MAT5766–Epistemologia da Matemática
Seminário: Newton e o cálculo

Guilherme de Souza Rabello
William Vieira

5 de novembro de 2002

Resumo

Neste texto, apresentamos de maneira resumida e geral a origem do cálculo diferencial e integral, fazendo, em particular, um exame dos trabalhos do físico e matemático inglês sir Isaac Newton. Como e por que Newton pensou nos conceitos-chave de derivadas e integrais? Qual foi a formulação dessas idéias por ele oferecida? Nosso enfoque epistemológico será através de uma heurística, segundo as idéias de Moles, e de uma dialética de provas e refutações, segundo as idéias de Lakatos.

Sumário

Figura 1: Newton em uma gravura de Kneller de 1689.

Figura 2: Máscara mortuária de Newton.

Capítulo 1

Introdução: Os primeiros anos de Newton

Newton nasceu na noite de Natal de 1642 (4 de janeiro de 1643 no calendário gregoriano, que não foi adotado na Inglaterra antes de 1752) na pequena vila de Woolsthorpe, Lincolnshire. Seu nascimento foi acidentado e correu risco de vida. Tão fraco estava, que foi obrigado a usar uma almofada amarrada ao pescoço para sustentar a cabeça. Seu pai falecera alguns meses antes de seu nascimento, mas tinha lhe deixado uma boa fortuna e boas terras para a agricultura.

Figura 1.1: O solar de Woolsthorpe, hoje.

Dois anos após seu nascimento, sua mãe desposou um reverendo de nome Barnabas Smith, indo então viver em North Witham. O pequeno Isaac foi deixado com sua avó materna Margery Ayscough, por quem foi tratado como um órfão. Sua infância foi infeliz, e o fato de seu avô James Ayscough nunca ser citado por ele, bem como não ter legado nada a Newton em seu testamento, mostram que a aversão era mútua. Por nove anos, até o falecimento de Barnabas em 1653, ele foi de fato separado de sua mãe, e suas fortes tendências psicóticas foram associadas como tendo começado com esse evento traumático. Que ele odiava seu padrasto podemos ter certeza; compilando um catálogo de seus pecados em 1662 em notação abreviada, ele lembrava "Ameaçar queimar meu pai e mãe Smith e a casa sobre eles."

Com a volta de sua mãe, Newton passou a viver numa família consistindo de sua avó, sua mãe, um meio-irmão e duas meia-irmãs. Pouco depois, ele foi matriculado no liceu de Grantham; apesar de se situar a apenas cinco milhas de sua casa, Newton se hospedou com a família de um farmacêutico chamado Clark. Lá ele teve uma educação padrão em uma escola protestante, aprendendo latim, grego e religião, mas pouca aritmética. Ele começou mostrando pouco talento para o trabalho acadêmico. Os relatórios da escola o descreviam como "sonhador" e "desatento". Aparentemente, após uma provocação e posterior briga com outro aluno, no recreio, e que Newton venceu, seu desempenho começou a melhorar, devido a seu caráter persistente e competitivo.

Sua mãe pensou que ele deveria administrar os bens deixados pelo pai e, com isso, se tornasse um administrador. Essa tentativa resultou em fracasso; no campo, Newton ficava absorto nos seus livros de estudos, ou nos brinquedos mecânicos que fazia, demonstrando seu talento inventivo. Conta-se que, aos 16 anos de idade, Newton saiu de casa no meio de uma tempestade, pulando em dois sentidos, contra e a favor do vento, procurando assim medir a intensidade do mesmo.

Um tio, William Ayscough, achou que seria melhor Newton continuar a educação e ingressar na universidade. Este retorna ao liceu de Gratham, hospedando-se agora com o diretor Stokes. Evidências apontam que Stokes também incentivou a mãe a enviar Newton à universidade. Assim, em 5 de junho de 1661, ele se matriculou no Trinity College, Cambridge, inicialmente com a intenção de ser advogado. Entrando em contato com a filosofia dos antigos, como Platão e Aristóteles, mas também com a de Descartes, Gassendi, Hobbes e Boyle, bem como os trabalhos de Copérnico, Galileu e Kepler, Newton desenvolveu um pensamento livre. Assim, em seu livro entitulado *Quæstiones Quædam Philosophicae* (escrito por volta de 1664), ele diz: "Platão é meu amigo, Aristóteles é meu amigo, mas minha melhor amiga é a Verdade."

Conta-se que seu interesse em matemática surgiu quando ele comprou um livro de astrologia em uma feira de Cambridge e não pôde entender a matemática nele contida. Tentando ler um livro de trigonometria, ele sentiu necessidade de ler *Os Elementos* de Euclides (edição de Barrow), que inicialmente achou tão trivial que quase desistiu. Mas mudou sua mente quando leu a proposição 36 do livro I: "Paralelogramos que estão sobre bases iguais e entre as mesmas paralelas são iguais um ao outro." Então recomeçou o livro com grande respeito.

Nos capítulos que seguem, procuraremos analisar a gênese das grandes descobertas matemáticas de Newton, que foram feitas a partir desses anos.

Capítulo 2

Os antecedentes do cálculo

2.1 Idade Antiga

Os gregos foram os primeiros a trabalharem a matemática como uma ciência dedutiva, em que de verdades iniciais chega-se, por um processo lógico, a verdades posteriores. A Tales de Mileto, que viveu no século VI a.C., é atribuído o estabelecimento da matemática como uma disciplina dedutiva. Seus argumentos apelavam, por vezes, à evidência dos sentidos. Mas as bases estavam suficientemente bem lançadas para que, um século mais tarde, Pitágoras fundasse uma escola que colocou a matemática como base de todo o universo. Pouco se sabe sobre Pitágoras ele mesmo, pois mesmo na Antigüidade não se fazia distinção entre as realizações dele e de sua escola. Com um cunho um tanto misticista, essa escola procurou apresentar toda a realidade como uma abstração matemática. A realidade deveria ser apreendida não pela experimentação, mas sim pelo intelecto e lógica. Em sua tentativa de unificar tudo sob um mesmo arcabouço intelectual, os pitagóricos tentaram relacionar número e geometria, reduzindo esta última ao primeiro. Assim, eles consideravam uma linha geométrica, por exemplo, como constituída de mônadas, ou unidades, que deveriam ser finitas em número. No meio de suas pesquisas, fizeram uma descoberta desconcertante: dado um triângulo retângulo isósceles, se os catetos fossem constituídos por certo número de unidades, a hipotenusa era não mensurável por essas unidades. Usando uma expressão que se tornou popular, a hipotenusa era *incomensurável* com os catetos. De certa forma, isso acabou com o ideal pitagórico de unificar os reinos da aritmética e geometria, e as conseqüências são sentidas em todo o pensamento matemático grego. A partir de então, a matemática grega tornou-se essencialmente geométrica, evitando associar o número às magnitudes da geometria. Conta-se que o pitagórico que descobriu a incomensurabilidade morreu num acidente de navio como resultado.

A forma com que os gregos lidaram com o problema da incomensurabilidade encontra-se bem representada no livro V de Euclides, cujas idéias são atribuídas ao matemático Eudoxo de Cnidus, Ásia Menor, que viveu por volta de 400 a.C. Aceitando o fracasso do programa pitagórico[1] de associar magnitudes geométricas aos números, Eudoxo desenvolveu uma teoria que trabalhava com magnitudes de forma abstrata, e que servia para representar as linhas, ou áreas, ou volumes, conforme fosse o caso. Para os pitagóricos, duas linhas estavam uma para outra assim como a razão dos números inteiros nelas contidos. Já que não se podia falar mais dos números inteiros contidos em duas linhas, Eudoxo contornou o problema afastando a menção a números e generalizando a definição. Lemos na definição 5 do livro V d'*Os Elementos*: "Magnitudes são ditas estarem na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, se quaisquer equimúltiplos forem tomados da primeira e a da terceira, e quaisquer equimúltiplos forem tomados da segunda e da quarta, os equimúltiplos anteriores igualmente excedem, são iguais a, ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados em ordem correspondente." Não foram poucos os que notaram a relação dessa definição àquela fornecida por Richard Dedekind para a continuidade no século XIX. A proporção entre magnitudes é determinada completamente quando sabemos como essas magnitudes se comportam perante outras, maiores ou menores. A idéia subjacente de corte pode ser extraída dessa concepção.

Por meio de sua nova teoria de proporções, Eudoxo elaborou um método que permitia a determinação de áreas complexas. Esse método é extremamente importante ao futuro desenvolvimento do cálculo e, na Idade Média, ficou conhecido como método da exaustão. Daremos a seguir um exemplo de aplicação desse método, esquematizando a proposição 2 do livro XII de Euclides, que diz: "Círculos estão, um para o outro, como os quadrados de seus diâmetros."

Figura 2.1: Ilustração para a proposição 2 do livro XII de Euclides.

