MAC–IME–USP

Carlos Eduardo Ferreira
Sala 108C Tel.: 3091 6079
e-mail cef@ime.usp.br
monitor Rafael Schouery
e-mail schouery@gmail.com
monitor Atol Fortin
e-mail atolfortin@gmail.com

MAC 328 - Algoritmos em Grafos

Primeiro semestre de 2010

Terceira Lista de Exercícios – Entrega: 11/06/2010

1. Seja C um ciclo não-trivial num grafo conexo G. Seja T uma árvore geradora de G. É verdade que todas as arestas de C exceto uma estão em T?

2. Prove a seguinte caracterização de grafos conexos: Um grafo G é conexo se e somente se todo corte em G tem pelo menos uma aresta.

3. Descreva como é possível encontrar uma árvore geradora de custo máximo de um grafo conexo.

4. Seja T uma MST de um grafo G. Suponha agora que uma das arestas de T é retirada de G. Mostre como encontrar uma MST do novo grafo em tempo $O(E)$.

5. Mostre que o seguinte algoritmo produz uma MST: Comece com árvore geradora T qualquer. Acrescente a T as demais arestas do grafo uma a uma. Para cada aresta acrescentada, retire de T uma aresta máxima do ciclo não-trivial que se forma.

6. Mostre que o seguinte algoritmo produz uma MST: Comece com árvore geradora T qualquer. Para cada aresta t de T, retire t de T e coloque em seu lugar uma aresta mínima do corte determinado por $T - t$.

7. Uma aresta e de um grafo G é crítica se o custo de uma MST de $G - e$ é estritamente maior que o custo de uma MST de G. Escreva uma função que determine todas as aresta críticas de G em tempo proporcional a $Elog(V)$.

8. Descreva uma família de grafos com V vértices e E arestas para os quais o tempo do algoritmo de Prim corresponde ao pior caso.

9. Escreva uma implementação do Union-Find em que *find* consome tempo constante (independente de V) e *union* consome tempo proporcional a $log(V)$.

10. Mostre que para cada MST T de G existe uma forma de desempatar os custos das arestas tal que o algoritmo de Kruskal devolve a árvore T.

11. Mostre que SPTs e MSTs de grafos (conexos) podem ser muito diferentes. Dê um exemplo de um grafo G com custos não-negativos nas arestas e uma MST T nesse grafo que tenha a seguinte propriedade: para todo vértice s existe um vértice t tal que a distância de s a t em G é diferente da distância de s a t em T. (Dica: existem exemplos com 4 vértices apenas.)

12. Digamos que o gargalo de um caminho é o custo de seu arco mais caro. Mostre que toda MST T de um grafo tem a seguinte propriedade: para todo par (v, w) de vértices, o caminho entre v e w em T é um caminho de gargalo mínimo dentre todos os que ligam v a w no grafo.

13. Suponha dado um digrafo com custos não-negativos associados aos vértices. O custo de um caminho num tal digrafo é a soma dos custos dos vértices do caminho. Reduza o problema de encontrar um caminho de custo mínimo que comece em um vértice v e termine num vértice t nesse digrafo ao problema de encontrar um caminho num digrafo com custos nos arcos.

14. Como é possível encontrar um segundo caminho mais curto de s a t em um digrafo?

15. Mostre que o algoritmo de Dijkstra pode produzir resultados errados se o digrafo tiver arcos de custo negativo.

16. O diâmetro de um grafo é o máximo das distâncias entre dois vértices. Escreva código que usa o algoritmo de Dijkstra para calcular o diâmetro de um grafo.

17. Escreva um algoritmo que encontre um arco cuja remoção causa o maior aumento na distância de um vértice s a um vértice t.

18. Escreva uma função que receba conjuntos S e T de vértices e calcule a distância de S a T.

19. Descreva uma família de grafos com V vértices e E arestas para os quais o tempo do algoritmo de Dijkstra corresponde ao pior caso.

20. Quantos arcos, no máximo, pode ter um DAG com V vértices?

21. De condições necessárias e suficientes para que um DAG tenha apenas uma ordenação topológica.

22. Escreva uma função que encontra o caminho direcionado mais longo em um DAG em tempo proporcional à V. Use a sua função para decidir se um DAG tem um caminho hamiltoniano.

23. Escreva uma função que verifique se uma dada permutação dos vértices de um digrafo é uma ordenação topológica.

24. De um algoritmo eficiente para contar o número total de caminhos em um DAG. Quanto tempo consome seu algoritmo?

25. Prove que encontrar o ciclo de custo mínimo em uma rede que pode ter arcos com custos negativos é NP-difícil.

26. Escreva uma função que decide se uma rede tem ciclos negativos.

27. Suponha que um digrafo G tem um ciclo de custo negativo. De um algoritmo eficiente que liste os vértices em um desses ciclos. Prove que seu algoritmo está correto.