IME - Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo
Instituto de Matemática e Estatística

MAC499 - Trabalho de Formatura Supervisionado

Revisão de Crenças com Probabilidades Imprecisas

Camila Mari Matsubara
camila.matsubara@usp.br

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Finger
mfinger@ime.usp.br

São Paulo, Novembro de 2009

Conteúdo

Parte I

Parte Técnica

Capítulo 1

Introdução

1.1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é o estudo da teoria de Revisão de Crenças, principalmente com Probabilidades Imprecisas.

Dado um conjunto de crenças, a modelagem do seu comportamento visa, entre outras coisas, manter o conjunto consistente. Existem três operações de Revisão: Contração (quando se deseja retirar uma informação. Para manter a consistência, eventualmente, é necessário retirar outras crenças); Expansão (quando se adiciona uma crença consistente ao conjunto inicial); e a Revisão propriamente dita (quando se deseja adicionar uma informação que contradiz o conjunto inicial de crenças). Todas essas operações estão mais detalhadamente descritas no conteúdo deste trabalho.

O trabalho se concentra apenas na operação de revisão, já que no contexto probabilístico a contração e expansão se tornam casos especiais de revisão.

Assim, inicialmente o trabalho objetiva formalizar a teoria dentro desse novo contexto proposto. Em seguida, gostaríamos de alcançar uma modelagem para a operação de revisão probabilística.

1.2 Organização

No restante deste capítulo, elaboramos com mais detalhes e com exemplos os tipos de mudança de crença. O capítulo 2 contém a definição dos conceitos utilizados na monografia e o estudo sobre a literatura existente. Aprofundamo-nos na teoria com estados modelados em diferentes tipos de representação. Ainda nesse capítulo exploramos os detalhes de cada tipo de modelagem. Além disso, definimos o modelo de represetação proposto, descrevemos o problema a ser resolvido e apresentamos suas possíveis aplicações.

O capítulo 3 descreve as atividades realizadas e apresenta os principais resultados obtidos com o estudo, onde definimos a teoria de revisão para o contexto de probabilidades imprecisas, formalizando conceitos e, em especial, os postulados AGM[1]. A subseção 3.2 e 3.4 tratam de algoritmos e heurísticas que ajudam/solucionam o problema da revisão. Já a subseção 3.3 explora o conceito de *Satisfatibilidade Probabilística*, definindo o que é um conjunto inconsistente. No capítulo 4, resumimos os passos do trabalho, sugerimos trabalhos futuros e fazemos alguns comentários conclusivos.

1.3 Revisão de crença

Revisão de Crença é uma sub-área da Inteligência Artificial, que tem como principal foco manter a consistência de um conjunto de crenças quando novas crenças são adicionadas [3].

A necessidade de modelar o comportamento de bases de conhecimento dinâmicas ao sofrerem uma certa alteração de informação formou os fundamentos da teoria de Revisão de Crenças. Essa teoria começou a se solidificar a partir do início da década de 80 quando Alchourrón, Gärdenfors e Makinson propuseram alguns postulados que descrevem as mínimas propriedades que um processo de mudança deve ter, no artigo *On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions* [1], de 1985. Esses postulados ficaram conhecidos como postulados AGM em homenagem aos autores e, desde então, têm sido bastante usados na área de modelagem de sistemas dinâmicos [7].

Revisão de crença consiste no problema do seguinte tipo: "Dado um agente com um conjunto de crenças (fatos nos quais o agente acredita), como deve-se alterar essas crenças para acomodar uma nova informação ou revogar alguma que antes era aceita?"

Um agente pode ser um ser humano, um programa de computador, ou qualquer tipo de sistema que armazena crenças e de quem se espera reações racionais [8].

Os principais tipos de mudanças de crenças são:

- **Contração:** quando se deseja retirar uma informação do conjunto de crenças atual. Para manter o conjunto consistente, eventualmente, é necessário retirar outras crenças.
- **Expansão:** quando se deseja adicionar uma informação consistente ao conjunto de crenças inicial.
- **Revisão:** quando se deseja adicionar uma informação que contradiz o conjunto de crenças aceito pelo agente.

[1] Alchourrón, Gärdenfors e Makison - autores que publicaram postulados para Revisão de Crenças.

Exemplo (adaptado de [4]):

Oscar acredita que deu uma aliança de ouro à Vitória quando eles se casaram. Ele comprou as alianças em uma joalheria e o vendedor garantiu que elas foram feitas de ouro 24-quilates[2]. Entretanto, algum tempo depois do casamento, Oscar estava consertando o seu barco e percebeu que o ácido sulfúrico que ele estava usando manchou sua aliança. Ele lembrou, das aulas de química da escola, que o único ácido que afeta o ouro é áqua-régia. Para sua surpresa, ele verificou que a aliança de Vitória também foi manchada pelo ácido.

Neste momento, Oscar tem que revisar suas crenças, porque se deparou com uma inconsistência. Ele não poderia negar o fato de que as alianças estão manchadas. Ele cogitou a ideia de que, por acidente, havia comprado áqua-régia ao invés de ácido sulfúrico, mas logo abandonou esta possibilidade. Então, visto que Oscar confiava na teoria química, ele concluiu que as alianças não foram feitas de ouro, e que ele foi enganado pelo joalheiro.

Esta história é um exemplo informal de revisão: a informação que se deseja adicionar ao conjunto (a aliança manchada) contradiz as crenças já aceitas por Oscar.

Outro tipo de mudança de crença acontece quando Oscar aprende alguma coisa ou observa algo que não contradiz suas crenças atuais, por exemplo, quando ele recebe a notícia de que seu irmão comprou um carro vermelho. Neste caso, acontece uma expansão, porque simplesmente adiciona-se a nova informação (e suas consequências), sem a necessidade de eliminar conflitos.

Além disso, para ilustrar a contração: Oscar está tendo problemas no seu casamento com Vitória, e frequentemente se encontra imaginando o que mudaria em sua vida se não tivesse se casado. Ele não estaria morando naquela cidade, e certamente teria de preparar seu próprio café da manhã. Neste exemplo, Oscar retrai uma informação do seu conjunto de conhecimentos e tenta descobrir quais outras crenças ele deveria abandonar como consequência da remoção e quais deveria manter.

A operação de revisão é a mais complexa. O resultado obtido a partir dessa operação não é imediato, no sentido de que é necessário definir o conceito de *consistência e inconsistência* do conjunto e considerar esse conceito em cada passo da revisão. Além disso, o resultado de uma revisão não é único. Por exemplo, no caso das alianças manchadas, Oscar poderia revisar suas crenças concluindo que foi o vendedor de ácido sulfúrico quem o enganou, e não o joalheiro. Ou concluir que a teoria química está equivocada, e que as alianças foram manchadas pelo ácido sulfúrico.

[2] o quilate é uma medida de pureza do ouro. Um quilate de ouro é o total de seu peso dividido por 24. Assim, 18 quilates = 18/24 = 75% de ouro; e 24 quilates = 100% de ouro!

Com essas possibilidades, surge uma outra dificuldade em lidar com a revisão de crença: como decidir quais crenças devem permanecer, e quais devem ser removidas? Por que faz sentido supor que a crença na teoria química tem mais "peso" do que a crença no joalheiro?

Portanto, para se determinar precisamente qual o resultado de uma revisão, primeiramente a teoria deve ser formalizada.

Capítulo 2

A Teoria de Revisão de Crenças

O problema de Revisão de Crenças baseia-se em cinco conceitos principais: estados de crença, atitudes de crença, entradas de crença, mudanças de crenças, e critérios de racionalidade. Nas próximas subseções, para cada tipo de representação de estados serão explicados os detalhes desses conceitos.

2.1 Representação do estado de crença

Estado de crença é a entidade central da teoria. Representa o atual (ou possível) estado cognitivo do agente num determinado ponto do tempo. Porém, não é a representação psicológica de como as crenças se mantém na mente humana. E sim, um conceito idealizado, com conjuntos consistentes, em equilíbrio sob todas as forças internas.

Faremos uso de uma das representações mais comuns: a *proposicional*, onde uma sentença – que corresponde a uma crença – é descrita como uma fórmula. Utilizaremos, então, a linguagem L, que inclui a lógica proposicional clássica com seus conectivos lógicos e a relação de consequência $\vdash$ [7].

2.1.1 Conjunto e Base de crenças

Conjunto de crenças é a representação usual, que modela o estado de um agente através de um conjunto de sentenças (crenças na quais o agente acredita).

Um *conjunto de crenças* K caracteriza-se por ser:

- um conjunto de sentenças consistente, ou seja, $\perp$ (falsidade) não é uma consequência lógica das sentenças em K ($K \nvdash \perp$); e
- logicamente fechado, ou seja, se K implica logicamente B então B pertence a K ($K \vdash B \Longrightarrow B \in K$).

Porém, este tipo de modelo tem recebido críticas, especialmente de autores interessados na computabilidade da teoria de mudança de crenças, já que este tipo de conjunto tende a ser infinito.

Uma alternativa para contornar a limitação da computabilidade de conjuntos de crenças é a representação através de base de crenças [8] que, em vez de sempre considerar o conjunto de crenças como um todo, propõe considerar um conjunto finito contendo as crenças centrais, a partir das quais pode-se inferir todas as crenças do conjunto. Um conjunto de crenças pode ter várias bases diferentes.

B_k é uma *base* para um conjunto de crenças K se e somente se:

- B_k é um subconjunto finito de K; e
- o fecho lógico de B_k é igual ao conjunto K, ou seja, $K = \mathrm{Cn}(B_k)$.

onde Cn é o operador de consequências lógicas, ou seja, $\mathrm{Cn}(B_k)$ é o conjunto de todas as sentenças que são consequências lógicas de B_k.