Na figura, Euclides propõe então que o quadrado sobre BD estará para o quadrado em FH assim como o círculo $ABCD$ está para o círculo $EFGH$. Se este não for o caso, o quadrado em BD estará para o quadrado em FH assim como o círculo $ABCD$ está para uma área menor ou maior que $EFGH$, a qual é denotada por S. Ele supõe, então, a primeira hipótese. A partir daí, ele elabora uma construção no círculo $EFGH$. O quadrado $EFGH$ é maior que a metade do círculo, pois esse mesmo quadrado possui a metade da área do quadrado circunscrito ao círculo, o qual evidentemente tem área maior que a do círculo. Similarmente, o triângulo EFK tem é maior que o segmento EFK do círculo, pois esse triângulo possui a metade da área do retângulo que contêm esse segmento. Bissectando sucessivamente os segmentos de círculo e mostrando que, a cada bissecção, a área do segmentos que sobram são menores que as dos triângulos correspondentes, Euclides mostra que o polígono inscrito a que se

[1] Não se pode deixar de pensar numa associação desse programa com as idéias dos MSRP de Lakatos; analisando tudo sob uma ótica kuhniana, pode-se pensar que as idéias de Pitágoras foram desenvolvidas e constituíram um paradigma, até que a dificuldade em solucionar o problema da incomensurabilidade deu origem a discussões e a um período de crise, que foi razoavelmente bem resolvido por Eudoxo, dando origem ao paradigma geométrico que dominou toda a matemática grega a partir de então.

chega pode ser tornado tão próximo do círculo quanto se queira. Assim, ele supõe que o processo de bissecção seja tal que o polígono inscrito tenha área maior que S. Tomando um polígono semelhante inscrito no círculo $ABCD$, e lembrando que as áreas dos polígonos estão uma para a outra como os quadrados dos diâmetros, temos os seguintes fatos: os polígonos inscritos são menores que os respectivos círculos; eles estão um para o outro como os quadrados dos diâmetros; o círculo $ABCD$, maior que o polígono nele inscrito, está para a área S assim como os quadrados dos mesmos diâmetros. Logo, a área S deve ser maior que o polígono inscrito no círculo $EFGH$; mas ela é também menor. Então, por *reductio ad absurdum*, a área S não pode ser menor que $EFGH$. De maneira similar, mostra-se que ela não pode ser maior. Portanto, é igual.

Por esse método de exaustão, o matemático grego Arquimedes de Siracusa, que viveu no século III a.C., pouco após Euclides, conseguiu realizar a quadratura da parábola, da esfera, de uma casca esférica e de uma série de outras figuras. Embora o procedimento fosse lógico e funcionasse, ele era um tanto cansativo de se realizar. E a forma pela qual os gregos descobriam o valor real das proporções, para então aplicar seu método de exaustão, estava longe de ser entendida. Isso acabou levando muitos matemáticos da Idade Média e Moderna a acusarem os gregos de "ocultar" suas heurísticas de descobrimento. O quanto isto estava errado é demonstrado pelo fato que, em 1906, o estudioso dinamarquês Heiberg descobriu um manuscrito que continha *O Método*, de Arquimedes, que apresentava um método heurístico "mecânico" para tais deduções.[2] Embora possivelmente tal texto não tenha tido influência no desenvolvimento posterior do cálculo (já que permaneceu desaparecido por séculos), ele dá indicações de que, embora não fosse considerado "rigorosa", a utilização de considerações infinitesimais, como por exemplo pensar num sólido como formado por seções planas indivisíveis, não havia sido totalmente esquecida, mas que, para os gregos no período áureo do helenismo, era considerada apenas sugestiva.

O método da exaustão e a heurística das seções infinitesimais, como exposta por Arquimedes no seu *O Método*, são as duas grandes contribuições do pensamento grego ao cálculo, mais particularmente ao processo que seria conhecido, séculos mais tarde, como integração. Deve-se perguntar, portanto, se a matemática grega influenciou, ou por que não influenciou, o processo de diferenciação. A diferenciação mostra, intuitivamente, a forma pela qual uma função muda. O estudo do movimento, das mudanças de posição, foi feito na Grécia largamente de forma qualitativa, encontrando-se principalmente nos trabalhos do filósofo grego Aristóteles, que viveu entre no século IV a.C. Um dos principais motivos pelos quais a matemática não encontrou, para os gregos, solo fértil para o estudo do movimento está nos paradoxos que isso envolvia, paradoxos esses que foram bem apontados e expressos pelo filósofo grego Zeno de Citium, Cyprus, contemporâneo de Arquimedes. Para exemplificar, apresentamos aqui o seu argumento da dicotomia. A fim de que uma pessoa percorra uma

[2] A história desse manuscrito é fabulosa, e mostra como os documentos podem se preservar das maneiras mais improváveis.

distância, ela deve antes percorrer metade dessa distância. Mas, para percorrer essa metade de distância (que também é uma distância), ela deve percorrer metade da metade da distância, ou um quarto da distância. Mas antes ela deve percorrer um oitavo da distância. E assim por diante *ad infinitum.* Com esse paradoxo, Zeno mostrava o quanto era difícil trabalhar com os conceitos de infinito e movimento, e essa dificuldade permaneceu para sempre um obstáculo à matemática grega. Aristóteles avançou o argumento de que o infinito só poderia ser enxergado de forma potencial, e não como uma totalidade pré-existente.

2.2 Idade Média

Na Idade Média, a matemática teve várias influências. Uma das principais foi a introdução, na Europa, dos algarismos arábicos. Embora com esse nome, a origem deles é hindu. Os árabes, expandindo seu império, dominaram a região da Índia e absorveram sua matemática. Na outra direção da expansão do império árabe, eles dominaram a Grécia e parte da Europa. Lá, tomaram conhecimento de outra matemática, a dos gregos do período helênico. O que foi importante, nesse processo todo, foi a difusão do conhecimento matemático. Com novos elementos, tornou-se possível fazer novas descobertas.

Concomitantemente, a influência cristã estava dominando a Europa. Os sábios desse período muitas vezes debatiam sobre o infinito porque Deus deveria ser infinito. Muitas vezes a matemática era usada para argumentar, e foi assim que, aos poucos, o infinito voltou a ganhar destaque na matemática. Isto fez com que, em parte, o rigor anteriormente atingido pelos gregos fosse perdido. Mas, sem limites para a imaginação e sem tanta preocupação com as demonstrações nos moldes estreitos exigidos pelo rigor geométrico, grandes conquistas começaram a ser feitas. A principal, talvez, foi a análise quantitativa do movimento. Lembrando que é no movimento que as primeiras noções da diferenciação são apreendidas pela intuição, pode-se ter uma idéia da influência da Idade Média no desenvolvimento do cálculo.

Entre os estudiosos desse período histórico, destaca-se a figura de Richard Suiseth, conhecido como o Calculador, que viveu no século XIV. O Calculador estudou problemas relacionados ao movimento e às mudanças de intensidade das coisas em geral (por exemplo, da temperatura, densidade, iluminação), que recebiam o nome de latitudes. Tentando solucionar alguns problemas que tinham por objetivo a determinação da intensidade média de uma latitude cuja intensidade variava de tempos em tempos, o Calculador chegou a trabalhar com séries infinitas; no que segue, damos um exemplo dos raciocínios que ele usava. Considere duas taxas de variação uniformes e iguais, a e b, operando durante um intervalo de tempo, que foi subdividido nas razões $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Agora deixe a taxa de variação b ser duplicada em todo o intervalo; mas no caso de a, deixe ser dobrada no segundo subintervalo; triplicada no terceiro; e assim por diante *ad infinitum.* Agora o aumento em a no segundo subintervalo, se continuado constantemente por esse e todos os subintervalos seguintes, resultaria em um aumento no efeito igual àquele trazido por b durante a primeira metade do tempo. A triplicação de a no terceiro subintervalo, se continuada constantemente através desse e os subintervalos subsequentes, resultaria num aumento do efeito de a igual àquele trazido pela mudança em b no segundo subintervalo, e assim por diante *ad infinitum*. Assim o aumento resultante da duplicação, triplicação e assim por diante de a é igual àquele causado pela duplicação de b; i.e., a taxa de variação média de a é igual à de b. Esse argumento pode ser interpretado como uma demonstração de que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$. O que é mais importante a se observar é que o infinito, aqui, voltou a ser considerado algo que poderia ser considerado na totalidade, em contraposição às idéias aristotélicas.

Figura 2.2: Ilustração para o teorema de Oresme.

