MAT0141 - Cálculo - 2017

Avaliação Individual 3 - 6/6/2017

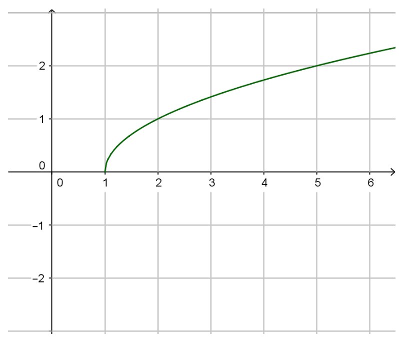
Turma A

GABARITO

Questão 1. (3 pontos) Considere a função $f(x) = \sqrt{x-1}$.

(a) Detemine o domínio e esboce o gráfico de f.

Solução: A função está definida para os números reais x tais que $x - 1 \geq 0$. Portanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$. O gráfico é:

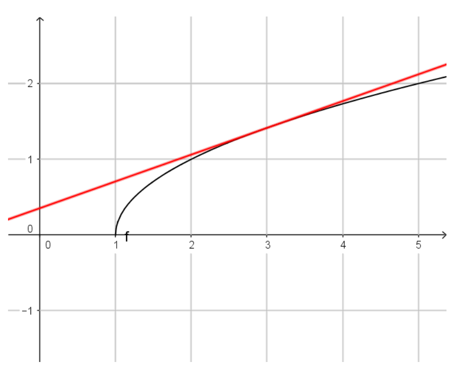


(b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, f(3))$ e a esboce no gráfico.

Solução: A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(3, f(3)$ é dada pela equação

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

Temos que $f'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{1/2-1}.1$. Logo como $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Então a equação da reta é $y - \sqrt{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-3)$ ou $y = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x-3) + \sqrt{2}$



Questão 2. (2 pontos) Em cada uma das funções seguintes, dê a expressão da derivada e determine o domínio e o conjunto de pontos do domínio em que a função é derivável.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{3-2x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Solução:

$$f'(x) = \frac{1.(3-2x) - x(-2)}{(3-2x)^2} + \left(-\frac{2}{3}x^{-2/3-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{(3-2x)^2} - \frac{2}{3}x^{-5/3}$$

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : 3-2x \neq 0, x \neq 0\}$ ou seja $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3}{2}, x \neq 0\}$.

A função é derivável em todos os pontos de seu domínio, ou seja, $Dom(f') = \{x \in \mathbb{R} : 3-2x \neq 0, x \neq 0\}$

(b) $f(x) = x\sqrt{x^2+2x-3}$

Solução:

$$f'(x) = 1.\sqrt{x^2+2x-3} + x\frac{1}{2}(x^2+2x-3)^{1/2-1}(2x+2)$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x-3 \geq 0,\}$. Mas $x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -3$. Portanto $x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ou $x \geq 1$, ou seja, $Dom(f) =]-\infty,-3] \cup [1,\infty[$. Contudo a derivada está definida apenas para $x^2+2x-3 > 0$. Portanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2x-3 > 0,\} =]-\infty,-3[\cup]1,\infty[$ (intervalos abertos)

Questão 3. (3 pontos) Esboce o gráfico de $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, destacando os intervalos de crescimento e decrescimento, concavidades, pontos de máximo e mínimo locais e pontos de inflexão.

Solução: Vamos primeiramente ver que $Dom(f) = \mathbb{R}$. Agora vamos estudar a derivada de f.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