Atitudes de crença descrevem a interpretação que se tem sobre cada crença contida no estado atual. As atitudes possíveis nestas representações são:

- a sentença A é aceita no estado de crença atual: $A \in K$;
- a sentença A é rejeitada: $\neg A \in K$;
- indeterminado: $A \notin K$ e $\neg A \notin K$.

A interpretação "sentença A é rejeitada" corresponde a "sentença $\neg A$ é aceita".

Entradas de crença são forças externas ao agente que alteram o seu estado de crenças, tirando-o do equilíbrio. Neste caso, há dois tipos de entradas:

- Adição: uma sentença A', que antes não era aceita, é adicionada ao conjunto (ou base) de crenças, como uma nova evidência para o agente;

- Remoção: uma sentença A, que antes era aceita no conjunto, é derrogada.

Como as entradas alteram o equilíbrio do estado, são baseadas nessa alteração que ocorrem as mudanças de crença.

Mudança de crença é uma alteração que age sobre um estado, causada por uma entrada de crença. Diz-se que a mudança de crença é uma *regra funcional*, que, dado um estado e uma entrada de crença, determina um novo estado [4].

Se a sentença A' é adicionada ao conjunto K (ou, sem perda de generalidade, base B_k), há duas possibilidades:

1. A' é consistente com as crenças em K:
   Mudança: expansão. Simplesmente adiciona-se A' à K.

2. A' contradiz as crenças de K:
   Mudança: revisão. Manipula-se o conteúdo de K de modo a torná-la consistente.

Se a sentença A é removida do conjunto K:
Mudança: contração. Eventualmente é necessário eliminar outras sentenças, de modo a manter K consistente e logicamente fechado.

2.1.2 Crença probabilística

O estado de crença de um agente também pode ser representado por uma função de probabilidade definida sobre a linguagem L [4]. Essa função mede o grau de crença do agente.

A notação que adotamos é: $P(A)$ representa o valor de probabilidade da sentença A.

Os axiomas de probabilidade propostos por Andrei Kolmogorov em 1956 [6] são aplicáveis neste modelo:

- i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para toda sentença A em L;
- ii) $P\ (\top) = 1$, onde $\top$ é o símbolo da tautologia (verdade lógica);
- iii) para toda sentença A e B, se A e B são logicamente disjuntas, isto é $\vdash \neg\ (A \wedge B)$, então $P\ (A \vee B) = P(A) + P(B)$.

Além disso, a função de probabilidade - P: $L \rightarrow [0.0; 1.0]$ - segue as seguintes condições para toda sentença A, B, C:

- iv) $P(A) = P(A \wedge A)$;
- v) $P(A \wedge B) = P\ (B \wedge A)$;
- vi) $P\ (A \wedge (B \wedge C)) = P\ ((A \wedge B)\ \wedge C)$;
- vii) $P(A) + P(\neg A) = 1$;
- viii) $P(A) = P(A \wedge B) + \mathrm{P}(A \wedge \neg B)$;

- iv) $P\ (A \cup B) = P(A) + P(B)$ - $P\ (A \vee B)$;
- x) $A \vdash B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;
- xi) $A \leftrightarrow B \Rightarrow P(A) = P(B)$.

Podemos traçar uma relação entre este modelo e o conjunto de crenças: Uma função de probabilidade P definida sobre L gera o conjunto K de sentenças se e somente se, para toda sentença A, $P(A) = 1.0 \iff A \in K$. Ou seja, cada sentença aceita pela função P está no conjunto de crenças K.

Para as dinâmicas no modelo probabilístico existem alguns principais métodos de mudança de crença, sobre os quais não entraremos em detalhes aqui. O primeiro é a condicionalização da função de probabilidade, que corresponde à expansão do estado que essa função representa. O segundo é *imaging*, um método alternativo de expansão sugerido por Lewis, mas que também pode ser encarado como um método de revisão geral. Mais detalhes sobre esse métodos podem ser encontrados em [4].

Além disso, métodos de revisão de crenças probabilísticas foram propostos por Jeffrey e Pearl, usando evidência indeterminada [2].

No modelo probabilístico, uma função de probabilidade é uma maneira de representar crenças que são parciais, no sentido de que elas não são nem aceitas (probabilidade igual a um) nem rejeitadas (probabilidade igual a zero). A função de probabilidade fornece informação detalhada sobre o quão fortemente as crenças são mantidas.

Assim, ao invés de apenas aceita, rejeitada ou indeterminada, temos um repertório mais extenso de atitudes (ou interpretações). Por exemplo: em um determinado estado de crença, representado pela função de probabilidade P, as sentenças A e B não são rejeitadas ($P(A)$, $P(B) > 0$). Além disso, a sentença A é mais provável que B ($P(A) > P(B)$) – ou seja, no estado atual, o agente acredita mais na crença A do que na B.

Nesta representação, a entrada de crença consiste em alterar o valor da probabilidade de alguma sentença A e observar o efeito dessa alteração no valor das probabilidades das outras sentenças segundo o mapeamento da função de probabilidade P.

2.1.3 Probabilidades imprecisas

Esta é a representação de um estado de crença que propomos neste trabalho. É uma outra maneira de descrever crenças parciais: associar cada sentença A da linguagem L com um intervalo de probabilidade, denotado por [a , b][1], onde $0.0 \leq$ a $\leq$ b ≤ 1.0.

[1] denotamos intervalos de probabilidades com colchetes [ ].

A ideia de intervalos surge de maneira natural: suponha que um estado seja representado com o modelo anterior mas não há conhecimento dos valores de probabilidades de todas as sentenças. Apenas com alguns valores, é possível inferir um intervalo de probabilidade para as demais sentenças.

A interpretação é que as informações disponíveis ao agente impõem que a verdadeira probabilidade da sentença está em um ponto dentro deste intervalo; e que nenhum intervalo menor é justificado por essas informações.

A seguir, mostraremos a consistência na escolha deste tipo de representação (seção 2.3). E no capítulo 3 exploraremos melhor os detalhes do significado e modelagem das probabilidades imprecisas.

2.2 Critérios de racionalidade

Os critérios de racionalidade estão no meta-nível da teoria de crenças e são usados para avaliar os outros fatores da teoria, sendo importantes no entendimento das dinâmicas desses conceitos [4].

Postulados AGM: Para expressá-los, assume-se que a representação do estado de crenças do agente seja baseada no modelo de conjunto de crenças. Os Postulados AGM correspondem a um conjunto de propriedades que a operação de mudança deve satisfazer. Entretanto, não caracteriza uma metodologia única para efetuar tais operações. Portanto ainda podem existir maneiras diferentes de processar a revisão de crença e que satisfazem os postulados.

Quando uma sentença A' é adicionada a um conjunto K, tornando-o inconsistente, podemos simplesmente abandonar todas as crenças do estado, mantendo no estado resultante apenas a crença A'. Mas isso não é desejável, pois o conjunto perderia crenças valiosas. Um dos objetivos dos postulados é garantir o Princípio das Mudanças Mínimas, isto é, abandonar a menor quantidade de informação possível.

Uma outra alternativa simples é remover a sentença A' imediatamente após ela ser adicionada, fazendo com que o conjunto K volte a ser consistente. Entretanto, os postulados também garantem que isso não ocorra, supondo que a crença adicionada sempre é aceita.

AGM utilizam os símbolos $+$, - e * para designar as operações de expansão, contração e revisão, respectivamente. A notação $K * A'$ representa o conjunto de crenças resultante da revisão do conjunto K com a sentença A'.

Existe uma lista de postulados para cada uma das operações. Porém, neste trabalho, enfatizamos os postulados de revisão [4]:

R*1: $K * A'$ é um conjunto de crenças.

Este postulado garante a manutenção do estado resultante da revisão.

R*2: $A' \in K * A'$

O sucesso da revisão: o estado resultante deve conter a sentença com a qual o estado foi revisado.

R*3: $K * A' \subseteq K + A'$

Garante que as únicas informações adicionadas ao conjunto de crenças são a nova sentença e suas consequências lógicas.

R*4: Se $\neg A' \notin K$ então $K + A' \subseteq K * A'$

Se a nova sentença a ser adicionada é consistente, a expansão está contida na revisão. Assim, junto com o postulado anterior, a revisão é igual à expansão.

Caso degenerado: Se $A' \in K$ então $K * A' = K$

Se a sentença a ser revisada já pertence ao conjunto de crenças, não há nada a fazer.

R*5: $K * A'$ é inconsistente se e somente se $\vdash \neg A'$

O estado resultante da revisão só é inconsistente se a sentença a ser revisada é inconsistente.

R*6: Se $\vdash A' \leftrightarrow B'$ então $K * A' = K * B'$

A revisão feita por sentenças logicamente equivalentes resultam no mesmo conjunto revisado.

Harper e Levi identificaram e provaram relações entre a revisão e contração, que são conhecidas como identidades [7]:

- Identidade de Levi: $K * A = (K - \neg A) + A$
- Identidade de Harper: $K - A = K \cap (K * \neg A)$

A dupla de identidades significa que a revisão pela sentença A é equivalente a contração da negação dessa sentença seguida da sua expansão. E a contração é equivalente à intersecção da revisão pela negação da sentença e do conjunto inicial.

Portanto, como a expansão é o caso fácil ($K + A = \mathrm{Cn}(K \cup A)$ onde Cn é o operador de consequências lógicas), a construção de apenas uma das mudanças (revisão ou contração) basta, já que uma pode ser descrita em função da outra.

