A}(P') = \mathcal{A}(p, v_0, v_1) + \cdots + \mathcal{A}(p, v_{n-2}, v_0).$$

Ademais, pelo Lema 1,

$$\mathcal{A}(E) = \mathcal{A}(p, v_{n-2}, v_{n-1}) + \mathcal{A}(p, v_{n-1}, v_0) + \mathcal{A}(p, v_0, v_{n-2}).$$

Como $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(P') + \mathcal{A}(E)$ temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(P) \;&=\; \mathcal{A}(p, v_0, v_1) + \cdots + \mathcal{A}(p, v_{n-3}, v_{n-2}) + \mathcal{A}(p, v_{n-2}, v_0)\\ &\quad + \mathcal{A}(p, v_{n-2}, v_{n-1}) + \mathcal{A}(p, v_{n-1}, v_0) + \mathcal{A}(p, v_0, v_{n-2}).\end{aligned}$$

Portanto, como $\mathcal{A}(p, v_0, v_{n-2}) = -\mathcal{A}(p, v_{n-2}, v_0)$, temos que a equação (1) se verifica.

A equação (2) pode ser obtida através da simples expansão dos termos em (1). ∎

7. Exercícios

1. (Área de um polígono) Seja P um polígono (convexo ou não) com vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ listados em ordem anti-horária ao percorrermos a fronteira de P. Mostre que se $v_i = (x_i, y_i)$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ então
$$2\mathcal{A}(P) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}),$$
onde $\mathcal{A}(P)$ denota a área do polígono P.
2. (Área de um polígono) Seja P um polígono (convexo ou não) com vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ listados em ordem anti-horária ao percorrermos a fronteira de P. Escreva em `C` uma função que calcula a área de P. Qual a complexidade de tempo da sua função?
3. (*Integer overflow*) Nos computadores onde variáveis do tipo inteiro podem assumir valores entre -2^{31} e $+2^{31}$, qual é o maior valor que podemos atribuir às coordenadas dos pontos a, b e c para que não ocorra *integer overflow* na função *Area2* (veja Primitivas)?

Referências

[1] A. de Caroli, C.A. Callioli e M.O. Feitosa, *Matrizes vetores e geometria analítica*, Livraria Nobel, 1980.
[2] M.J. Laszlo, *Computational geometry and computer graphics in C++*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
[3] J. O'Rourke, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.