O Problema do Multi Corte Mínimo em Digrafos

Pedro Luis Furio Raphael
Orientador: Professor Paulo Feofiloff

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Trabalho de Conclusão de Curso - 2009

Conteúdo

Problema

- Dado um digrafo $G = (V, E)$, com uma função peso p.
- Conjunto de pares ordenados de vértices S de tamanho K.
- Queremos um conjunto de arcos que se retirado do digrafo separe a fonte do sorvedouro para cada par.

Exemplo

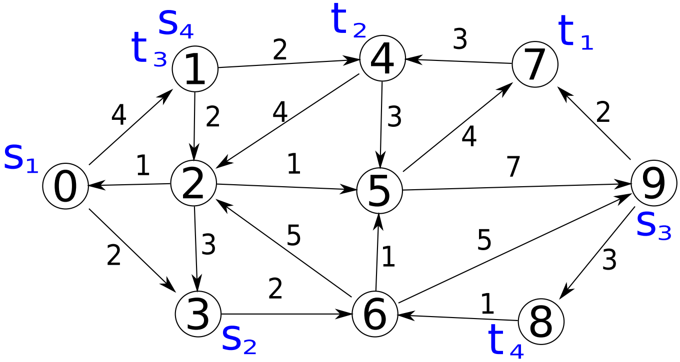

Figure: Digrafo genérico associado a S e p.

Este problema é NP-dificil para digrafos genéricos. [3]

Mas ...

Existe algoritmo polinomial para grafos específicos, como árvores[2] e anéis[1].

Definição

Uma árvore é um digrafo $T = (V, E)$ com as seguintes propriedades:

- Existe um vértice chamado de raiz, com grau de entrada 0.
- Todos os demais vértices tem grau de entrada 1.
- Para cada vértice diferente da raiz, existe um caminho da raiz a este vértice.

Associamos a esta árvore um conjunto S e uma função peso p.

Exemplo

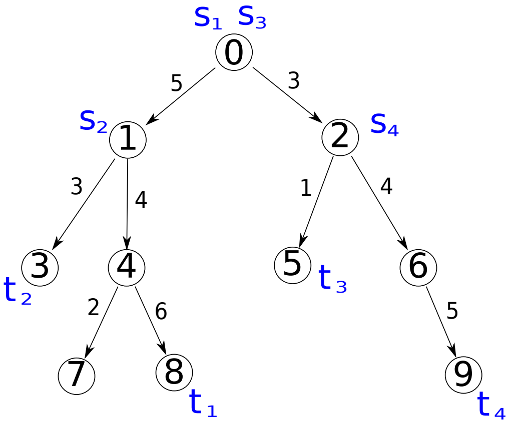

Figure: Árvore genérica associada a S e p.

Algoritmo

Existe um algoritmo polinomial para árvores.
Duas fases:

- maximiza o fluxo entre cada par de S, e acha um multi corte no processo.
- Minimiza o peso deste multi corte.

Exemplo

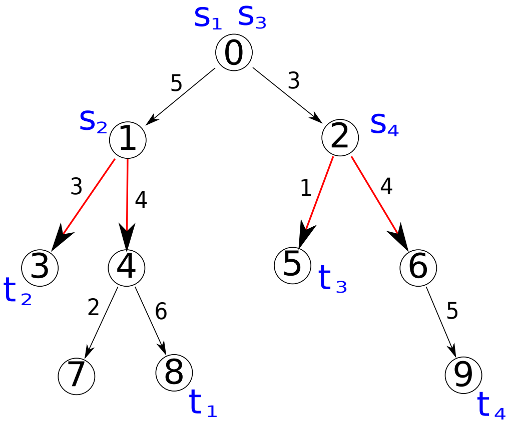

Figure: Árvore resolvida.

Pseudo-Código

ALGORITMO MultiCorteMínimo-Árvore
Recebe: Uma árvore $T = (V, E)$, uma função p que associa um número não-negativo a cada arco de E e um conjunto de pares ordenados de vértices S.
Devolve: Um multi corte M de peso mínimo.

ALGORITMO MultiCorteMínimo-Árvore(T, u, S)

1. Ordene os pares de S em ordem decrescente de distância entre a fonte e a raiz.
2. **para** $k \leftarrow 1$ **até** K **faça**
3. $\quad p_k \leftarrow$ caminho entre s_k e t_k
4. $\quad f_k \leftarrow$ valor de $\min_{e \in p_k}\{u'(e)\}$
5. $\quad M \leftarrow M \cup \{$ arcos de p_k que foram saturados $\}$
6. **para** $k \leftarrow K$ **até** 1 **faça**
7. $\quad$ **se** $f_k > 0$ **então**
8. $\quad\quad p_k \leftarrow$ caminho entre s_k e t_k
9. $\quad\quad$ Retira-se de M todas os arcos de p_k menos o mais proximo a s_k.
10. **devolva** M

Este algoritmo é $O(Kn)$, onde n é o número de vertices da árvore.