Um pouco mais novo que o Calculador, o francês Nicole Oresme nasceu em 1323 e faleceu em 1382. Seu trabalho mais conhecido é o *Tractatus de latitudinibus formarum*, que estudava as latitudes e as variações de latitudes. Oresme utilizava um método gráfico, relacionando álgebra e geometria, e pode ser considerado um precursos da geometria analítica de Fermat e Descartes. Seus estudos também podem ser vistos como pioneiros, no que se refere à ciência da cinemática, mais tarde estabelecida por Galileu. Como exemplo de seus métodos, apresentamos aqui uma demonstração do que, em termos modernos, pode ser escrito como $\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}$. Seja um corpo movendo-se à velocidade constante AF durante um tempo AB, realizando desta maneira um movimento que é representado pelo retângulo $ABGF$. Oresme acreditava que a área do retângulo representa a distância percorrida. É bem provável que ele pensava nos segmentos como seções infinitesimais que compunham o retângulo, e que cada seção infinitesimal era a distância percorrida num infinitésimo de tempo. Assim, o procedimento heurístico de Arquimedes estava, finalmente, começando a adquirir valor científico. O retângulo $ABGF$ é igual ao triângulo ABC, o qual representa um movimento onde a velocidade decresce uniformentente do valor inicial AC ao valor final nulo. Isto mostra que, num movimento retilíneo uniformemente variado que termina com a velocidade nula, a distância percorrida é igual ao produto do tempo pela metade da velocidade inicial.

Nos trabalhos do cardeal alemão Nicolau de Cusa, são encontrados mais uma vez raciocínios libertos do rigor, usando o infinito como uma entidade que existe, e não meramente potencial. Sua quadratura do círculo apresenta essa visão peculiar. Cusa dividiu o círculo em um número infinito de triângulos, onde o vértice superior era o centro do círculo e a base era um infinitesimal da circunferência. Assim, a área, como soma de todos esses triângulos, é igual à metade do produto das bases pelas alturas, ou seja, metade do produto da circunferência pelo raio.

Concluindo: na Idade Média grandes avanços foram feitos à matemática, não tanto no rigor, que pouco a pouco estava sendo esquecido, mas na aplicação de métodos novos a problemas novos. O infinito e o infinitesimal retomam sua posição nos estudos matemáticos, em parte por causa dessa perda de rigor, e o problema do movimento foi estudado quantitativamente. O estudo do movimento, com o uso dos infinitesimais, foi diretamente responsável pela descoberta da diferenciação.

Capítulo 3

O século anterior

Neste capítulo, ficará claro, pela proliferação de idéias e métodos, que o cálculo estava sendo inconscientemente procurado. Os trabalhos de Newton e Leibniz, no século XVII, representam de certa forma um coroamento dos esforços das diversas figuras do século anterior à descoberta do cálculo.

Enquanto a matemática grega era bastante rigorosa, fazendo distinção entre magnitudes comensuráveis e incomensuráveis, a matemática dos hindus e dos árabes não fazia distinções entre números racionais e irracionais. Utilizando a álgebra indo-arábica, os matemáticos do século XVI continuaram utilizando razões irracionais, que agora era reconhecida como número. Mas ainda havia certa resistência ao uso. Johannes Kepler, em 1615, ainda se referia aos irracionais como "inefáveis." Da mesma forma, as quantidades negativas, aceitas pelos hindus mas não pelos gregos nem pelos árabes, foram sendo utilizadas e, finalmente, aceitas. Após o século XVI, os números imaginários também começaram a ser sistematicamente utilizados, mas só perderam sua posição anômala na matemática com Gauss, no século XIX.

Essas generalizações dos números, apesar de não estarem acompanhadas de definições, foram importantes para o conceito de limite e na aritmetização da matemática. Mais importante que isso, no desenvolvimento do algoritmo de cálculo, foi a introdução sistemática, no fim do século XVI, de símbolos para as quantidades envolvidas nas relações algébricas.

O estabelecimento de símbolos para as quantidades abstratas entrando na álgebra foi trabalho principalmente do grande matemático francês François Viète, do século XV, que usava consoantes para representar as quantidades conhecidas e vogais para as desconhecidas. Esse simbolismo literal foi fundamental para o rápido progresso da geometria analítica e o cálculo, pois permitia que os conceitos de variabilidade e de função entrassem no pensamento algébrico. A notação melhorada também levou a métodos que eram muito mais fáceis de serem aplicados que os complicados métodos geométricos de Arquimedes, dos quais eles eram modificações.

Em Johannes Kepler encontramos a continuidade de uma tradição que começou com os pitagóricos e prosseguiu com Nicolau de Cusa. Nascido em 1571 na atual Alemanha, Kepler teve uma formação religiosa nos moldes do luteranismo. Em todo seu trabalho, encontram-se traços de um profundo misticismo, além de especulações metafísicas. Os antigos gregos, na busca de unidade neste universo de multiplicidade perplexante, falharam em cobrir o buraco entre o curvilíneo e o retilíneo por duas razões. Primeiro, eles proibiram o infinito na geometria. Segundo, eles hesitaram, após a descoberta do irracional, em perseguir a associação dos pitagóricos entre considerações numéricas e geométricas. Kepler, entretanto, viu nesse impasse mais uma evidência do artifício do Criador, que estebeleceu todas as coisas em harmonia. Deus quis que quantidades existissem de forma que a comparação entre curvas e retas pudesse ser feita. Assim como a curva pode ser pensada como formada de infinitos segmentos de reta, Deus é infinitamente mais sábio e mais artífice que o homem. O ponto de partida para sua pesquisa na determinação do volume de sólidos foi o estudo das melhores proporções para um barril de vinho. O resultado foi seu *Nova stereometria*, publicado em 1615. Esse tratado possui três partes, sendo a primeira de estereometria[1] arquimediana, junto com um suplemento contendo noventa e dois sólidos não tratados por Arquimedes; a segunda é sobre as medidas dos barris de vinho austríacos, e a terceira sobre aplicações do todo. Kepler extendeu de maneira admirável as idéias de Nicolau de Cusa. Além de considerar, por exemplo, o círculo como composto de infinitos triângulos, ele pensou na esfera como composta de infinitos cones cujos vértices estavam no centro da esfera, e com isso pôde mostrar que o volume da mesma era um terço do produto entre sua superfície e o raio. Os cones e cilindros ele pensou como sendo formados de duas maneiras, seja feitos com infinitas lâminas circulares, seja feitos de infinitas fatias triangulares ou retangulares irradiando do centro. De maneira similar ele obteve o volume de um toróide como formado de um círculo girando em torno de uma linha fora dele mas no mesmo plano.

Na mesm época, Galileu Galilei, na Itália, realizou estudos que deram origem à ciência da cinemática, ou do movimento considerado sem preocupação com suas causas. A visão de Galileu era muito semelhante à de Nicole Oresme, e sua demonstração de que um corpo em queda livre percorre uma distância igual à de um corpo com a metade da velocidade máxima atingida é praticamente a mesma de Oresme. Um de seus discípulos, Bonaventura Cavalieri, exerceu enorme influência com seu trabalho *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, publicado em 1635. Lá ele apresenta demonstração de áreas e volumes por meio de seu teorema, que ficou conhecido até os dias de hoje como princípio de Cavalieri. Cavalieri concebia uma superfície como formada de um número infinito de linhas paralelas e um sólido como formado de um número infinito de superfícies paralelas. Como ilustração de seu método, apresentamos um teorema clássico de geometria, cujo resultado já era conhecido no tempo de Cavalieri: "A diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos iguais." Se tomarmos $EB = CB$ e construir HE e BM paralelos a CD, então as linhas HE e BM são iguais. Portanto todas as linhas do triângulo ACF tomadas em conjunto são iguais a todas aquelas de CFD; conseqüentemente, os triângulos

[1]Hoje em dia, a geometria espacial se ocupa dos objetos de estudo da antiga estereometria.

ACF e CDF são iguais, e a soma das linhas do paralelogramo AD é o dobro da soma de linhas de cada triângulo.

Figura 3.1: Ilustração para o teorema de Cavalieri.

Na década de 1630, os franceses René Descartes e Pierre de Fermat inventaram, independentemente, a geometria analítica, cujas bases já estavam, desde o tempo de Oresme, lançadas. A geometria analítica significava, primeiro, que curvas podiam ser representadas por equações. Os gregos e os árabes estudaram curvas, mas não muitas—principalmente o círculo e as seções cônicas e mais algumas definidas como *loci*. Muitos problemas foram resolvidos para elas, incluindo achar suas tangentes e áreas. Mas como qualquer equação poderia produzir uma nova curva, os estudiosos da geometria das curvas no começo do século XVII estavam se confrontando com uma explosão de curvas a pesquisar. Com essas novas curvas, a velha tradição grega dos métodos geométricos sintéticos não eram mais suficientes. Os gregos, é claro, sabiam como achar as tangentes a um ponto arbitrário em círculos, seções cônicas e curvas mais sofisticadas como a espiral de Arquimedes. Mas como seria possível a descrição das propriedades de uma tangente a uma curva arbitrária definida por um polinômio de 96^o grau? Além da determinação de tangentes, as novas curvas apresentavam problemas para a determinação de suas áreas e perímetros. Outra questão popular, que havia sido trabalhada em casos simples, era a isoperimétrica; por exemplo: de todas as figuras planas, qual aquela que possui a maior área com o mesmo perímetro? Assim, foram sendo buscados métodos novos e os mais gerais possível.