2.3 O problema da Revisão com Probabilidades Imprecisas

Lembremos o nosso objetivo:

Modelar a revisão de crenças em estados representados por probabilidades imprecisas, isto é, intervalos de probabilidades.

Entretanto, há muitos fatores que podem agir sobre a operação de revisão, como foi observado no exemplo das alianças de Oscar. A partir dessa dificuldade surge a necessidade de se criar um ambiente formal onde as sentenças estão associadas a probabilidades imprecisas (capítulo 3).

Antes de descrever o problema, apresentamos a consistência na utilização do modelo de probabilidades imprecisas para representar sentenças da linguagem L. Para isso, verificaremos que, para quaisquer sentenças A e B em L associadas a intervalos $\pi_A = [a_1 , a_2]$ e $\pi_B = [b_1 , b_2]$ respectivamente, as probabilidades resultantes de operações lógicas (conjunção, disjunção e negação) também são intervalos.

- Conjunção ($\wedge$ representa o E lógico):
  A sentença $A \wedge B$ está associada à probabilidade correspondente ao evento de ambas sentenças, A e B, ocorrerem simultaneamente. O limite inferior da intersecção, sob o ponto de vista generalista, deve ser 0.0, pois as sentenças A e B podem ser contraditórias e assim existe a possibilidade de nunca ocorre o evento da intersecção. A operação de intersecção não aumenta as chances dos eventos, portanto, não aumenta a probabilidade. Por isso, o limite superior é o valor mínimo entre o limite superior de A e B. Assim, o intervalo de $A \wedge B$ é [0 , min{a2,b2}].

- Disjunção ($\vee$ representa o OU lógico):
  A sentença $A \vee B$ está associada à probabilidade correspondente ao evento de uma das duas sentenças ocorrerem, ou ambas. De maneira análoga ao item anterior, o intervalo da disjunção é [min{a1,b1} , 1].

- Negação:
  A sentença $\neg A$ está associada à probabilidade de o evento A não ocorrer. Se ao invés de intervalo tivéssemos a probabilidade pontual a_1, correspondente a sentença A, a negação $\neg A$ estaria relacionada com a probabilidade $1 - a_1$. Analogamente, para a_2, teríamos $1 - a_2$. Como $a_2 \geq a_1$, segue que $1 - a_1 \geq 1 - a_2$. Além disso, as probabilidades entre estes valores correspondem a $\neg A$, e portanto, a negação está associada ao intervalo de probabilidades $[1 - a_2 , 1 - a_1]$.

Dados:

- uma função que associa cada sentença A_i contida na base a um intervalo de probabilidade $\pi_i = [a_i\ ,\ b_i]$;
- e supondo a existência uma base de crenças B_k, finita e consistente, que corresponde a um conjunto de crenças K, onde uma sentença não pertence à base se e somente se possui probabilidade imprecisa igual a [0.0 , 1.0].

A partir desses dados, é possível inferir, por meio de operações lógicas incluindo a relação de consequência, o intervalo de probabilidade π = [a , b] para um determinada sentença A' (algoritmo na subseção 3.2).

O problema a ser investigado consiste em analisar as mudanças nos intervalos π_i da base que seriam necessárias para acomodar uma alteração arbitrária no intervalo de probabilidade π de A', mantendo a base consistente.

As possíveis mudanças arbitrárias no intervalo são:

- i) Relaxamento:
  Se desejamos que o novo intervalo de probabilidade associado à sentença A', ao invés de π, seja π' = [a' , b'], onde a' $\leq$ a e b' $\geq$ b.
  A amplitude de novo intervalo π' é igual ou maior que do original, e além disso, contém π. É a mudança de crença consistente, e que não requer nenhuma mudança nos intervalos da base π_i, já que são trivialmente satisfeitos. Porém, o agente perde informação com essa alteração, pois a amplitude do intervalo é expandida, o intervalo perde precisão quanto ao seu verdadeiro valor.

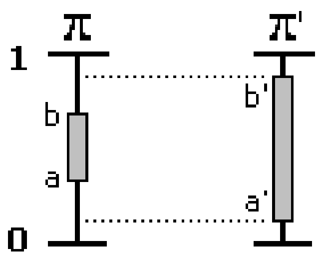

Figura 2.1: Relaxamento do intervalo de probabilidade π para π' associado à sentença A'

- ii) Refinamento:
  Se desejamos que o novo intervalo de probabilidade associado à sentença A' seja π' = [a' , b'], onde a' $\geq$ a e b' $\leq$ b.
  O novo intervalo π' está contido no intervalo original π, ou seja, a intenção é aumentar o grau de conhecimento que se tem em relação à probabilidade da sentença A' [Ver Figura 2.2]. Porém, o refinamento em seu intervalo provavelmente refletirá nos

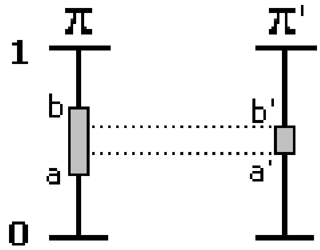

Figura 2.2: Refinamento do intervalo de probabilidade π para π' associado à sentença A'

intervalos das sentenças da base B_k.

- iii) Contradição probabilistica:
  Se desejamos que o novo intervalo de probabilidade associado à sentença A' seja π' = [a' , b'], onde a' $\geq$ b ou b' $\leq$ a; ou seja, a intersecção dos intervalos π e π' é vazio. A intenção é mudar totalmente a probabilidade da sentença A'.

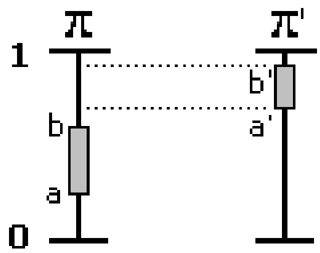

Figura 2.3: Contradição do intervalo de probabilidade π para π' associado à sentença A'

- iv) Contradição parcial (redimensionamento probabilístico com sobreposição):
  Se desejamos que o novo intervalo de probabilidade associado à sentença A' seja π' = [a' , b'], onde a' $\geq$ a e b' $\geq$ b ou a' $\leq$ a e b' $\leq$ b; ou seja, a intersecção dos intervalos π e π' não é vazio, e não coincide com nenhum dos dois intervalos.

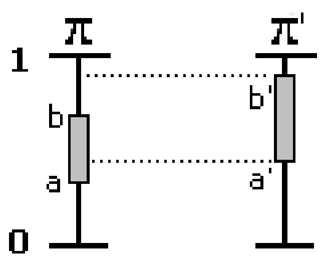

Figura 2.4: Contradição parcial do intervalo de probabilidade π para π' associado à sentença A'

2.4 Aplicações

Um exemplo de aplicação prática deste estudo é no controle de requisitos no processo de desenvolvimento de software.

Cada um destes requisitos deve ser representado por uma sentença proposicional, considerando eventuais dependências entre eles. Além disso, deve-se associar cada requisito com um intervalo de probabilidade, com o significado de que tal item da especificação necessita ser satisfeito em uma porcentagem contida nesse intervalo.

Considere um sistema de detecção de incêndio, e suponha a seguinte lista de requisitos:

1. Detecção correta de fumaça (evitando uma conclusão falso-positiva). [75% , 90%]
2. Acionamento de jatos de água. [70% , 80%]
3. Notificação à base de bombeiros mais próxima. [50% , 70%]
4. Acionamento de sinal sonoro, para alertar as pessoas. [40% , 60%]

Neste exemplo, podemos concluir que o item 1 representa um requisito relativamente importante ao sistema, pois seu intervalo concentra-se em valores de probabilidade mais altos.

Imagine que o cliente do sistema percebe que o acionamento do sinal sonoro é extremamente importante, e altera o intervalo de [40% , 60%] para [90% , 100%]. Eventualmente, essa mudança causa inconsistência na lista de requisitos, e necessita-se de uma correção no restante dos intervalos. Neste caso, se o intervalo do item 1 fosse expandido para [75% , 100%], a consistência da lista estaria reestabelecida, pois supõe-se que o acionamento do sinal sonoro ocorre somente se houver detecção de fumaça.

Adotando esta maneira de representação em casos mais gerais, e aplicando o método de revisão para modelos com probabilidades imprecisas, pode-se estimar o grau em que todos os itens de uma especificação serão afetados caso se queira alterar arbitrariamente o intervalo de um item.

Capítulo 3

Modelagem com Probabilidades Imprecisas

A subseção 3.1 faz a transposição de cada conceito da teoria para o contexto da modelagem com probabilidades imprecisas. A subseção 3.2 apresenta alguns algoritmos que manipulam intervalos de probabilidades, e que auxiliam no processo de revisão de crenças. A subseção 3.3 mostra o problema sob o ponto de vista da Programação Linear e explora o conceito de Satisfatibilidade Probabilística. Ao final, a subseção 3.4 sugere heurísticas para a revisão, dependendo do fator que se deseja priorizar.

3.1 A teoria neste contexto

Representação do estado de crença

Representam o possível estado cognitivo do agente num determinado instante no tempo.

Como descrito anteriormente, a representação usada é a de probabilidades imprecisas: cada crença é representada por uma sentença da lógica proposicional, e está associada a um intervalo de probabilidade, cujo significado é a de que o verdadeiro valor de probabilidade dessa sentença é um ponto contido neste intervalo.