Análise

Algoritmo tem complexidade ligada ao tamanho de S e ao custo de se achar um caminho em uma árvore.
Qual o tamanho de S? $O(n)$.
Custo para se achar um caminho em uma árvore: $O(n)$.
Conclusão: Este algoritmo é $O(Kn)$.

Definição

Uma anel é um digrafo $R = (V, E)$ com as seguintes propriedades:

- Todo vértice tem grau de entrada = grau de saida = 1.
- É conexo.

Exemplo

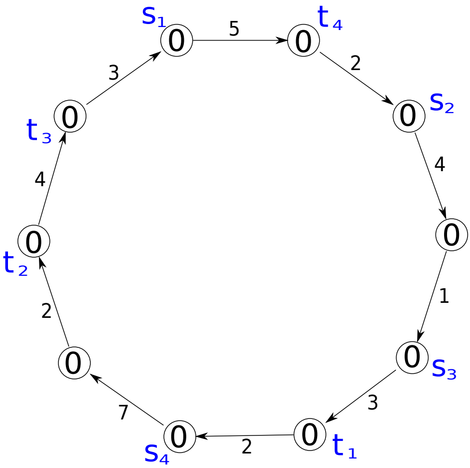

Figure: Anel genérico associado a S e p.

Algoritmo

Este algoritmo usa o algoritmo para árvores.
-Escolhe um par de S.
-Tira um arco deste caminho, transformando o anel em uma árvore.
-Acha o multi corte mínimo nesta árvore.
-Faz isto para todos os arcos do caminho escolhido.

Exemplo

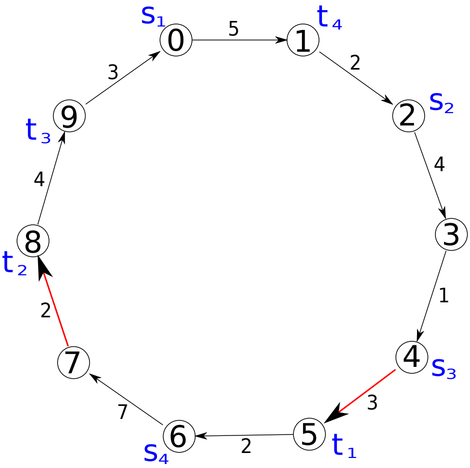

Figure: Anel genérico associado a S e p.

Pseudo-Código

ALGORITMO MultiCorteMínimo-Anel
Recebe: Uma anel $R = (V, E)$, uma função p que associa um número não-negativo a cada arco de E e um conjunto de pares ordenados de vértices S.
Devolve: Um multi corte M de peso mínimo.

ALGORITMO MultiCorteMínimo-Anel(R, u, S)

1. $M \leftarrow E$
2. $(s, t) \leftarrow$ elemento qualquer de S
3. **para cada** e no caminho entre (s, t) **faça**
4. $\quad R' = (V, E') \leftarrow$ novo grafo tal que $E' \leftarrow E - e$
5. $\quad S' \leftarrow S - \{$ pares cujo caminho contém $e\}$
6. $\quad M' \leftarrow$ MultiCorteMínimo-Árvore(R', u, S')
7. $\quad M' \leftarrow M' \cup \{e\}$
8. $\quad$ **se** $p(M') < p(M)$ **então**
9. $\quad\quad M \leftarrow M'$
10. **devolva** M

Este algoritmo é $O(Kn^2)$, onde n é o número de vertices da árvore.

Análise

Este algoritmo depende da complexidade de MultiCorteMínimo-Árvore e do tamanho máximo de um caminho em um anel.
Roda em tempo $O(Kn^2)$

C. Bentz, M.C. Costa, L. Létocart, and F. Roupin.
Multicuts and integral multiflows in rings.
European Journal of Operational Research, 196(3):1251–1254, 2009.

M.C. Costa, L. Létocart, and F. Roupin.
A greedy algorithm for multicut and integral multiflow in rooted trees.
Operations Research Letters, 31(1):21–27, 2003.

N. Garg, V.V. Vazirani, and M. Yannakakis.
Primal-dual approximation algorithms for integral flow and multicut in trees.
Algorithmica, 18(1):3–20, 1997.