Com relação a problemas de extremos, Fermat elaborou um método que se tornou bastante popular, embora ele não o tenha publicado. Suponha que se deseja resolver o seguinte problema: "Dividir um segmento em duas seções de forma que o produto dessas seções dê um máximo." Seja a o comprimento total do segmento. Então ele pensou: se houvesse duas soluções para o comprimento de um dos segmentos, elas poderiam ser designadas por x e $x + E$. As áreas correspondentes seriam, assim, dadas por $x(a-x) = ax-x^2$ e $(x+E)(a-x-E) = ax - x^2 - 2xE + aE - E^2$. Igualando essas áreas (pois ambas são o máximo que é único) tem-se, cortando os termos iguais, que $2xE + E^2 = aE$, ou $2x + E = a$. Guiado pela intuição e por uma observação do Papus de Alexandria (o "último grande geômetra grego", do século IV), Fermat afirmou que, entretanto, só há uma solução. Então fez $E = 0$ e chegou ao resultado correto $x = a/2$. Naturalmente, esse método levantou sérias dúvidas, uma vez que se trabalha inicialmente com E como se ele fosse não nulo e depois o torna nulo. Fermat respondeu a essas críticas de uma maneira que se tornaria típica: por meio de considerações obscuras, dizendo que, num ponto máximo, os pontos não são realmente iguais mas deveriam ser.

O problema das tangentes era resolvido, em geral, da seguinte forma: a tangente era pensada como uma secante tal que os dois pontos que a determinavam aproximavam-se, coincidindo por fim. O que se queria dizer por esses pontos coincidirem por "fim" nunca era explicado satisfatoriamente. Entretanto, o método funcionava. Um dos mais importantes representantes da matemática desse período foi o matemático inglês Isaac Barrow. Barrow desejava, em seu trabalho, voltar ao ideal de Euclides e afirmava que o número matemático não tinha existência própria a si mesmo e independente da magnitude geométrica contínua. Números como $\sqrt{3}$, por exemplo, não poderiam nem no pensamento serem abstraídos da magnitude correspondente. Assim, ele sustentava que a aritmética deveria ser incluída na geometria, mas que a álgebra fazia parte da lógica. Sua descrença no poder dos métodos algébricos foi, em parte, responsável pelo fato de que ele não transformou suas descobertas geométricas em um procedimento analítico geral e efetivo. Apesar disso, ele foi responsável por numerosos teoremas sobre quadraturas e tangentes, e talvez o reconhecimento mais claro na época do significado das relações entre esses dois tipos de problemas. Todas suas proposições, entretanto, foram apresentadas em formas geométricas que envolviam construções complicadas e não naturais, ao invés de um simbolismo adequado. Se elas fossem reapresentadas nos termos do cálculo, seriam equivalentes a muitas das regras padrão e dos teoremas de diferenciação e integração, incluindo o teorema fundamental do cálculo. Abaixo, é reproduzido um trecho de seu livro *Geometrical Lectures*, onde fica claro o quão próximo ele chegou:

Figura 3.2: Ilustração para o teorema de Barrow.

> Sejam AP, PM duas linhas retas dadas em posição, das quais PM corta uma dada curva em M, e suponha que MT toca a curva em T e corta a linha reta em T.
>
> Para achar a quantidade da linha reta PT, eu tomo um arco indefinidamente pequeno, MN, da curva; então eu construo NQ, NR paralelas a MP, AP; chamo $MP = m$, $PT = t$, $MR = a$, $NR = e$, e outras linhas, úteis para o problema em questão, eu também designo por nome; também comparo MR, RN (e, por meio delas, MP, PT) uma com a outra por meio de uma equação obtida por cálculo; nesse meio-tempo, observo as seguintes regras.
>
> Regra 1. No cálculo, eu omito todos os termos contendo uma potência de a ou e, ou produtos das mesmas (pois esses termos não têm valor).
>
> Regra 2. Após a equação ter sido formada, eu rejeito todos os termos consistindo de letras denotando quantidades conhecidas ou determinadas, ou termos que não contenham a ou e (pois esses termos, colocados de um lado da equação, serão sempre iguais a zero).
>
> Regra 3. Eu substituo m (ou MP) por a, e t (ou PT) por e. Assim, no decorrer do processo, a quantidade PT é encontrada.

De Barrow, chegamos por fim a seu aluno e pupilo: Isaac Newton.

Capítulo 4

O cálculo segundo Newton

4.1 As três abordagens

Nesta seção retomamos a narrativa da história de sir Isaac Newton.

Após a leitura d'*Os Elementos*, ele prosseguiu seus estudos pelo *Clavis Mathematica* de Oughtred e *La Géometrie* de Descartes. Leu também textos de Viéte, van Schooten e o livro de Wallis, *Algebra*, a partir do qual seu primeiro trabalho matemático parece ter sido feito. O texto de Wallis continha um método de quadratura da parábola e da hipérbole contendo indivisíveis. Ele fez notas sobre o tratamento de séries de Wallis e criou seus próprios métodos.

Em 1663, Isaac Barrow foi eleito para a cadeira lucasiana em Cambridge, e foi professor de Newton. Apesar de evidências de Newton não ter sido um aluno particularmente bom, ele foi eleito um estudioso em 28 de abril de 1664 e recebeu seu grau de bacharel em abril de 1665. Seu gênio ainda não havia despontado, mas subitamente a praga que invadira Londres chegou a Cambridge, forçando a universidade a fechar suas portas. Newton voltou a Lincolnshire e, por dois anos, sob a influência dos prados e dos bosques das propriedades de sua família, ele começou a fazer avanços revolucionários na matemática, ótica, física e astronomia.

Os fundamentos do cálculo diferencial e integral datam desse período, vários anos antes da descoberta independente dos mesmos por Leibniz. Sua primeira abordagem foi nesses anos de 1665–66, quando já tinha comparecido às palestras de Barrow e descoberto o teorema binomial. Ela foi descrita em um artigo, escrito em 1669 mas não publicado antes de 1711, chamado *De analysi per æquationes numero terminorum infinitas*, que circulou entre seus amigos. Aí ele utiliza sua idéia de um retângulo infinitamente pequeno ou momento de uma área e achou as quadraturas como segue: Seja a curva construída de tal forma que para a abscissa x e a ordenada y a área seja $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{n}{m+n}}$. Seja o momento, ou acréscimo infinitesimal na abscissa, ser o. Então a nova abscissa será o e a área aumentada será $z + oy = \left(\frac{n}{m+n}\right) a(x+o)^{\frac{n}{m+n}}$. Se, nessa expressão, aplicarmos o teorema binomial, dividirmos por o e negligenciarmos os termos que ainda contiverem o, o resultado será $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Ou seja, quando a área é dada por $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{n}{m+n}}$, a curva é $y = ax^{\frac{m}{n}}$. De maneira recíproca, se a curva é $y = ax^{\frac{m}{n}}$, sua área é $z = \left(\frac{n}{m+n}\right) ax^{\frac{n}{m+n}}$. Newton aplicou seu método de quadraturas a diversas curvas, tais como $y = x^2 + x^{\frac{3}{2}}$ e $y = \frac{a^2}{b+x}$.

Uma segunda abordagem, que aparentemente também apareceu nesse seu período em Lincolnshire, é encontrado em seu *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, escrito em 1671 mas não publicado até 1736. Aqui, Newton introduziu sua notação característica e seus conceitos. Ele pensava em quantidades variáveis como geradas pelo movimento contínuo de pontos, linhas e planos, ao invés de agregados de elementos infinitesimais, a visão que aparecera do seu *De analysi*. Esse conceito foi considerado suficientemente forte e intuitivo por Newton, a ponto de não precisar de explicações adicionais. A taxa de geração ou movimento era designada por meio de uma letra com um ponto sobre ela, como em $\dot{x}$ ou $\dot{y}$ e chamada de “fluxo” (onde x e y eram as quantidades que eram geradas, chamadas de “fluentes”). As quantidades $\dot{x}$ e $\dot{y}$ eram fluentes com fluxos $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$, e assim por diante. As quantidades x e y eram fluxos dos fluentes $x^{|}$ e $y^{|}$, que por sua vez eram fluxos dos fluentes $x^{||}$ e $y^{||}$, e assim por diante. No seu *Methodus fluxionum* Newton disse claramente qual era o problema fundamental do cálculo: sendo dadas as relações entre quantidades, encontrar as relações entre os fluxos delas; e vice-versa. Como exemplo, determinaremos o fluxo de $y = x^n$. Se o é um intervalo infinitamente pequeno de tempo, então $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ serão os incrementos indefinidamente pequenos, ou os momentos, das quantidades fluentes x e y. Assim, $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$ e, expandindo pelo binômio de Newton e dividindo por o, negligenciando os termos que ainda contiverem o após a divisão, chega-se a $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$.