É importante observar que neste tipo de representação não há o conceito de conjunto ou base de crenças de interesse, pois toda sentença tem um intervalo de probabilidade associado. Portanto, não faz sentido classificar uma crença como "dentro" ou "fora" do conjunto ou da base. Essa característica ocorre também na representação probabilística, pois cada sentença possui um valor de probabilidade associado.

Entretanto, assim como foi traçada uma relação entre o modelo probabilístico e a representação por conjunto de crenças, para facilitar a manipulação das crenças vamos considerar a existência de uma base de crenças e a restrição de que qualquer sentença com intervalo [0.0 , 1.0] é considerada "fora" desta base, já que o significado desse intervalo é que nada se sabe sobre a sentença.

Atitudes de crença

São as interpretações de cada crença no estado atual.

Assim como no modelo probabilístico, se o intervalo de probabilidade se encontra com valores maiores, significa que tal crença é mais provável nesse estado do que outra com intervalo de probabilidade concentrado em valores menores. Por exemplo, a sentença A tem intervalo [0.8 , 0.9] e a sentença B, [0.3 , 0.5]. Então diz-se que a crença representada por A é mais provável do que a crença B.

As interpretações aceita e rejeitada também têm sua correspondência neste contexto: se o intervalo da sentença A é [1.0 , 1.0], diz-se que a sentença A é aceita no estado. E, por sua vez, se o intervalo da sentença B é [0.0 , 0.0], a sentença B é rejeitada no estado.

Além disso, lidamos com uma informação a mais quando manipulamos probabilidades imprecisas, que por vezes é de interesse e relevância: a amplitude do intervalo, uma medida do grau de ignorância do agente sobre a probabilidade dessa crença. Dizemos que há maior precisão na sentença A do que na sentença B, quando a amplitude do intervalo de A é menor do que de B. Por exemplo: A tem intervalo [0.5 ; 0.6] (amplitude 0.1), e B tem intervalo [0.5 , 0.8] (amplitude 0.3). Além disso, se o intervalo associado à sentença A é [0.0 , 1.0], segue que o agente nada sabe sobre A; ao passo que, se o intervalo associado com a sentença B é [0.75 , 0.75], segue que a probabilidade de B é *exatamente* 75%.

Entradas

Alterações no estado de crença que causam mudanças.

No nosso contexto, a entrada consiste em uma alteração arbitrária no intervalo de probabilidade de alguma sentença. As possibilidades de entradas foram classificadas na seção 2.3 (relaxamento, refinamento, contradição probabilística e contradição parcial).

Mudanças

Como já foi dito anteriormente, vamos considerar toda mudança de crença nesse contexto como uma revisão: analisar os efeitos da alteração em um intervalo de probabilidade.

A expansão seria a alteração no intervalo de alguma sentença que mantém a base de consistente. Assim, a expansão é o caso trivial e não há nada a se fazer neste caso.

A contração corresponde a relaxação de um intervalo, onde perde-se informação sobre a sentença em questão.

Critérios de racionalidade

Formalizemos os postulados AGM para a teoria de revisão com probabilidades imprecisas.

A notação utilizada é:

- B_k é a base de crenças correspondente ao conjunto K;
- A' é a sentença a ser revisada;
- π é o intervalo corrente associado a sentença A';
- π' é o intervalo com o qual se deseja efetuar a revisão.

Lembremos que o conceito de base de crenças muda neste contexto. Portanto B_k representa as sentenças sobre as quais o agente tem alguma informação, isto é, seu intervalo é diferente de [0.0, 1.0].

Denotamos com parênteses `(sentença, intervalo)` para representar o par de sentença e seu intervalo associado. Então, $B_k * (A', \pi')$ é a notação para o conjunto resultante da revisão (probabilística) da base B_k com o a sentença A' e intervalo π'.

R*1: $B_k * (A', \pi')$ é base de crenças com cada sentença associada a um intervalo de probabilidade.
Garantia da manutenção do estado resultante.

R*2: $(A', \pi') \in B_k$
Garantia do sucesso da revisão: a sentença revisada está associada ao intervalo desejado.

R*3: $B_k * (A', \pi') \subseteq B_k + (A', \pi')$
Considerando o operador de subconjunto restrito às sentenças, ignorando a probabilidades associadas, este postulado garante que nenhuma informação além das consequências de A' são incluídas no estado resultante. Entretanto, dependendo da estratégia adotada para o processo de revisão, pode-se "violar" este postulado, sem que o conceito de Mudanças Mínimas seja violado.

R*4: Se $(B_k - (A', \pi)) + (A', \pi') \nvdash \perp$ então $B_k + (A', \pi') \subseteq B_k * (A', \pi')$
Se o novo intervalo é consistente, a expansão está contida na revisão. Assim, junto com o postulado anterior, a revisão é igual à expansão.

Caso degenerado: Se $\pi' = \pi$ então $B_k * (A', \pi') = B_k$
Se o intervalo desejado é o mesmo que o intervalo atual, não há nada a fazer.

R*5: $B_k * (A', \pi')$ é inconsistente se e somente se $\vdash \neg A'$
Como no caso da revisão não-probabilística, o estado resultante é inconsistente se a sentença for inconsistente.

R*6: Se $\vdash A' \leftrightarrow B'$ então $P(A') = P(B')$ [1]. Logo, se $\vdash A' \leftrightarrow B'$ então $B_k * (A', \pi') = B_k * (B', \pi')$
Sentenças logicamente equivalentes têm valores de probabilidades iguais, e portanto, as revisões por A' e por B' com o intervalo π' resultam no mesmo conjunto revisado.

Em estados modelados com probabilidades imprecisas tem-se maior flexibilidade em relação ao Princípio de Mudanças Mínimas. Mas, afinal, o que são as mudanças mínimas neste contexto? A resposta vai depender do conceito que se deseja priorizar nos estados resultantes do processo de revisão.

Portanto, o Princípio de Mudanças Mínimas não é fixo neste contexto. Alguns exemplos de métricas:

- *a quantidade de sentenças cujos intervalos são alterados.* Assim, ao buscar a consistência da base, deve-se alterar o menor número de intervalos possível;
- *a soma das amplitudes dos intervalos.* Neste caso, a prioridade é a precisão da base. Então deve-se deixar os intervalos tão pequenos quanto possível;
- *a soma das dilatações ou retrações dos intervalos.* Ou seja, manter os intervalos mais parecidos com os do estado inicial quanto possível.

Na subseção 3.3 definimos e exploramos com mais detalhes algumas dessas métricas. E na subseção 3.4, a maneira com que essas métricas são favorecidas por alguns tipos de estratégias.

[1] Se $\vdash A \rightarrow B$ então $P(A) \leq P(B)$ [6]

3.2 Algoritmo para determinar intervalo de probabilidade

Antes da Revisão de Crenças propriamente dita, é necessário construir algumas ferramentas para auxiliar neste processo. Nesta seção, apresentamos algumas dessas ferramentas: algoritmos que manipulam crenças associadas a intervalos de probabilidade.

O algoritmo DETERMINA-INTERVALO apresenta o intervalo de probabilidade que uma sentença tem conforme informações contidas em uma base de crenças consistente.

É o primeiro passo para a Revisão de Crença, pois, analisando o intervalo apresentado pelo algoritmo, podemos determinar as alterações necessárias nas probabilidades da base para alcançar o objetivo: obter um intervalo arbitrário.

No decorrer do algoritmo existe o conceito *ponto viável*. *Ponto* é um valor de probabilidade, ou seja, um valor contido no intervalo [0.0 , 1.0]. Diz-se que o ponto é *viável* se, associado a alguma sentença, não torna uma base de crenças inconsistente quando incorporado a ela.

Entrada:

- Uma base de crenças B_k, finita e consistente, que corresponde a um conjunto de crenças K, e cada sentença da base possui um intervalo de probabilidades associado (lembremos que as sentenças não pertencentes a B_k estão associadas ao intervalo [0.0 , 1.0]);
- Uma sentença A' com probabilidade imprecisa desconhecida;
- Um valor M, que representa a precisão desejada para o intervalo.

Saída:

- Um intervalo de probabilidade que contém os pontos viáveis associados à sentença A'. Ou seja, um intervalo que mantém a base B_k consistente.

Hipótese:

- Supomos a existência do algoritmo P-SAT para verificar a satisfatibilidade de um conjunto de sentenças e suas respectivas probabilidades imprecisas, ou seja, verificar se o conjunto é consistente. Mais tecnicamente, o P-SAT verifica se existe uma distribuição de probabilidade sobre as sentenças do conjunto de entrada tal que os valores de tal distribuição estão corretamente estimados pelos intervalos associados às sentenças [2].

[2] O conceito de satisfatibilidade probabilística de um conjunto é explorado com mais detalhes na subseção 3.3.

A ideia deste algoritmo está dividida em dois passos básicos: achar um *ponto viável* para A' e aplicar a *expansão* superior e inferior nesse ponto o máximo possível, obtendo de fato, um intervalo.

O ponto viável é determinado da seguinte maneira: testa-se as extremidades 0.0 e 1.0. Caso nenhuma delas seja viável, busca-se um ponto viável dividindo cada intervalo na metade, como numa busca binária, até que o grau de aproximação do ponto analisado seja considerado pequeno demais - atributo armazenado no parâmetro M.

A expansão consiste em determinar os pontos extremos do intervalo que contém o ponto viável. Essa procura pela fronteira do viável e do inviável também é feita como uma espécie de busca binária, cuja condição de parada é o grau de precisão que se deseja ter. Assim, o algoritmo determina a melhor aproximação do intervalo possível até a interrupção. Nas próximas subseções há uma explicação mais detalhada sobre esses passos.

