MAC 5747 GEOMETRIA COMPUTACIONAL

LISTA DE EXERCÍCIOS 2

1. Instruções

Entregue os exercícios 1, 4, 10 e 13 na aula do dia 6 de abril, quinta-feira.

2. Exercícios

1. (Exercício 1.1.4.6 de [4] — guardando a parede) Construa um polígono P e disponha guardas em P de tal forma que os guardas vêem todos os pontos em ∂P, mas existem pontos de P que não são vistos por nenhum dos guardas.
2. (Exercício 1.1.4.6 de [4] — guardas em poliedros) Descreva um poliedro em $\mathbb{R}^3$ que mesmo se colocarmos guardas em todos os vértices existirão pontos do poliedro que não serão cobertos por nenhum dos guardas.
   Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [3].
3. ('Tetraedrização' de poliedros) Descreva um politopo (um politopo é um poliedro limitado) de genus zero (ou seja o politopo não tem 'buracos') em $\mathbb{R}^3$ que não pode ser particionado em tetrahedros cujos vértices são selecionados entre os vértices do politopo.
   Sugestão. Veja o Capítulo 10 O'Rourke [3].
   Observação. Ruppert e Seidel [5] mostraram que o seguinte problema é NP-completo: *dado:* um politopo P em $\mathbb{R}^3$; *questão:* P pode ser tetraedrizado? Below, De Loera e Richter-Gebert[1] provaram que o problema de minimizar o número de tetraedros em uma tetraedrização de um politopo convexo em $\mathbb{R}^3$ é NP-difícil (note que isto, em particular, significa que politopos convexos possui tetraedrizações com um número diferente de tetraedros — em dimensão 2 não temos um fato semelhante).
4. Pelo Teorema da Galeria de Arte sabemos que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são ocasionalmente necessários e sempre suficientes para cobrirem qualquer polígono com n vértices.

   Tendo este teorema em mente o professor Maqui Sperto fez a seguinte afirmação: Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ um polígono (vértices em ordem anti-horário a medida que eles ocorrem quando percorremos ∂P) e seja $V_k := \{v_i \mid i \mod 3 = k\}$ $(k = 0, 1, 2)$. Então guardas colocados nos vértices em V_k cobrem o polígono P para algum $k \in \{0, 1, 2\}$. Mostre através de um exemplo que o professor Sperto está enganado.
5. (Exercício 1.1.4.2 de [4] — Visibilidade clara) Seja $G'(n)$ o menor número de guardas suficientes para verem claramente cada ponto de um polígono com n vértices. Qual é a relação entre $G(n)$ e $G'(n)$?. A

prova de Fisk estabelece que $G'(n) \leq \lfloor n/3 \rfloor$? Tente determinar $G'(n)$ exatemente.

6. (Exercício 1.1.4.3 de [4] — Guardas nos vértices) Tente resolver o exercício anterior com a restrição de que os guardas só podem ser colocados em vértices do polígono.
7. (Exercício 1.2.5.1 de [4] — Soma dos ângulos externos) Qual é a soma dos ângulos externos de um polígono com n vértices.
8. O *dual* de uma triangularização T de um polígono P é um grafo com um vértice associado a cada triângulo de T e uma aresta ligando dois vértices se e somente se os triângulos correspondentes têm um lado (diagonal) em comum.

   Prove que o dual D de uma triangularização é uma árvore (i.e., grafo conexo sem ciclos).
9. Prove ou de um contra-exemplo: Toda árvore binária é dual de uma triangularização de algum polígono.
10. (Exercício 1.2.5.3 de [4] — triangularizações extremais) Quais polígonos tem o menor número de triangularizações (em função do número de vértices n)? Um polígono de n vértices pode ter uma única triangularização? Quais polígonos de n vértices tem o maior número de triângularizações distintas?
11. (Exercício 1.2.5.4 de [4] — número de triangularizações) Qual o número de triangularizações distintas de um polígono convexo com n vértices? **Sugestão.** Veja o Capítulo 10, páginas 505–508, de [2].
12. (Exercício 1.2.5.7 de [4] — rotações em árvores) Para aqueles que conhecem a operação de `rotação` para mander o balanceamento de árvores binárias de busca. Interprete a oreparação de `rotação` em termos de triangularização de polígonos.
13. O professor Maqui Sperto (novamente) propôs uma alteração para a prova do Lema 6. Ele sugeriu que o vértice t, escolhido na demonstração, fosse um vértice tal que a distância entre v e t fosse mínima e afirmou que escolhendo t dessa maneira vt é uma diagonal do polígono P. O professor conseguiu dar um palpite correto desta vez? (Você precisa ver a demonstraçào do lema para fazer este exercício.)
14. (Minimizar o número de guardas está em NP) Descreva um algoritmo de complexidade de tempo polinomial que resolve o seguinte problema de decisão: *dados:* um polígono P e pontos $p_1, \ldots, p_k$; *questão*: guardas colocados nos pontos $p_1, \ldots, p_k$ cobrem P?
15. (Minimizar o número de guardas é NP-díficil) Considere o problema de decisão: *dados:* um polígono P e um inteiro positivo k; *questão*: P pode ser coberto por k guardas? Mostre que este problema é NP-completo.

    Sugestão. Veja o Capítulo 9 O'Rourke [3].

Referências

[1] A. Below, J.A. De Loera e J. Richter-Gebert, Finding minimal triangulations of convex 3-polytopes is NP-hard, *Proceedings of the Eleventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, ACM-SIAM, 2000, pp. 65–66.

[2] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics*, Addison-Wesley, 1994, QA832 G861d.

[3] J. O'Rourke, *Art gallery theorems and algorithms*, The International Series of Monographs on Computer Science, Oxford University Press, New York, 1987, QA830 O74a.

[4] ———, *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] J. Ruppert e R. Seidel, On the difficult of triangulating three-dimensional non-convex polyhedra, *Discrete and Computational Geometry* **7** (1992), 227–253.