Essa segunda abordagem não apresenta nenhuma modificação essencial com relação à primeira, além do fato de ser, para Newton, mais intuitiva. Um ponto que ele mesmo percebia ser controverso era a negligência dos termos que ainda contivessem o após a divisão por o. Em sua terceira abordagem, encontrada no *De quadratura curvarum*, escrito por volta de 1676 mas não publicado até 1704, ele tenta resolver esse problema. Em suas palavras:

> Quantidades, e também razões de quantidades, que constantemente tendam à igualdade em qualquer tempo finito, e antes do fim desse tempo se aproximam umas das outras mais do que qualquer diferença dada, se tornam, em última instância, iguais ...
>
> A objeção é que não há uma razão entre quantidades evanescentes, as quais obviamente, antes de terem desaparecido, não são últimas; quando elas desaparecem, não há mais nenhuma. Mas é também pelo mesmo argumento que pode ser contraposto que não há uma última velocidade de um corpo chegando a certa posição; pois antes do corpo atingir essa posição, ela não é última; quando ele a atingiu, não há nenhuma. E a resposta é fácil: por velocidade última eu entendo aquela na qual o corpo é movimentado, não antes que ele chegue à sua última posição e o movimento cesse, nem depois, mas exatamente quando ele chega; ou seja, aquela velocidade mesma pela qual o corpo chega na última posição

> e o movimento cessa. E, similarmente, para o movimento de quantidades evanescentes eu entendo a razão de quantidades, não antes que elas desapareçam, nem depois, mas aquela na qual elas desaparecem. E de forma semelhante a primeira razão nascente é a razão pela qual elas começam. E a primeira e última quantidades são para ser aquelas com a qual elas começam e terminam (ou, se você preferir, a aumentar e diminuir). Há um limite que a velocidade pode atingir no fim do movimento, mas ela não pode passar. Essa é a última velocidade. E a razão do limite de todas as quantidades e proporções, começando e terminando, é igual ...
>
> As últimas razões na qual as quantidades somem não são as razões das últimas quantidades, mas os limites através dos quais a razão das quantidades, decrescendo sem limites, sempre se aproximam; e das quais elas podem se aproximar mais que qualquer diferença dada, mas das quais eles nunca podem passar nem atingir antes das quantidades serem diminuidas indefinidamente.

Além de lançar as bases do cálculo, Newton desenvolveu parte de suas idéias sobre ótica, que mais tarde seriam publicadas em seu *Ótica*. Também estudou o movimento circular e uniforme e, aplicando a análise à Lua e os planetas, derivou a relação que a força entre os planetas e o Sol é radial e varia inversamente com o quadrado das distâncias entre eles. O mundo não havia ouvido nada dessas descobertas ainda.

Quando a universidade de Cambridge reabriu, em 1667, Newton se candidatou a uma cátedra. Em outubro ele foi eleito a uma cátedra pequena no Trinity College mas, após obter o grau de mestre, ele foi eleito a uma cátedra maior em julho de 1668 que o permitia jantar na mesa dos catedráticos. Em julho de 1669 Barrow tentou fazer com que o trabalho de Newton fosse reconhecido pelo mundo. Ele mandou o texto *De analysi* de Newton a Collins. Como esse matemático mantinha correspondência com os matemáticos mais eminentes da época, essa atitude deveria fazer com que Newton fosse rapidamente reconhecido. Collins mostrou o trabalho a Brouncker, presidente da Royal Society (com a permissão do autor), mas logo depois Newton solicitou o manuscrito de volta. Por conversas de Collins, Sluze e Gregory souberam algo desse trabalho. Barrow abandonou a cadeira lucasiana em 1669 para se dedicar ao estudo da teologia, e indicou Newton, que na época tinha apenas 27 anos, para o lugar.

O primeiro trabalho de Newton como professor lucasiano foi em ótica e sua primeira palestra foi dada em janeiro de 1670. Durante os anos da praga, ele chegara à conclusão de que a luz não é uma entidade única. Todo cientista desde Aristóteles pensara diferente, mas a aberração cromática num telescópio convenceu Newton do contrário. Quando passou um raio de luz por um prisma, ele notou o espectro de cores que o formavam. A partir de seus estudos, ele construiu um telescópio refletor.

Em 1672 Newton foi eleito para uma cátedra na Royal Society após doar um telescópio refletor. Também nesse ano ele publicou seu primeiro artigo sobre luz e cores na *Philosophical Transactions of the Royal Society*. O artigo foi bem recebido mas o cientista inglês Robert Hooke e o cientista holandês Christiaan

Huygens objetaram a tentativa de Newton demonstrar, apenas por experimento, que a luz consistia no movimento de minúsculas particulas ao invés de ser uma onda. A recepção a essa publicação não fez nada para melhorar a atitude de Newton em fazer seus resultados serem conhecidos pelo mundo. Ele sempre foi puxado em duas direções, pois havia algo em sua natureza que desejava a fama e reconhecimento mas outro lado que temia crítica e a melhor maneira de evitar ser criticado era não publicar nada. Certamente se diria que sua reação à crítica era irracional, e certamente seu objetivo de humilhar Hooke em público por causa de suas opiniões era anormal. Por causa da alta reputação de Newton, sua teoria corpuscular reinou absoluta até a teoria das ondas ser revivida no século XIX.

As relações com Hooke deterioraram ainda mais quando, em 1675, Hooke disse que Newton roubara alguns de seus resultados em ótica. Apesar dos dois homens terem oficialmente feito as pazes por meio de cartas polidas, Newton se afastou da Royal Society, por considerar que Hooke era um de seus líderes. Quando a Royal Society recebeu o manuscrito do livro I do seu *PhilosophiæNaturalis Principia Mathematica*, em 1686, Hooke disse que aquilo era plágio, uma acusação que não podia ser sustentada de maneira alguma. Por outro lado, a resposta de Newton a ela revela muito de seu caráter. Hooke estaria satisfeito com um reconhecimento generoso; seria um gesto gracioso a um homem doente e já em declínio, e não teria custado nada a Newton. Em vez disso, Newton eliminou praticamente todas as referências a Hooke em seus trabalhos e, em sua fúria, se recusou a publicar seu *Ótica* ou aceitar a presidência da Royal Society até a morte de Hooke, em 1703.

Outra discussão, dessa vez com os jesuítas de Liège sobre sua teoria das cores, levou a uma violenta troca de cartas, e em 1678 Newton sofreu uma crise nervosa, seguida por um longo período de isolamento. A morte de sua mãe no ano seguinte fez com que ele completasse se fechasse ainda mais em sua casca e, por seis anos, ele praticamente não teve comércio intelectual, a não ser por breves correspondências que ele abandonava o mais rapidamente possível.

Durante seu período de isolamento, Newton foi grandemente influenciado pela tradição hermética com a qual ele era familiar desde seus tempos de graduando. Newton, sempre interessado em alquimia, se imergiu na mesma, copiando a mão tratado após tratado e os relacionando para interpretar suas imagens arcanas. Sob a influência da tradição hermética, sua concepção da natureza sofreu uma mudança decisiva. Até então, Newton era um filósofo mecanicista padrão do século XVII, explicando os fenômenos naturais por meio dos movimentos de partículas de matéria, num éter que envolvia todo o universo. Essa filosofia proibia a possibilidade de ação à distância. Por volta de 1679, Newton abandonou o éter e seus fenômenos complicados e começou a associar fenômenos tais como afinidades químicas, a geração de calor em reações, a tensão superficial em fluídos, a ação capilar, a coesão dos corpos, etc., a atrações e repulsões <u>entre</u> partículas de matéria. Apenas cerca de 35 anos depois, Newton voltou a aceitar o éter, na segunda edição de seu *Ótica*, mas um éter que encorpava a possibilidade de ação à distância, postulando uma repulsão entre suas partículas. As atrações e repulsões das especulações de Newton eram transposições exatas das simpatias e antipatias da filosofia hermética. Newton, entretanto, as submeteu a um tratamento matemático exato. Como ele as concebia, as atrações eram definidas quantitativamente, e elas ofereceram uma ponte para unir os dois temas básicos da ciência do século XVII: a tradição mecânica, que trabalhava com imagens de mecanismos, e a tradição pitagórica, que insistia na natureza matemática da realidade.