DETERMINA-INTERVALO (B_k, A', M)

$(pontoViavel, inviavelInf, inviavelSup) \leftarrow$ ACHA-PONTO-VIAVEL (B_k, A', M)

se $pontoViavel == falso$

    então devolva "O grau de aproximação M foi insuficiente para obter um ponto viável."

$pontoSup \leftarrow$ EXPANSÃO-SUPERIOR $(B_k, A', pontoViavel, inviavelSup, M)$

$pontoInf \leftarrow$ EXPANSÃO-INFERIOR $(B_k, A', pontoViavel, inviavelInf, M)$

$intervalo \leftarrow (pontoInf, pontoSup)$

devolva *intervalo*

3.2.1 Acha Ponto Viável

Entrada:

- Uma base de crenças B_k, finita e consistente, que corresponde a um conjunto de crenças K, e cada sentença da base possui um intervalo de probabilidades associado;
- Uma sentença A';
- Um valor M, que representa a precisão desejada para o intervalo.

Saída:

- Um ponto entre 0.0 e 1.0, que associado à sentença A' e em conjunto com a base B_k é considerado satisfatível pelo algoritmo P-SAT, ou seja, existe pelo menos uma distribuição de probabilidade sobre as sentenças da base, e os valores de tal distribuição estão corretamente estimados pelos intervalos associados às sentenças;

- Dois pontos ao redor do ponto viável que, associados à sentença A', são inviáveis. Tais pontos otimizam a execução dos algoritmos EXPANSÃO-INFERIOR e EXPANSÃO-SUPERIOR.

Hipótese:

- Supomos que sempre existe um ponto viável ao longo do intervalo de probabilidade. Isto, de fato, é verdade, porém não descrevemos esta demonstração aqui.

ACHA-PONTO-VIÁVEL (B_k, A', M)

1 **se** P-SAT $(B_k \cup (A', [0.0; 0.0])\ ) == satisfativel$
2   **então devolva** $(0.0, null, null)$
3 **se** P-SAT $(B_k \cup (A', [1.0; 1.0])\ ) == satisfativel$
4   **então devolva** $(1.0, null, null)$
5 FILAINICIALIZA ( )
6 $inicio \leftarrow 0.0$
7 $meio \leftarrow 0.5$
8 $fim \leftarrow 1.0$
9 FILAINSERE $([meio; inicio; fim])$
10 **enquanto** (CASAS-DECIMAIS $(meio) < M$) $\triangleright$ M é o grau de aproximação
11   **faça** $(meio, inicio, fim) \leftarrow$ FILAREMOVE ()
12   **se** P-SAT $(B_k \cup (A', [meio; meio])) == satisfativel$
13   **então devolva** $(meio, inicio, fim)$
14   FILAINSERE $([(inicio + meio)/2; inicio; meio])$
15   FILAINSERE $([(meio + fim)/2; meio; fim])$
16 **devolva** $falso$

Como foi dito anteriormente, o P-SAT recebe um conjunto de sentenças e suas respectivas probabilidades imprecisas e verifica satisfatibilidade. Por vezes, utilizamo-nos da notação nas linhas 1, 3 e 12 do algoritmo anterior. Esta notação, da linha 1 por exemplo, representa uma chamada do algortimo P-SAT cujo parâmetro de entrada é o conjunto de sentenças e probabilidades imprecisas da base B_k incorporado com a sentença A' associada ao intervalo pontual [1.0 , 1.0].

O algoritmo percorre numa busca em largura uma árvore cujos nós representam probabilidades, até que um ponto viável seja encontrado. A Figura 3.1 mostra esta árvore. A ordem dos nós visitados, depois de 0.0 e 1.0, é: 0.5, 0.25, 0.75, 0.125, 0.375, 0.625, 0.875...

No algoritmo de busca em largura geral, o laço na linha 10 é interrompido quando a fila fica vazia (ou seja, quando já se visitou todos os nós dessa árvore). Porém, é fácil notar que a árvore de probabilidades é infinita. Além disso, o nível de um nó é diretamente proporcional ao número de casas decimais da probabilidade (em cada nível mais baixo divide-se a amplitude de um intervalo de probabilidade pela metade). Por isso, a condição

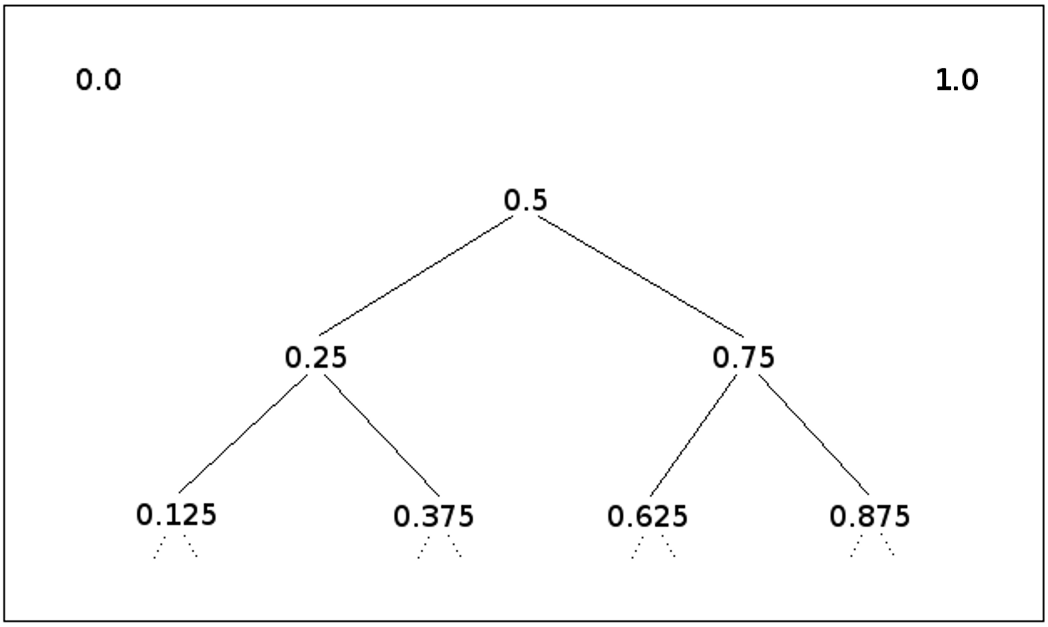

Figura 3.1: Árvore de probabilidades

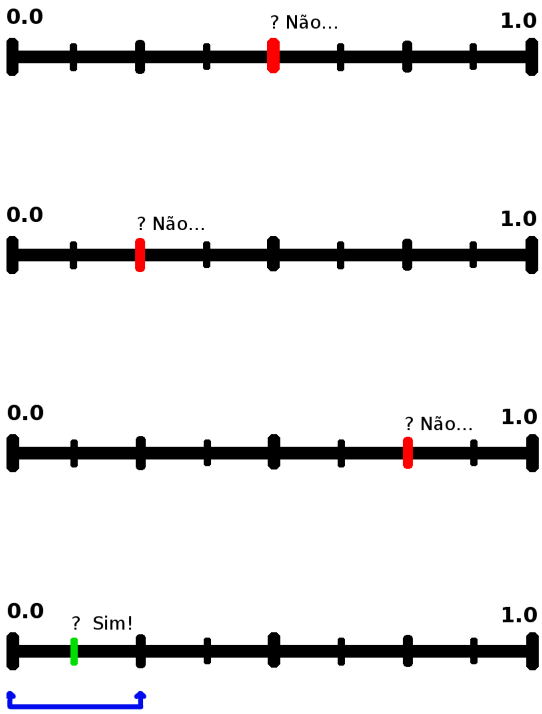

Figura 3.2: Busca de um ponto viável. O trecho marcado de azul é mostrado com detalhes na figura 3.3, para efetuar a expansão.

de parada do laço depende da precisão que se deseja obter.

A Figura 3.2 mostra os passos do algoritmo, que testa pontos ao longo do intervalo de probabilidade [0.0, 1.0] percorrendo a árvore.

3.2.2 Expansão Superior

Entrada:

- Uma base de crenças B_k, finita e consistente, que corresponde a um conjunto de crenças K, e cada sentença da base possui um intervalo de probabilidades associado;
- Uma sentença A';
- Um ponto $pontoViavel$ entre 0.0 e 1.0, que está associado à sentença A';
- Um ponto $invSup$ inviável e com valor maior do que $pontoViavel$;
- Um valor M, que representa a precisão desejada para o intervalo.

Saída:

- Um ponto entre 0.0 e 1.0, que corresponde à extremidade superior do intervalo de probabilidades associado à sentença A'.

```
Expansão-Superior (B_k, A', pontoViavel, inviavelSup, M)
pontoSup ← pontoViavel
se inviavelSup == null
   então pontoTeste ← 1.0
senão pontoTeste ← inviavelSup
pontoAnt ← pontoTeste
enquanto Casas-decimais (pontoSup) < M or pontoSup == 1.0
    faça se P-Sat(B_k ∪ (A', [pontoTeste; pontoTeste])) != satisfativel
           então pontoAnt ← pontoTeste
                 pontoTeste ← (pontoTeste + pontoSup)/2
           senão pontoSup ← pontoTeste
                 pontoTeste ← pontoAnt
devolva pontoSup
```

3.2.3 Expansão Inferior

Entrada:

- Uma base de crenças B_k, finita e consistente, que corresponde a um conjunto de crenças K, e cada sentença da base possui um intervalo de probabilidades associado;
- Uma sentença A';
- Um ponto $pontoViavel$ entre 0.0 e 1.0, que está associado à sentença A';
- Um ponto $invInf$ inviável e com valor menor do que $pontoViavel$;
- Um valor M, que representa a precisão desejada para o intervalo.

