Teorema da Galeria de Arte e Triangularização de Polígonos e Pontos no Plano

Lucas Piva Rocha Corrêa
Orientador: Carlos Eduardo Ferreira

Departamento de Ciência da Computação
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

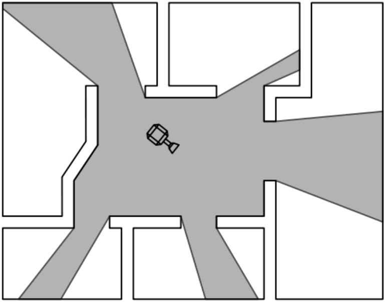
Trabalho de Conlcusão de Curso

Conteúdo

Conteúdo

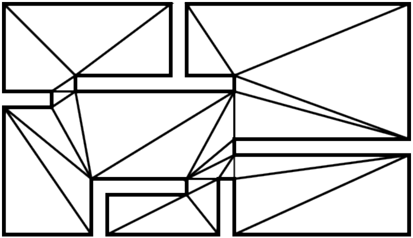
Problema

- Queremos vigiar uma Galeria de Arte.
- Queremos posicionar o menor número possível de câmeras.
- Como encontrar o posicionamento ótimo?

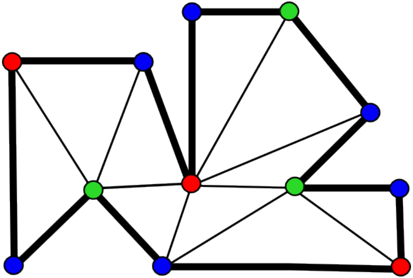


Teorema: *Para todo polígono de n vértices,* $\lfloor n/3 \rfloor$ *câmeras são sempre suficientes e ocasionalmente necessárias.*

Teorema: *Para todo polígono de n vértices,* $\lfloor n/3 \rfloor$ *câmeras são sempre suficientes e ocasionalmente necessárias.*



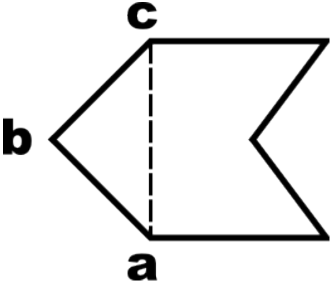
Teorema: *Para todo polígono de n vértices, $\lfloor n/3 \rfloor$ câmeras são sempre suficientes e ocasionalmente necessárias.*



Conteúdo

Orelha

Orelha Δabc de um polígono:



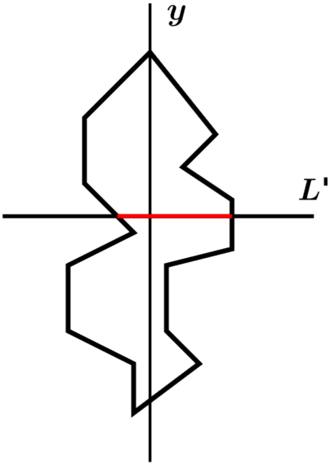
Teorema *Todo polígono com* $n > 3$ *vértices possui pelo menos uma orelha.*

Algoritmo

1. Pré-processa cada vértice e decide quais são orelhas.
2. Guarda as orelhas em uma fila.
3. Enquanto há orelhas
4. Retira uma orelha da fila e adiciona uma diagonal.
5. Atualiza o status de orelha dos vértices vizinhos.

Teorema *O algoritmo roda em* $O(n^2)$.

Polígono Monótono



Interesse

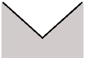
Por que polígonos monótonos são interessantes?

- Podemos triangularizar um polígono monótono em tempo linear.
- Podemos decompor um polígono em componentes monótonas em $O(n \log n)$.