Por volta de 1679, Newton retomou a correspondência com Hooke, dessa vez versando sobre mecânica celeste. Depois disso, Newton encontrou uma prova de que a lei das áreas de Kepler era uma consequência de forças centrípetas, e ele também mostrou que, se a curva orbital for uma elipse sob a ação de forças centrais, então a dependência radial da força é do inverso dos quadrados das distâncias ao centro. Em agosto de 1684, Newton foi visitado pelo amigo e astrônomo inglês Edmund Halley, que também estava preocupado com o problema da dinâmica orbital. Após descobrir que Newton havia resolvido o problema, Halley obteve dele a promessa de receber a demosntração. Em três meses, Halley recebeu um pequeno tratado intitulado *De Motu*. Dois anos e meio depois, esse tratado era expandido e publicado sob o título de *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, que não apenas é a obra prima de Newton, como é o trabalho fundamental de toda a ciência moderna.

4.2 A controvérsia com Leibniz

Um dos gênios mais versáteis de seu tempo foi o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, nascido em 1646 e morto em 1716. Por volta de 1672, num encontro com Huygens em Paris, ele foi convencido a estudar mais matemática. Em Londres, no ano seguinte, conheceu um número de matemáticos, aprendeu sobre séries infinitas, comprou uma cópia das *Lectures* de Barrow e talvez tenha sabido, através de Collins, da *De analysi* de Newton. Durante seus estudos nesse período, Leibniz estava trabalhando no problema das tangentes, bem como das quadraturas. Lendo o texto *Traité des sinus du quart de cercle*, de Pascal, subitamente uma luz o atingiu: a determinação da tangente a uma curva dependia das diferenças das ordenadas e abscissas, enquanto a determinação da quadratura dependia das somas, e soma e subtração são processos inversos. Leibniz sentiu a necessidade de desenvolver um procedimento de somas e diferenças de infinitesimais, o que ele fez por volta de 1676. Um ano antes, ele já havia adotado a notação $\int x$, ou depois $\int x\,dx$, para a soma de todos os x's, ou a "integral" de x, conforme ele a chamou depois. Para as diferenças entre os valores de x, ele escreveu dx, embora ele inicialmente tenha usado $\frac{x}{d}$, implicando que encontrar a diferença envolvia abaixar uma dimensão da quantidade. Em sua álgebra de diferenciais, ele chegou às mesmas regras de Newton. Expressas em seu simbolismo, $d(xy) = xdy + ydx$ e $\frac{dx}{dy} = \frac{ydx+xdy}{y^2}$. A notação de Leibniz, extremamente poderosa e eficiente, foi rapidamente adotada por todos os matemáticos do continente, embora na Grã-Bretanha a notação de Newton prevaleceu até o século XIX.

Em Leibniz Newton encontrou um adversário mais de seu calibre. Hoje em dia, está bem estabelecido que Newton desenvolveu o cálculo antes de Leibniz pensar em estudar seriamente matemática. É quase universalmente aceito que Leibniz chegou mais tarde ao cálculo independentemente. Nunca houve dúvida de que Newton não publicou seu método dos fluxos; assim, foi o artigo de Leibniz, em 1684, que primeiramente tornou o cálculo público. Nos *Principia* Newton deu dicas desse método, mas ele não o publicou realmente antes de anexar dois artigos ao seu *Ótica* de 1704. Nessa época, a controvérsia já estava perdendo seu calor. É impossível dizer quem começou. O que eram apenas ácidas críticas rapidamente se tornou fortes acusações de plágio de ambos os lados. Levado por seguidores ansiosos por ganhar reputação às suas custas, Newton se deixou levar ao centro da discórdia; e, uma vez que seu temperamento foi espicaçado por acusações de desonestidade, sua ira ficou além dos limites. A condução da controvérsia por Leibniz não foi muito agradável, mas era pálida perante a de Newton. Apesar de nunca ter aparecido em público, Newton escreveu a maioria das peças que apareceram em sua defesa, publicando-as em nome de seus jovens discípulos, que nunca negaram a autoria. Como presidente da Royal Society, ele apontou um comitê "imparcial" para investigar a questão, secretamente escreveu o relatório oficialmente publicado e a resenhou anonimamente nas *Philosophical Transactions*. Mesmo a morte de Leibniz não diminuiu a fúria de Newton, e ele continuou a perseguir o inimigo além do túmulo. A batalha com Leibniz e a necessidade incontrolável de afastar a acusação de desonestidade dominaram os últimos 25 anos da vida de Newton. Isso o envolvia quase inconscientemente. Quase todos os artigos em qualquer assunto nesses últimos anos continham um parágrafo furioso contra o filósofo alemão, e ele afiou os instrumentos de sua fúria com ainda mais cuidado. No fim, apenas a morte de Newton aplacou sua vingança.

Capítulo 5

Os fundamentos do cálculo

Alguns anos após os trabalhos de Newton serem publicados, eles foram alvos de uma forte crítica pelo filósofo e teólogo inglês George Berkeley. Em seu tratado de 1734, *O Analista*, Berkeley não negou a utilidade dos procedimentos, nem a validade dos resultados. Ele apenas observou que os matemáticos estavam se valendo de raciocínios indutivos, e não dedutivos. Outra crítica de Berkeley foi que, quando Newton utilizava seu o, ele esquecia da lei da contradição, pois trabalhava com uma quantidade como se ela não fosse zero para, logo depois, cancelá-la. Se contrapondo violentamente a Berkeley, outro inglês, James Jurin, dizia que não é que o incremento nesse caso era nada, mas ele era deixado "evanescente" ou "ao ponto de evanescência", afirmando que "há uma última proporção de incrementos evanescentes." Essa crítica é fraca porque ele não deixa claro o que significam esses termos.

Apesar desses debates, a grande maioria dos matemáticos aceitou o cálculo, para poder explorar suas possibilidades. Essas idéias foram aplicadas numa grande quantidade de problemas, que, por sua vez, foram clarificando as bases do cálculo.

Após o estabelecimento da mecânica de Newton, um problema bastante abordado foi o da solução de equações diferenciais. Por exemplo, no caso de uma mola cuja deformação é proporcional à força nela exercida, tem-se, da segunda lei de Newton, a seguinte igualdade: $m\ddot{x} = kx$. Tentando resolver esse tipo de equações, o matemático inglês Brook Taylor, em 1715, argumentando as propriedades de diferenças finitas, chegou a uma expressão que relaciona $f(x+h)$ em termos de $f(x)$ e seus quocientes de diferenças de várias ordens. Então, ele fez essas diferenças ficaram pequenas, passou ao limite, e chegou à expressão que ainda hoje tem seu nome: a série de Taylor. O matemático suíço Euler, alguns anos mais tarde, aplicou isso para a resolução de problemas de máximo e mínimo, e notou que, para um ponto de mínimo, a segunda derivada é positiva e, para um ponto de máximo, a segunda derivada é negativa.

Dando continuidade ao processo de desenvolvimento do cálculo, o matemático francês Lagrange criticou os fundamentos lógicos oferecidos por Newton e, impressionado pelos trabalhos de Euler com as séries infinitas de Taylor, pensou em reformular o cálculo em termos de uma álgebra de séries infinitas. Assim, ele inverteu o procedimento, definindo a derivada como sendo o primeiro termo da expansão de uma função em série de Taylor. Isso trouxe ganhos significativos, tendo-se descoberto daí uma série de propriedades importantes. Uma delas é:

> Dado D, h pode ser escolhido de forma que $f(x+h) - f(x)$ fique entre $h(f'(x) - D)$ e $h(f'(x) + D)$.

Essa fórmula está muito próxima da definição moderna em termos de ϵ e δ. Deve-se observar, também, que a definição de Lagrange foi uma primeira tentativa, ainda que imperfeita, de tornar o conceito de derivada independente de qualquer fato geométrico ou do movimento.

O problema da definição de Lagrange é que ele assum que toda função possa ser expressa como uma série de Taylor. Cauchy observou, em 1821, que a álgebra de quantidades finitas não pode ser automaticamente extendida para processos infinitos. E, como ele observou, a manipulação de séries de Taylor não é infalível. Por exemplo, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ tem sua série de Taylor nula em torno do ponto 0, mas a função não é identicamente nula.

O matemático francês Cauchy substituiu a definição de Lagrange por uma dele próprio, que se assemelhava à caracterização dada por Lagrange em termos de épsilons e deltas. Só que ele tornou básico o conceito de limite. Em suas palavras, encontradas no seu *Cours d'analyse*: "Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixado de forma que, no fim, se diferenciam dele tão pouco quanto se queira, este último é chamado de limite de todos os outros." Cauchy então definiu a derivada como sendo o limite do quociente $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ conforme i[1] se aproxima de zero. E, pela primeira vez na história, definiu a integral sem qualquer apelo ao conceito de área: a integral de x_0 a X é o limite das somas $S_n = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_n - 1)f(x_{n-1})$, conforme os valores absolutos de $x_{i+1} - x_i$ decrescem indefinidamente. Apesar de se aproximar muito da definição atual de derivada, a de Cauchy possui deficiências no que diz respeito aos conceitos de convergência uniforme. Quer dizer, dado um ϵ, ele escolhia um δ que funcionava para qualquer x. Posteriormente, isso foi alvo de críticas que levaram Stokes, Seidel, Weierstrass e o próprio Cauchy a estudarem as diferenças entre convergência e convergência uniforme.