Saída:

- Um ponto entre 0.0 e 1.0, que corresponde ao ponto inferior do intervalo de probabilidades associado à sentença A'.

```
EXPANSÃO-INFERIOR (Bk, A', pontoViavel, inviavelInf)
pontoInf ← pontoViavel
se inviavelInf == null
    então pontoTeste ← 0.0
senão  pontoTeste ← inviavelInf
pontoAnt ← pontoTeste
enquanto CASAS-DECIMAIS (pontoInf) < M or pontoInf == 0.0
    faça se P-SAT (Bk ∪ (A', [pontoTeste; pontoTeste])) != satisfativel
            então pontoAnt ← pontoTeste
                  pontoTeste ← (pontoTeste + pontoInf)/2
            senão pontoInf ← pontoTeste
                  pontoTeste ← pontoAnt
devolva pontoInf
```

A Figura 3.3 mostra o processo de expansão de um ponto viável: testa-se pontos como no algoritmo ACHA-PONTO-VIÁVEL. O algoritmo recebe o ponto viável p (verde na figura) que foi determinado anteriormente. Se o ponto que está sendo testado (azul) é viável, o algoritmo testa o próximo ponto do lado oposto à p. Se não é viável, testa-se o próximo ponto na direção de p.

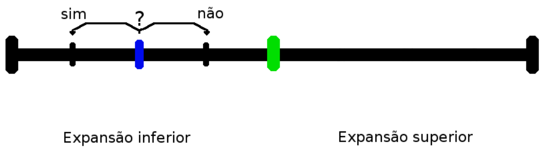

Figura 3.3: Expansão inferior de um ponto viável. A expansão superior é análoga.

3.3 Satisfatibilidade e Problema de Programação Linear

Hansen e Jaumard, no artigo intitulado *Probabilistic Satisfiability* [5], apresentam o problema da revisão de conjuntos (ou bases) de crenças sob um ponto de vista diferente: um problema de programação linear.

A descrição do problema de revisão de crença essencialmente é a mesma: tornar consistente uma base de crença na qual foi adicionada uma sentença com uma probabilidade imprecisa arbitrária.

Antes disso, vamos definir aqui o conceito de **satisfatibilidade probabilística**:

O problema de satisfatibilidade probabilística na forma de decisão (problemas cuja solução é SIM ou NÃO) é definida da seguinte maneira: Considere m sentenças lógicas, A_1, A_2, ..., A_m definidas sobre n variáveis (átomos da lógica proposicional) com os operadores lógicos usuais. Considere as probabilidades π_1, π_2, ..., π_m para essas sentenças serem verdadeiras. Esse conjunto de pares sentença-probabilidade é consistente?

Existem 2^n valorações w_j sobre as n variáveis. Para cada valoração, cada sentença A_i é verdadeira ou falsa. O **problema de satisfatibilidade probabilística** pode então ser reformulado: existe uma distribuição de probabilidade p_1, p_2, ..., p_{2^n} sobre o conjunto de valorações tal que a soma das probabilidades das valorações em que a sentença A_i é verdadeira é igual a sua probabilidade π_i, para i = 1, 2, ..., m? Definimos a matriz $m \times 2^n$ $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } A_i \text{ é verdadeira com a valoração } w_j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, a forma de decisão do problema é escrita:

$$Ap = \pi \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{2^n} p_i = 1 \tag{3.2}$$

$$p_i \geq 0 \quad para\ i = 1, ..., 2^n \tag{3.3}$$

onde p e π são vetores-colunas (p_1, p_2, ..., p_{2^n}) e (π_1, π_2, ..., π_m) respectivamente. A igualdade (2) e a desigualdade (3) são justificadas pelo fato de p ser uma distribuição de probabilidade: todos os valores devem ser não-negativos e devem somar 1. A igualdade (1) garante a soma descrita anteriormente.

Note que o vetor π contém probabilidades pontuais. Para o nosso estudo, seria necessário substituí-lo por um vetor de probabilidades imprecisas. E o problema passa a ser escrito da seguinte maneira:

$$\underline{\pi} \leq Ap \leq \overline{\pi}$$
$$\sum_{i=1}^{2^n} p_i = 1$$
$$p_i \geq 0 \quad para\ i = 1, ..., 2^n$$

onde, $\underline{\pi}_i$ é o valor da extremidade inferior do intervalo associado a sentença A_i, e $\overline{\pi}_i$ é o valor da extremidade superior. O significado é de que o vetor p é uma distribuição de probabilidade tal que cada valor p_i está contido no intervalo $[\underline{\pi}_i\ ;\ \overline{\pi}_i]$ associado à sentença A_i e, portanto o conjunto é probabilisticamente satisfatível.

Com essa perspectiva definiu-se duas abordagens diferentes para restaurar a satisfatibilidade: manipulando as probabilidades das sentenças da base; ou removendo sentenças de maneira arbitrária. Essas duas soluções são descritas nas subseções que se seguem.

3.3.1 Manipulação de intervalos das sentenças

Lembremos que os postulados AGM garantem três importantes fatos, que modelados no contexto das probabilidades imprecisas apresentam-se da seguinte maneira:

- a manutenção da natureza do estado resultante: o conjunto final deve continuar com as propriedades de uma base de crenças;
- o sucesso da revisão: a base resultante deve conter a sentença a ser adicionada, associada corretamente ao intervalo de probabilidade que se deseja;
- mudanças mínimas: abandonar a menor quantidade de informação possível.

O último item não é trivial e, para esta abordagem, Hansen e Jaumard o definem como "Extensão minimal dos intervalos de probabilidade", ou seja, durante o processo de revisão o objetivo é minimizar a soma das dilatações dos intervalos de probabilidade necessárias para restaurar a consistência da base.

O problema de programação linear correspondente é:

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{m} |l_i| + \sum_{i=1}^{m} |u_i| \\
s.a. \quad & \underline{\pi} + l \leq Ap \leq \overline{\pi} + u \\
& \sum_{i=1}^{2^n} p_i = 1 \\
& p_i \geq 0 \quad para\ i = 1, ..., 2^n
\end{aligned}
$$

onde os vetores l e u armazenam a chamada "extensão" (dilatação ou retração) dos intervalos, isto é, a amplitude da mudança inferior e superior (respectivamente) de cada intervalo de probabilidade. Assim, a probabilidade imprecisa da sentença A_i passa de $[\underline{\pi}_i\ ;\ \overline{\pi}_i]$ para $[\underline{\pi}_i + l_i\ ;\ \overline{\pi}_i + u_i]$

Uma outra opção é manter como objetivo a minimização da soma das amplitudes dos intervalos, isto é, obter na base resultante os menores intervalos possíveis para cada sentença. Esta restrição equivale a maximizar a precisão, a certeza em relação a probabilidade de cada crença.

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{m} (\overline{\pi}_i + u_i) - (\underline{\pi}_i + l_i) \\
s.a. \quad & \underline{\pi} + l \leq Ap \leq \overline{\pi} + u \\
& \sum_{i=1}^{2^n} p_i = 1 \\
& p_i \geq 0 \quad para\ i = 1, ..., 2^n
\end{aligned}
$$

Abaixo, um possível algoritmo para uma abordagem de manipulação dos intervalos:
Entrada:

- Uma base de crenças consistente B_k;
- Uma sentença A';
- Um intervalo de probabilidade P' arbitrário, que deseja-se associar a sentença A'.

Saída:

- A base B_k modificada de forma que contenha consistentemente a sentenca A' associada ao intervalo P'.

Hipótese:

- Supõe que a sentença A' associada ao intervalo P' torna a base B_k inconsistente.

MANIPULACAO-INTERVALOS(B_k, A', P')

```
1  Crie uma base C_k
2  C_k ← (A', P')
3  enquanto B_k != ∅
4      faça Escolha uma sentença A_i ∈ B_k
5          B_k ← B_k − {(A_i, P_i)}          ▷ Remove A_i de B_k
6          se P-SAT(C_k ∪ (A_i, P_i)) != satisfativel
7             então P_i ← DETERMINA-INTERVALO(C_k, A_i, precisao)
8          C_k ← C_k ∪ {(A_i, P_i)}
9  devolva C_k
```

O algoritmo cria uma base consistente incrementalmente, a partir das sentenças em B_k. Eventualmente, a sentença a ser adicionada torna a nova base inconsistente. Nestes casos, o algoritmo reajusta essa sentença, e o fato de que C_k é satisfatível durante toda a execução do algoritmo é um invariante.

Entretanto, este algoritmo não satisfaz qualquer das funções-objetivo dos problemas de programação linear acima. Para isto, é necessário acrescentar restrições dentro do **se** na linha 6. Além disso, a garantia das funções-objetivo também depende da ordem com que as sentenças são escolhidas em B_k, na linha 4.