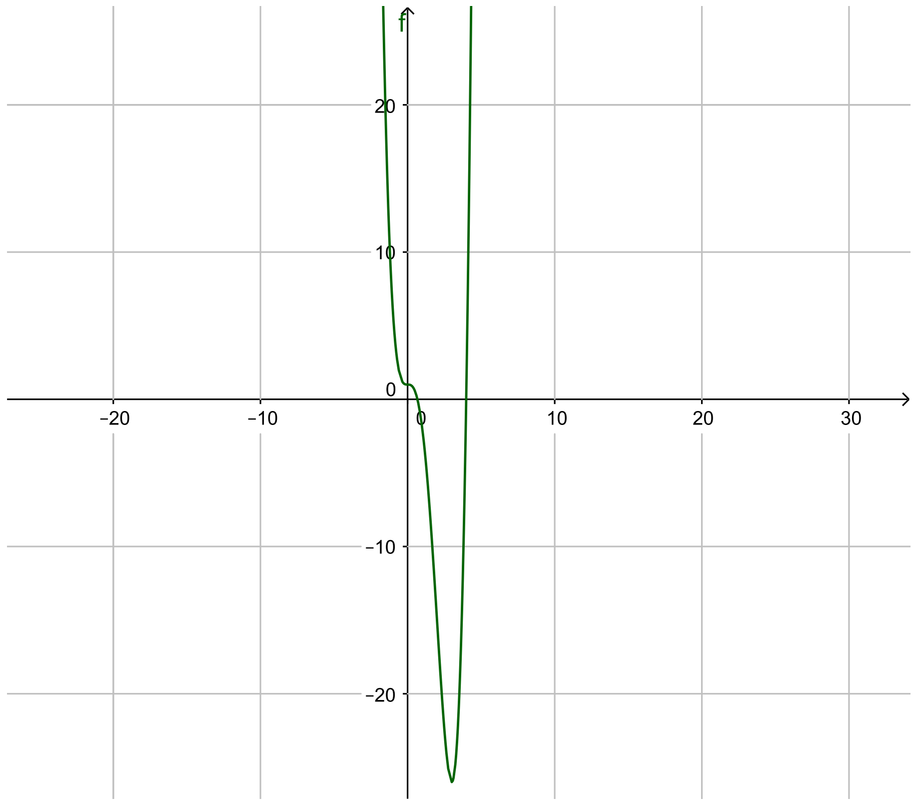
Então, $4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$. Como $x^2 \geq 0$, temos que $f'(x) \leq 0$ para $x \leq 3$ e $f'(x) \geq 0$ para $x \geq 3$. Portanto, f é crescente para $x \geq 3$ e decrescente para $x \leq 3$. Observamos que $x = 0$ é um ponto crítico, pois tem derivada nula, mas não é ponto de máximo nem de mínimo. E $x = 3$ é ponto de máximo local de f

Vamos agora estudar a segunda derivada de f.

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

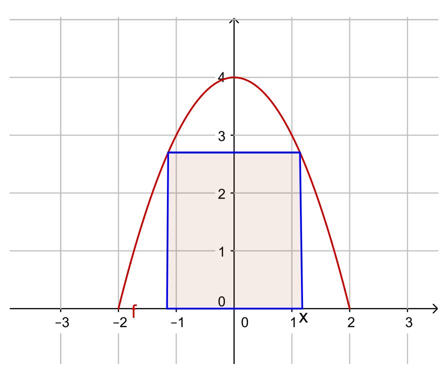
Então $12x^2 - 24x = 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$. Logo $f''(x) \leq 0$ para $0 \leq x \leq 2$ e $f''(x) \geq 0$ para $x \geq 2$ ou $x \leq 0$. Concluímos que f tem concavidade para baixo para $0 \leq x \leq 2$ e f tem concavidade para cima para $x \geq 2$ ou $x \leq 0$. Assim $x = 0$ e $x = 2$ são pontos de inflexão.

Para esboçar o gráfico vamos obter alguns valores de f: $f(0) = 1, f(-1) = 6, f(1) = -2, f(2) = -15, f(3) = -26$



Questão 4. (2 pontos) Determine o valor de x no intervalo $[0, 2]$, tal que o retângulo com vértices da base em $(x, 0)$ e $(-x, 0)$ e os outros dois vértices na parábola $y = 4 - x^2$ tenha área máxima.

Solução:



A área do retângulo é dada em função de x por $A(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3$, sendo que $x \in [0, 2]$.

Para saber qual o valor de x que dá a área máxima vamos estudar a derivada de $A(x)$.

$$A'(x) = 8 - 6x^2$$

Então, $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Logo os pontos críticos são $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Como x é positivo entre 0 e 2, só temos um ponto crítico: $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Contudo para termos certeza que este é um ponto de máximo de $A(x)$ vamos analisar o sinal da derivada $A'(x)$. Temos que $A'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $A'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2$. Portanto, $A(x)$ é crescente para $0 \leq x \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ e decrescente para $\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2$.

Portanto, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ é ponto de máximo de A, ou seja, a área do retângulo será máxima para $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$