Weierstrass, um matemático alemão, é o autor da definição moderna limite, em meados do século XIX:

> Uma função f possui um limite l no ponto a quando, dado qualquer $\epsilon > 0$, pode-se encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \epsilon$.

Weierstrass não fez apenas isso. Seu avanço com relação a Cauchy pode, inicialmente, parecer apenas de notação. Usando uma notação simbólica clara e adequada, ele evitava cair nos erros que Cauchy caiu. Mas ele observou, além do

[1] Essa é a notação de Cauchy, mas o i não tem nada a ver com a unidade imaginária, sendo apenas uma variável real.

mais, a necessidade de uma definição clara de número real, pois que o conceito de limite depende dessa definição. Nos trabalhos de Cauchy, a noção de "tão próximo quanto se queira", "indefinidamente pequeno", etc., apelavam, ainda que não pareça, a conceitos geométricos e de movimento. Com Weiestrass, e um número pequeno de matemáticos que seguiram suas idéias, como Cantor e Dedekind, o cálculo, ou análise, chegaram a tal perfeição em construção que superarou, enfim, o rigor grego. A análise se tornou independente da geometria e dos conceitos de movimento, tornando-se essencialmente numérica e estática.

É irônico, pensar que, atualmente, é a geometria que está subordinada à análise, uma vez que ela é utilizada quase sempre para ilustrar provas que, em última instância, devem ser formuladas sem apelo a ela. E, numa discussão mais séria, quando a geometria é corretamente axiomatizada, a consistência de seus axiomas é demonstrada tomando por modelos estruturas numéricas. De uma certa forma, a luta de Pitágoras, que começou há quase vinte e cinco séculos, para expressar tudo em termos de números está mais presente hoje do que nos séculos que nos separam dele.

Capítulo 6

Análise epistemológica

A influência do pensamento grego fez com que, no campo da matemática rigorosa e bem produzida, houvesse um paradigma, por assim dizer, de uma ciência sintética, onde a ênfase estava nas individualidades. Nesse panorama, é fácil entender por que Arquimedes não pensou em generalizar o método da exaustão, ainda que isso pareça, para quem vê seus trabalhos hoje em dia, o procedimento mais natural. Parte disso pode ter sido conseqüência do efeito que a descoberta da incomensurabilidade pelos pitagóricos causou. Como dissemos no segundo capítulo, os pitagóricos tinham por objetivo unificar os reinos da aritmética e da geometria. O escândalo dos incomensuráveis e, mais tarde, dos paradoxos de Zeno, foi decisivo para que a matemática dos antigos se revestisse desse caráter axiomático e sintético.

Na Idade Média, a perda do rigor, aliada a uma discussão filosófica sobre a natureza do infinito, tudo isso sob a influência cada vez maior da álgebra, fez com que, pouco a pouco, fossem buscadas alternativas aos procedimentos complicados dos gregos.

Sob a ótica heurística de Moles, o que estava sendo feito nesse período não era tanto a criação de algo novo, mas a transferência da teoria geométrica para um domínio onde ela não era aplicada, a da ciência do movimento. Mais que isso, uma mistura das teorias da geometria e da álgebra foi sendo, quase que inconscientemente, feita.

O renascimento comercial, que praticamente forçou o desenvolvimento de uma matemática rápida e eficiente, foi também responsável pela busca de novos caminhos (ou seja, a influência da sociedade nessa época foi particularmente significativa). A idade de ouro dos gregos, no ambiente idílico da antiga Hélade estava acabada. O rigor, que aos poucos estava perdendo força, foi quase completamente esquecido. Os séculos que antecederam o cálculo podem ser pensados como constituíndo um período pré-paradigmático, como se algo estivesse sendo procurado, mas ninguém tivesse consciência disso. A proliferação de métodos de quadraturas, as discussões sem fim sobre o uso dos infinitesimais, tudo pode ser encarado como o equivalente (mas não no sentido estrito) de um período de crise como descreve Kuhn.

Analisaremos agora o desenvolvimento do cálculo e seus fundamentos, de Fermat a Weierstrass, sob a ótica da epistemologia de Lakatos.

Para começar, pode-se pensar que os trabalhos de Fermat, por exemplo, eram aplicações do conceito de derivada, que estava sendo usada sem ser explicitamente reconhecida. As quadraturas de curvas geométricas, feitas desde a Antiguidade, também eram aplicações do conceito de integral não reconhecidas como tal.

O que Newton e Leibniz fizeram foi organizar essas idéias à luz de dois conceitos, quais sejam a derivada e a integral, notando ainda que uma é a operação inversa da outra. Com esses conceitos em mãos, eles conseguiram generalizar os procedimentos conhecidos e abriram um novo campo de pesquisa. É nesse contexto que podemos dizer que eles inventaram, ou descobriram, o cálculo. Mesmo nessa época, já se percebia alguns problemas, como o quociente de diferenciais de Leibniz, e o fato de Newton usar seu o inicialmente como um número que não é zero, para depois desprezá-lo como sendo zero.

Podemos, nesse ponto, fazer uma análise lakatosiana. Temos uma teoria, que no caso é o cálculo. Após descoberta, ela é alvo de duras críticas em suas bases, como as de Berkeley. Ao mesmo tempo, surgem partidários que defendem de maneira árdua essas mesmas bases, nem sempre sob o ponto de vista científico, como as posições de James Jurin.

As críticas de Berkeley eram válidas, mas não foram levadas a sério pela maioria dos matemáticos do período. O motivo é que o valor da nova matemática era indiscutível, e sua eficácia para a resolução de problemas enorme. Surgiu, com o cálculo, um novo paradigma, em contraposição ao método sintético dos antigos. Nesse momento, a matemática apareceu como fornecendo métodos gerais, aplicáveis a uma grande quantidade de problemas. Assim, enquanto para os que antecederam Newton e Leibniz o cada curva fornecia um novo problema de quadratura, os princípios da integração procuravam atender a todas as quadraturas.

Mas, pouco a pouco, a crença no poder sobre-humano de descobertas foi dando lugar a um espírito crítico. Em parte, isso pode ser atribuído a uma série de divergências quanto à validade de métodos. Cada homem tinha sua própria maneira de aplicar o cálculo, e a falta de definições adequadas fazia com que impasses surgissem sem poderem ser resolvidos. Um exemplo bastante famoso pode ser citado. Seja a série infinita $S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Agrupando-se os termos da série como segue: $(1-1)+(1-1)+\cdots$, chega-se ao resultado $S = 0$. Mas agrupando-se da outra forma $1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots$, chega-se ao resultado contraditório $S = 1$.

Houve tentativas e tentativas. No capítulo anterior, falamos da definição posicional da derivada segundo Lagrange. Configura-se novamente um quadro lakatosiano, onde o conceito é aprimorado em cima de críticas e refutações de provas precedentes. O exemplo de Cauchy, da função $e^{-\frac{1}{x^2}}$, pode ser encarado como um "monstro", nesse sentido. Outro exemplo tradicional e famosíssimo, de Weierstrass é o de uma função que é contínua em todos os pontos mas não é diferenciável em nenhum. Daí sai que as concepções geométricas, que foram fundamentais para todo o desenvolvimento da matemática, foram finalmente consideradas como atrapalhando a análise. Os matemáticos concluíram que a própria noção de número deveria ser revista, pois ela estava na base das definições a que eles chegaram. Esse período revisionista culminou com uma das mais perfeitas realizações da humanidade: a aritmetização da análise. O infinito finalmente encontrou seu lugar. Lembrando Hilbert: "A análise é uma sinfonia do infinito."

Como se vê, o último passo do cálculo foram as definições, obtidas após um longo processo de provas e refutações, completando o ciclo dialético de Lakatos.

Uma forma interessante de encarar os passos de desenvolvimento dos conceitos do cálculo é pensar que, primeiramente, eles foram descobertos. Depois, explorados e desenvolvidos. E, por último, definidos. Disse Kant, em sua *Crítica da Razão Pura*:

> Todo conhecimento humano começa com intuições, procede com conceitos e termina com idéias.

Capítulo 7

Conclusão: Os últimos anos de Newton

Os *Principia* deram imediatamente a Newton proeminência internacional. Jovens cientistas britânicos espontaneamente o reconheceram como modelo. Newton, cujos únicos contatos próximos com mulheres foram com sua mãe, que o abandonou, e sua sobrinha, que cuidou dele na velhice, sentiu satisfação no papel de patrono do círculo de jovens cientistas. Sua amizade com Fatio de Duillier, um matemático nascido na Suíça e que residia em Londres, foi a mais profunda experiência emocional de sua vida adulta.