Fonte de não-monotonicidade

- Vértice de Quebra:

- Vértice de Junção:



Lema *Um polígono é y-monótono sse não possui nenhum vértice de quebra, e nenhum vértice de junção.*

Sweep Line

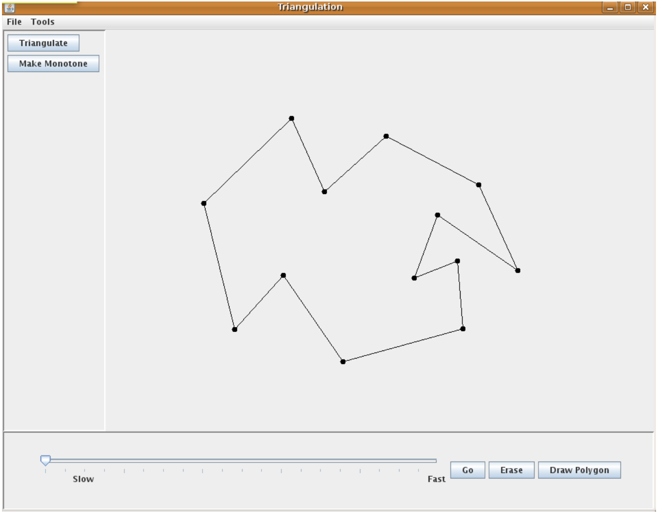
Como nos livramos dos vértices de quebra e junção?

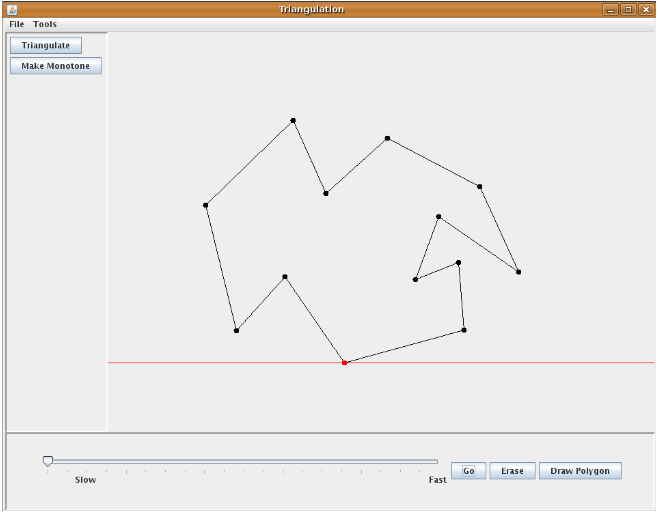
Usando uma *linha de varredura*.

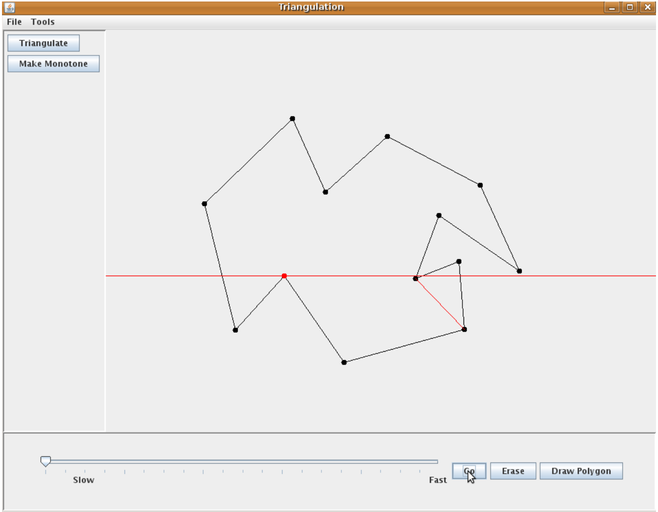
Sweep Line

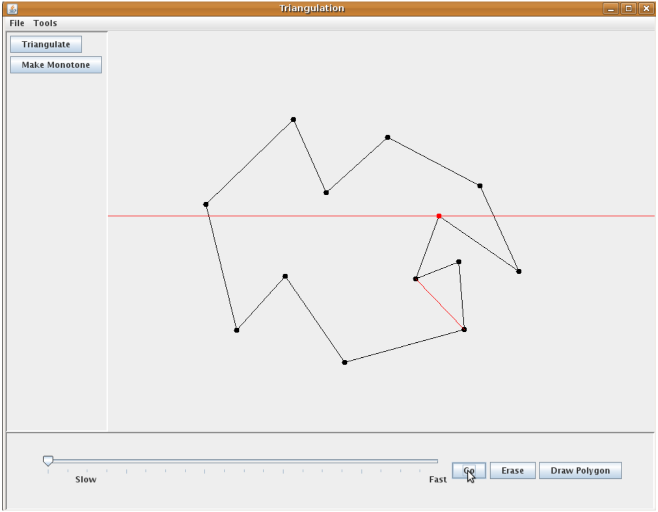
Como nos livramos dos vértices de quebra e junção?