3.3.2 Remoção de sentenças

Nesta segunda abordagem, para garantir mudanças mínimas assumimos como restrição a minimização da cardinalidade do subconjunto de sentenças que será removido da base (sentenças que terão seus intervalos modificados para [0.0 , 1.0]). O problema é escrito da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ll}
min & \sum_{i=1}^{m} y_i \\
s.a. & \underline{\pi} - ly \leq Ap \leq \overline{\pi} + uy \\
 & \sum_{i=1}^{2^n} p_i = 1 \\
 & l_i = 0 \leq \underline{\pi}_i y_i \quad para\ i = 1, ..., m \\
 & u_i = 0 \leq (1 - \overline{\pi}_i) y_i \quad para\ i = 1, ..., m \\
 & p_i, l_j, u_j \geq 0 \quad para\ i = 1, ..., 2^n\ e\ j = 1, ..., m \\
 & y \in \{0, 1\}^m
\end{array}
$$

onde y_i vale 1 se a sentença A_i é removida da base, e 0 caso contrário, para i = 1, 2, ...,

m. Os vetores l e u controlam a extensão no intervalo de probabilidade: ou o intervalo $[\underline{\pi_i}, \overline{\pi_i}]$ é extendido para [0.0 ; 1.0], o que equivale a retirar a sentença A_i; ou $l_i = 0$ e $u_i = 0$ e o intervalo de probabilidade se mantém $[\underline{\pi_i}, \overline{\pi_i}]$.

O algoritmo apresentado abaixo é apenas uma implementação bastante primitiva dessa estratégia.

Entrada:

- Uma base de crenças consistente B_k;
- Uma sentença A';
- Um intervalo de probabilidade P' arbitrário, que deseja-se associar a sentença A'.

Saída:

- A base B_k modificada de forma que contenha consistentemente a sentenca A' associada ao intervalo P'.

Hipótese:

- Supõe que a sentença A' associada ao intervalo P' torna a base B_k inconsistente.

Remocao-Sentencas(B_k, A', P')

1 $B_k \leftarrow B_k \cup (A', P')$ $\quad \triangleright$ Adiciona (A', P') a B_k

2 **enquanto** P-Sat$(B_k)! = satisfativel$

3 **faça** Escolha uma sentença A_i $!= A'$

4 $B_k \leftarrow B_k - \{(A_i, P_i)\}$ $\quad \triangleright$ Remove A_i de B_k

5 **devolva** B_k

De fato, o algoritmo devolve uma base de crença consistente e que contém a sentença A' com a probabilidade P' arbitrariamente escolhida (a satisfatibilidade é o invariante na linha 2). Porém não garante que a mudança seja mínima (ver subseção 3.4).

Uma terceira opção de abordagem para solucionar a revisão é uma combinação das duas: aplica-se a remoção de sentenças e, na base resultante, insere-se novamente as sentenças que foram excluídas, calculando o intervalo de probabilidade de cada uma nessa nova base, com o algoritmo Determina-Intervalo descrito acima. Então tudo se passa como se a probabilidade de algumas sentenças fossem reajustadas. Porém, esta terceira alternativa é vaga quanto aos seus efeitos sobre algum critério de Mudanças Mínimas.

3.4 Estratégias para a revisão de crenças

Com as subseções anteriores, percebe-se que é necessário o uso de alguma heurística para priorizar determinada propriedade desejada à base. Abaixo descrevemos duas ideias para a estratégia de remoção de sentenças (e suas possíveis variações) e outras duas para a "inclusão" de sentenças.

(a) Ordem crescente

Ordenar as sentenças conforme a amplitude do intervalo de probabilidade associado. E percorrer as sentenças em ordem crescente. A intuição para este caso é de que sentenças com intervalos de probabilidades estreitos representam restrições mais fortes para a base como um todo. Assim, a cada passo o método remove a sentença com restrição mais forte da base e, consequentemente, diminui-se o número de passos necessários para que a base alcance a consistência.

Nesta estratégia, o princípio de mudanças mínimas é intuitivamente definido como remover o menor número de sentenças. Porém, esta heurística não é suficiente para garantir mudanças mínimas. Considere o exemplo de sentenças ordenadas pela amplitude dos seus intervalos:

- I) A cotação do dólar de hoje é R$ 1.72 [90%, 95%]
- II) Chove em todos os dias do verão [10%, 20%]
- III) Hoje é dia 4 de janeiro [50%, 70%]
- IV) Amanhã é dia 5 de janeiro [30%, 60%]
- V) Grêmio vai ganhar o Campeonato Brasileiro em 2013 [0%, 100%]

Suponha que se queira alterar o intervalo da quarta sentença para [100%, 100%]. Isso contradiz o intervalo da terceira sentença, já que, se amanhã é dia 5 com probabilidade de 100%, hoje com certeza é dia 4.

Seguindo essa heurística para ordenação, o algoritmo remove as 2 primeiras sentenças e, ao remover a (III), a consistência do conjunto é restaurada. Entretanto, isso representa perda desnecessária de informação, pois as 2 primeiras sentenças não contradizem a alteração desejada.

Além disso, esta heurística diminui a certeza em relação ao valor da probabilidade das sentenças, já que são removidas as sentenças com maior precisão.

Segue o pseudocódigo dessa heurística:

REMOCAO-SENTENCAS-CRESCENTE (B_k, A', P')

1 Ordene as sentenças de B_k por ordem crescente de amplitude de intervalo.
2 $B_k \leftarrow B_k \cup (A', P')$ $\triangleright$ Adiciona (A', P') a B_k
3 **enquanto** P-SAT(B_k) $!= satisfativel$
4 **faça** Tome a sentença A_i com menor amplitude de intervalo P_i tal que A_i $!= A'$
5 $B_k \leftarrow B_k - (A_i, P_i)$
6 **devolva** B_k

(b) Ordem decrescente

Ordenar as sentenças conforme a amplitude do intervalo de probabilidade associado. E percorrer as sentenças em ordem decrescente. Assim, as sentenças removidas serão aquelas com intervalos maiores.

Segue o pseudocódigo:

REMOCAO-SENTENCAS-DECRESCENTE (B_k, A', P')

1 Ordene as sentenças de B_k por ordem decrescente de amplitude de intervalo.
2 Adicione (A', P') a base B_k
3 **enquanto** P-SAT(B_k) $!= satisfativel$
4 **faça** Tome a sentença A_i com maior amplitude de intervalo P_i tal que A_i $!= A'$
5 $B_k \leftarrow B_k - (A_i, P_i)$
6 **devolva** B_k

Essa heurística para percorrer as sentenças não garante que a quantidade de sentenças removidas seja a menor possível. Ocorre um problema semelhante ao descrito no exemplo anterior. Porém faz com que os intervalos se tornem mais precisos, ou seja, maximiza a certeza em relação à base resultante.

(c) Variação da remoção de sentenças

Uma variação interessante da estratégia de remoção de sentenças, é modificar a linha 5 do algoritmo (tanto com a heurística de ordem crescente quanto decrescente) de modo que, em vez de remover a sentença (A_i, P_i), modificar o intervalo P_i com o algoritmo DETERMINA-INTERVALO. Dessa forma, evitamos perder informações sobre a sentença A_i. No pior caso, DETERMINA-INTERVALO devolve o intervalo $[0.0, 1.0]$, como se a crença fosse removida.

(d) Revisão incremental

Outra estratégia estudada é a revisão incremental, que consiste em começar uma nova base com apenas a sentença e o intervalo desejado (A', P'), e percorrer o restante das sentenças incluindo aquelas que mantém B_k consistente.

Segue o pseudocódigo:

REVISAO-INCREMENTAL(B_k, A', P')

1 Crie uma base C_k
2 $C_k \leftarrow (A', P')$
3 **enquanto** B_k != $\emptyset$
4   **faça** Escolha uma sentença $A_i \in B_k$
5   **se** P-SAT$(C_k \cup (A_i, P_i)) == satisfativel$
6   **então** $C_k \leftarrow C_k \cup (A_i, P_i)$
7 **devolva** C_k

(e) Revisão por manipulação incremental

Como a estratégia anterior, inicializa-se uma nova base com apenas a sentença e o intervalo desejado (A', P'). Ao percorrer o restante das sentenças, inclui-se aquelas que mantém a base consistente e manipula-se o intervalo das outras (através do algoritmo DETERMINA-INTERVALO).

O pseudocódigo dessa estretégia está descrito na seção 3.3.1.

Assim como na estratégia de remoção, a garantia do Princípio de Mudanças Mínimas da estratégia Incremental depende fundamentalmente da ordem na escolha das sentenças A_i em B_k, linha 4.

Capítulo 4

Conclusão

A teoria de Revisão de Crenças tem grande importância para a sub-área da Inteligência Artificial baseada em conjuntos de conhecimento dinâmicos. Os fundamentos dessa teoria são encontrados principalmente nos renomados trabalhos de Alchourrón, Gardenfors e Makison. A contribuição de maior destaque desses autores foi a definição dos Postulados AGM, que descrevem propriedades que as operações de expansão, revisão e contração devem satisfazer. A teoria AGM para o problema de revisão de crença foi estudada com profundidade neste trabalho.

Com base teórica, propomos formalmente uma nova perspectiva para o problema, representando o estado de crença associando cada sentença a um intervalo de probabilidade. Apesar de este modelo probabilístico já ter sido proposto, a abordagem com intervalos não possui estudos na literatura atualmente. Esta abordagem é citada em algumas publicações (como em [4] e [5]), mas em nenhuma delas este modelo é explorado.

Após descrever a proposta, foi necessário formalizar a teoria nesse novo contexto. Para cada conceito e propriedade da teoria original definimos uma correspondência em uma nova teoria. A formalização dos conceitos da teoria de revisão de crenças com probabilidades imprecisas, especialmente a formalização dos postulados AGM, foi fundamental para este trabalho, assim como para trabalhos futuros.

Além disso, exploramos o conceito de consistência sob o ponto de vista da programação linear. Este conceito é central para a nova teoria, afinal, antes de tentar restaurar consistência de um conjunto é necessário identificar uma inconsistência. Decidir se um conjunto de crenças com probabilidades imprecisas é consistente corresponde ao problema de decisão de satisfatibilidade probabilística.