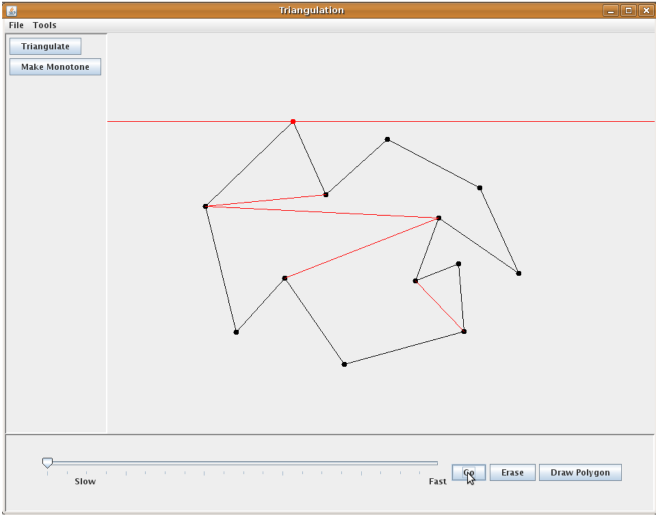
Usando uma *linha de varredura*.


Triangulation
File Tools
Triangulate
Make Monotone
Slow
Fast
Go
Erase
Draw Polygon


Triangulation
File
Tools
Triangulate
Make Monotone
Slow
Fast
Go
Erase
Draw Polygon


Triangulation
File Tools
Triangulate
Make Monotone
Slow
Fast
Go
Erase
Draw Polygon


Triangulation
File Tools
Triangulate
Make Monotone
Slow
Fast
Go
Erase
Draw Polygon


Triangulation
File Tools
Triangulate
Make Monotone
Slow
Fast
Go
Erase
Draw Polygon

Conteúdo

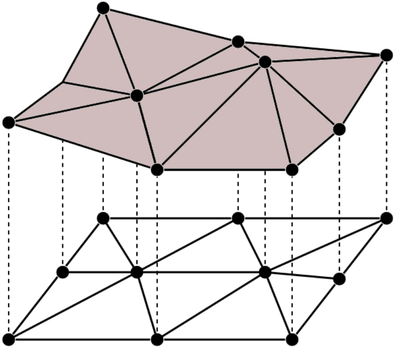
Aplicação

Aplicação?

Aplicação

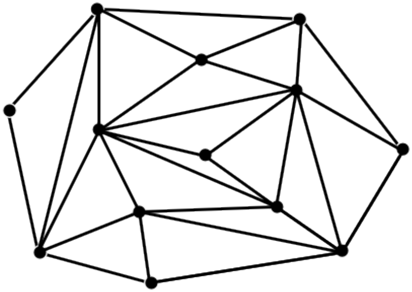
Aplicação?

- Modelar superfícies.



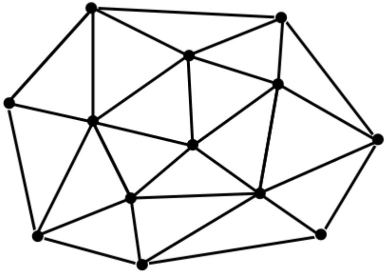
Definição

Uma triangularização de um conjunto de pontos no plano é um conjunto maximal não intersectante de arestas.



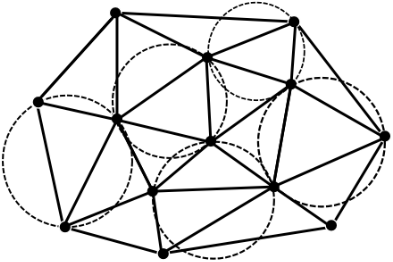
Triangularização de Delaunay

- Maximiza o menor ângulo.