A partir dos conceitos do problema formalizados, assim como a definição de satisfatibilidade, começamos a estudar estratégias para a busca da solução da revisão. Para cada estratégia, percebemos a necessidade de modelar heurísticas (ou alguma ordenação) para favorecer ao máximo propriedades que desejamos priorizar no conjunto de conhecimento.

Ainda que a operação de revisão não tenha se tornado precisamente definida, percebeu-se a necessidade e direcionou-se o caminho para aprofundar os estudos em heurísticas e alcançar uma caracterização para a revisão, baseando-se nos postulados formalizados, nos algoritmos de satisfatibilidade probabilística (P-Sat) e de manipulação de probabilidades imprecisas.

Portanto, ao final deste trabalho nos deparamos com uma sugestão de passos futuros: exploração de diferentes tipos de heurísticas, busca por um critério de ordenação ideal para as sentenças, possibilidade de estender os postulados da teoria com probabilidades imprecisas, a fim de caracterizar o problema e possibilitando a definição precisa de sua solução.

Bibliografia

[1] Alchourrón, Carlos E.; Gardenfors, Peter; Makison, David. *On the logic of theory change: Partial meet contraction and revision functions.* Journal of Symbolic Logic, 510-530. 1985.

[2] Chan, H.; Darwiche, A. *On the revision of probabilistic beliefs using uncertain evidence.* Artificial Intellingence. Postprint, 2005.

[3] Finger, Marcelo; Wasserman, Renata. *Revising Specifications with CTL Properties using Bounded Model Checking.* Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo.

[4] Gärdenfors, Peter. *Knowledge in Flux: Modeling the Dynamics of Epistemic States.* MIT – Massachusetts Institute of Technology, 1988.

[5] Hansen, Pierre; Jaumard, Brigitte. *Probabilistic Satisfiability.* Montreal, Canada, 1996.

[6] Kolmogorov, Andrei N. *Foundations of the theory of probability* Editora Chelsea Pu. Co. Universidade de Michigan, 1956.

[7] Sousa, Thiago Carvalho de. *Revisão de modelos formais de sistemas de estados finitos.* Dissertação de mestrado. Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo, 2007.

[8] Wasserman, Renata. *Resource-bounded Belief Revision.* Dissertação de doutorado. University of Amsterdam, 1999.

Parte II

Capítulo 5

Parte Subjetiva

5.1 Experiência e aprendizado

No terceiro ano de graduação procurei o professor Marcelo Finger, interessada em fazer uma iniciação científica na área de lógica, pois eu havia gostado desse assunto, abordado em Métodos Formais.

A proposta inicial da iniciação científca era um trabalho sobre geração automática de testes baseada em modelos UML[1]. O objetivo principal era tornar a atividade de testes mais efetiva e minimizar os esforços dessa atividade em termos de custo e tempo. A proposta foi formalizada e eu estudei diversos tópicos sobre os conceitos de UML, a Fase de Testes do processo de desenvolvimento de *software* e *model-based testing* (testes baseados em modelos).

Entretanto, durante este levantamento bibliográfico, o professor Marcelo me propôs mudar de projeto, passando a estudar sobre Revisão de Crença e Satisfatibilidade Probabilística. Gostei mais ainda desse novo tema.

Fazer iniciação científica é uma experiência extremamente positiva durante a graduação, permitindo-nos conhecer os mecanismos de uma pesquisa acadêmica, além de todo o aprendizado que se adquire ao se trabalhar com pessoas com grande experiência na área. Os temas de projetos de iniciação geralmente não são vistos com muita profundidade em aulas, e assim temos a oportunidade de estudá-los de maneira mais detalhada, e até a oportunidade de produzir algo novo para a área.

Na medida do possível, o professor Marcelo reunia quinzenalmente seus orientandos, com o propósito de entrarmos em contato com o trabalho de outras pessoas, ainda que os temas não fossem completamente relacionados. Além de conhecermos o andamento do trabalho, compartilhávamos dificuldades, sugestões. Eram encontros bem interessantes.

[1] *Unified Modeling Language* criada pela OMG - Object Management Group

5.2 Desafios e frustrações

Os primeiros grandes desafios que encontrei na iniciação científica foi o entendimento da teoria original de Revisão de Crenças e também da proposta do novo modelo para o problema, porque é um assunto extremamente teórico e abstrato, com uma perspectiva que eu não conhecia. Além disso, como o problema a estudar é novo, me deparei com a falta de referências que explorassem mais detalhadamente o assunto.

Essas dificuldades foram solucionadas através da disponibilidade e paciência do professor Marcelo para tirar minhas dúvidas e didática de explicar o assunto sob diferentes formas.

O desafio que sempre esteve presente durante o trabalho, com maior ou menor intensidade, foi o de gerenciar o tempo entre as disciplinas que eu estava cursando e o trabalho da iniciação. Além disso, no segundo semestre do quarto ano eu comecei um estágio, o que diminuiu significativamente o tempo disponível. No entanto, acho que consegui lidar bem com todas as atividades, já que alcançamos com sucesso a conclusão desse trabalho.

No início da proposta, estávamos esperançosos em conseguir precisão na busca pela solução do problema, no seguinte sentido: definir características ou propriedades que a entrada deve ter para que a solução seja determinada, ou pelo menos uma heurística ou ordenação bem definida. Em outras palavras, encontrar padrões entre entrada do problema e solução. Esta pode ser considerada uma frustração decorrente do trabalho. Entretanto, sabíamos que este seria um resultado diretamente proporcional à sua importância, ou seja, bastante difícil.

Apesar desses obstáculos, que no meu ponto de vista foram poucos, eu fiquei muito satisfeita com o trabalho, que tem a originalidade de lidar com a mistura entre Revisão de Crenças e Probabilidades Imprecisas, implicando no estudo de Satisfatibilidade Probabilística. O resultado final foi bastante positivo: obtivemos a formalização de uma teoria completa e relativamente robusta; e que deixa um legado importante para possíveis trabalhos futuros.

5.3 Disciplinas e aplicações dos seus conceitos

MAC0110 MAC0122	**Introdução à Computação** (Prof. Alfredo Goldman) **Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos** (Prof. Yoshiharu Kohayakawa)	Foram os primeiros contatos com o mundo da computação. Onde aprendi conceitos e sintaxes básicas de programação; algoritmos que solucionam problemas fundamentais, como ordenação.
MAC0323	**Estruturas de Dados** (Prof. Carlos E. Ferreira)	Estudo de estruturas básicas, aprendendo técnicas de armazenamento e manipulação de informações. Aprendizado bastante prático de um conhecimento importante para qualquer programa.
MAC0338	**Análise de Algoritmos** (Profª. Cristina G. Fernandes)	Entender o desempenho de um algoritmo é fundamental para que se possa reconhecer trechos do programa que pode ser melhorado. Por isso Análise de Algoritmo tem grande relevância nos mais variados projetos de Computação.
MAC0211 MAC0242	**Laboratório de Programação I e II** (Prof. Roberto Hirata e Prof. Marco Gubitoso)	Atividade de programação extremamente prática, além de interação em grupo.
MAE0121 MAE0212	**Introdução a Probabilidade e a Estatística I e II** (Prof. Adilson Simonis)	Estudo dos principais axiomas que regem a teoria probabilística, e consequentemente, regem o modelo proposto neste trabalho. Era muito útil ter axiomas e propriedades da probabilidade sempre à mão.
MAC0239	**Métodos Formais em Programação** (Prof. Marcelo Finger)	Onde adquirimos base sobre a sintaxe e semântica da Lógica, objeto central deste trabalho. Esta matéria também aborda método de provas e verificação de corretude de programas, que também foram utilizados neste trabalho.
MAC0315	**Programação Linear** (Prof. Marcelo Queiroz)	Esta matéria foi de extrema importância para o estudo de Satisfatibilidade Probabilística, já que este problema foi representado usando programação linear.
MAC0444	**Sistemas Baseados em Conhecimento** (Profª. Renata Wasserman)	Auxiliou no entendimento em como lidar com base de conhecimentos e o racicínio de inferências.

5.4 Trabalhos Futuros

Chegando ao final da monografia, eu gostaria de utilizar este espaço também para agradecer ao professor Marcelo Finger por todo o apoio e aprendizado que ele me proporcionou com esta iniciação científica. E à professora Renata Wasserman, que também sempre estava disposta a nos ajudar.

Como mencionado na conclusão da parte técnica, a formalização da teoria baseada em probabilidades imprecisas sugere alguns caminhos para trabalhos futuros: continuar a explorar estratégias e heurísticas que melhorem o processo de revisão. Este seria o primeiro passo a seguir se eu continuasse nesta área de pesquisa em um mestrado.

Outras atividades a fazer são: possibilidade de incrementar os postulados, na busca por mais restrições da entrada do problema, como um processo de "encurralar" a solução da revisão. Buscar algum tipo de caracterização da entrada do problema, que possa mapear para uma solução ou para uma ordenação ideal.

Para aprimorar ainda mais os conhecimentos, é necessário aprofundar os estudos em referências bibliográficas que abrangem não só conceitos, mas também etapas do processo de revisão de crenças original. Além disso, cursar disciplinas da área de Inteligência Artificial e Lógica com certeza também contribuirão para o sucesso dessas atividades.

Quanto ao meu futuro, eu pretendo continuar os estudos cursando mestrado. Entretanto, decidi mudar de projeto porque gostaria muito de conhecer com mais profundidade a área de Otimização Combinatória e Grafos.