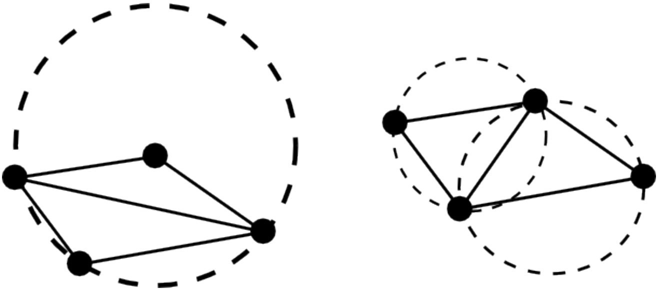


Triangularização de Delaunay

- Maximiza o menor ângulo.



Aresta ilegal



Idéia Central

1. Começamos com uma triangularização qualquer.
2. Enquanto existem arestas ilegais.
3. Troca uma aresta ilegal por uma legal.

Idéia Central

1. Começamos com uma triangularização qualquer.
2. Enquanto existem arestas ilegais.
3. Troca uma aresta ilegal por uma legal.

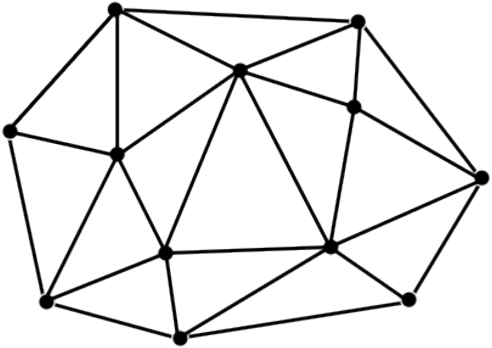
O algoritmo sempre termina, mas é muito devagar.
Algoritmo $O(n \log n)$ usa essa idéia.

Triangularização de Steiner

- Pontos artificiais: *Pontos de Steiner*.
- Produzir triangularizações melhores.

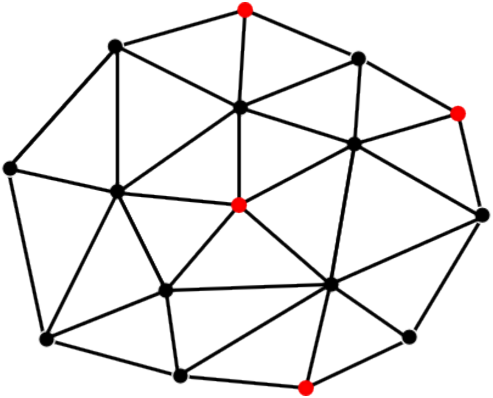
Triangularização de Steiner

- Pontos artificiais: *Pontos de Steiner*.
- Produzir triangularizações melhores.



Triangularização de Steiner

- Pontos artificiais: *Pontos de Steiner*.
- Produzir triangularizações melhores.



Resultados

Algoritmo estudado garante uma entre:

- Triangularização com todos os ângulos maiores que uma constante;
- Triangularização sem ângulos obtusos;
- Triângulos apenas com ângulos agudos, maiores que 35^o.

Concluindo

E agora?

- Melhorar a interface.
- Implementar todos os algoritmos.
- Portabilidade.

[1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf, *Computational Geometry: Algorithms and Applications*, 2nd ed., 2005.

[2] Joseph O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, 1998.

[3] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, Journal of Combinatorial Theory B **vol. 18** (1975), pp. 39:41.

[4] S. Fisk, *A short proof of Chvátal's watchmen theorem*, Journal of Combinatorial Theory B (1978).

[5] B. Chazelle, *Triangulating a simple polygon in linear time*, Discrete and Computational Geometry **6** (1991), no. 1, 485–524.

[6] M. and Eppstein Bern D. and Gilbert, *Provably good mesh generation*, Foundations of Computer Science, 1990. Proceedings., 31st Annual Symposium on, 1990.