James II se tornou rei da Grã-Bretanha no dia 6 de fevereiro de 1685. Ele se converteu à Igreja Católica Apostólica Romana em 1689, mas quando foi ao trono ele teve forte apoio dos anglicanos, bem como dos católicos. Entretanto, surgiram rebeliões, que James ignorou mas que, aos poucos, fizeram com que ele desconfiasse dos protestantes e começasse a indicar católicos para postos de oficiais do exército. Ele foi ainda mais longe, indicando católicos como juízes e oficiais do Estado. Sempre que uma posição em Oxford ou Cambridge ficava vaga, o rei apontava um católico para preenchê-la. Newton era um protestante fervoroso e se opôs fortemente ao que ele viu como um ataque à Universidade de Cambridge. Tendo ajudado a resistência de Cambridge contra a catolicização tentada por James II, após a fuga de James para a França (com a chegada de William de Orange e seu exército, em 1668, para derrotar James), Newton foi eleito para uma das duas posições da universidade de Cambridge para a convenção do parlamento em 15 de janeiro de 1689. Nessa convenção, que ofereceu a coroa a William e Mary, após considerar que James abdicou de sua coroa, Newton foi visto como um líder da universidade e um dos mais eminentes matemáticos do mundo. A partir daí, Newton viu em Londres a possibilidade de uma vida que o atraía mais que a do mundo acadêmico em Cambridge. Aconselhado por Fatio para procurar uma posição em Londres, e pela agência de seu amigo, o político em ascenção Charles Montague (mais tarde, lorde Halifax), Newton foi apontado como Guardião da Mente Real, em 1686. Apesar de não abandonar suas posições em Cambridge até 1701, ele se mudou para Londres e centrou sua vida lá.

Nesse meio tempo, as relações de Newton e Fatio declinaram. Fatio ficou muito doente; e a família, mais problemas financeiros, ameaçaram-no de retornar à Suíça. O desespero de Newton não teve limites. Em 1693 ele sugeriu que Fatio se mudasse para Cambridge, onde o sustentaria, mas nada saiu dessa proposta. Até o princípio de 1693 a intensidade das cartas de Newton era quase palpável mas, sem nenhuma explicação que tenha chegado aos nossos dias, o relacionamento próximo e a correspondência acabaram abruptamente. Dois amigos pessoais de Newton, Samuel Pepys e John Locke, receberam cartas altamente acusatórias, e isso os alarmou quanto à sanidade de Newton. Nesse mesmo ano de 1693, Newton sofreu uma segunda crise nervosa. Newton atribuíu, posteriormente, esse ataque à suas crises de insônia, mas provavelmente essas eram apenas um efeito da doença. Atualmente, historiadores atribuem, como causa, problemas pessoais, contaminação por causa dos experimentos em alquimia e problemas resultantes de suas crenças religiosas.

Como Guardião e, posteriormente, Mestre da Mente, Newton conseguiu muito dinheiro, chegando a receber 2000 libras anuais. Essa posição, considerada apenas como sinecura, não foi encarada por Newton como tal. Durante a grande recunhagem de moedas, houve a necessidade de que ele estivesse ativamente no comando; mesmo depois, entretanto, ele escolheu ficar no serviço. Acima de tudo, ele estava interessado em falsificações. Ele se tornou o terror dos falsificadores de Londres, mandando um bom número deles para a forca e encontrando neles um alvo socialmente aceitável para descarregar o ódio que continuava a existir em si.

Nessa última década do século XVII, Newton se dedicou a estudos bíblicos. No começo da década, ele enviou um manuscrito a Locke que tentava demonstrar que as passagens trinitarianas da Bíblia eram uma corrupção do texto original. Quando Locke pensou em publicar esse manuscrito, Newton desistiu com medo de que suas visões anti-trinitaristas fossem conhecidas. Mais tarde, ele devotou muito tempo à interpretação das profecias de Daniel e São João, e a um estudo bastante relacionado de cronologia antiga.

Em 1703, ele foi eleito presidente da Royal Society e reeleito ano após ano até sua morte. Ele foi tornado cavaleiro pela rainha Ana em 1705, o primeiro cientista a receber tal honra por seu trabalho. Mas a última porção da sua vida não foi fácil, dominada de muitas maneiras pela controvérsia com Leibniz sobre quem inventara o cálculo. Quanto à sua presidência na Royal Society, foi considerada autoritária, e mesmo tirânica. O astrônomo real, John Flamsteed, colecionou em seus anos no observatório real de Greenwich um conjunto impressionante de dados. Newton recebeu informação necessária dele para os *Principia* e, na década de 1690, enquanto trabalhava com a teoria lunar, novamente precisou dos dados de Flamsteed. Irritado por não conseguir toda a informação que ele queria tão rapidamente quanto desejava, Newton usou sua influência no governo para ser nomeado à cadeira de um corpo de “visitantes” responsáveis pelo observatório real; então tentou forçar a publicação do catálogo de estrelas de Flamsteed. Esse episódio infeliz prosseguiu por quase dez anos.

Newton quebrou compromissos com Flamsteed. As observações, frutos de uma vida de trabalho, foram preparadas para impressão por Edmond Halley, inimigo mortal de Flamsteed. Este conseguiu, enfim, ganhar na corte o direito de evitar a distribuição das cópias impressas, as quais ele tomou e queimou; elas só foram publicadas após sua morte. Flamsteed foi um dos poucos homens a levar a melhor sobre Newton, a um considerável custo para si mesmo. Para se vingar, Newton eliminou sucessivamente todas as alusões a Flamsteed nos *Principia*.

No século XVIII, Newton trouxe novas edições de seus trabalhos centrais. Aós a primeira edição do *Ótica* em 1704, que meramente publicou trabalho feito 30 anos antes, ele publicou uma edição latina em 1706 e uma segunda edição inglesa em 1717–8. Seus *Principia* tiveram ainda duas edições. Até quase o fim, Newton presidiu a Royal Society, freqüentemente comparecendo às reuniões, e supervisionou a Mente Real. Em seus anos finais, sua sobrinha, Catherine Barton Conduitt, e seu marido viveram com ele.

Na Abadia de Westminster, acham-se os restos mortais de Newton. Seu funeral foi acompanhado pela grande maioria dos membros da Royal Society. Seu epitáfio, escrito por Alexander Pope, diz: "Estavam ocultas na escuridão a natureza e suas leis; Deus disse: 'Haja Newton' e a luz se fez." Num monumento, perto de seu túmulo, está um monumento a Newton e seus trabalhos. Nele se lê:

> H.S.E. ISAACUS NEWTON Eques Auratus,
> Qui, animi vi prope divinâ,
> Planetarum Motus, Figuras,
> Cometarum semitas, Oceanique Aestus
> Suâ Mathesi facem praeferente.
> Primus demonstravit:
> Radiorum Lucis dissimilitudines,
> Colorumque inde nascentium proprietates,
> Quas nemo antea vel suspicatus erat, pervestigavit.
> Naturae, Antiquitatis, S. Scripturae,
> Sedulus, sagax, fidus Interpres
> Dei O. M. Majestatem Philosophiâ asseruit,
> Evangelij Simplicitatem Moribus expressit.
> Sibi gratulentur Mortales,
> Tale tantumque exstitisse
> HUMANI GENERIS DECUS.
> NAT. XXV DEC. A.D. MDCXLII. OBIIT. XX. MAR. MDCXXVI

que pode ser traduzido como:

> Aqui está enterrado Isaac Newton, cavaleiro,
> O qual, por força da mente quase divina,
> E princípios matemáticos peculiares de si próprio,
> Explorou o curso e as figuras dos planetas,
> As trajetórias dos cometas, as marés do oceano.
> Demonstrou, pela primeira vez,

As dissimilaridades nos raios de luz,
E, o que nenhum estudioso havia previamente imaginado,
As propriedades das cores então produzidas.
Diligente, sagaz e fiel,
Em suas exposições da natureza, da antigüidade e das Sagradas Escrituras,
Ele conseguiu, por sua filosofia, a majestade do Deus poderoso e bom,
E expressou a simplicidade dos Evangelhos à sua maneira.
Devem congratular-se os mortais
Por haver surgido
Essa imensa glória do gênero humano!
Nascido a 25 de dezembro de 1642, morto a 20 de março de 1726.

Figura 7.1: Monumento a Newton, na abadia de Westminster.

Bibliografia

A biografia de sir Isaac Newton pode ser encontrada na enciclopédia Britânica:

[1] *Enciclopædia Britannica*, 15^a ed., 1989

Uma outra excelente fonte de biografias (e imagens) é o site da Internet

[2] `http://www.gap-system.org/~history`

Pequenos detalhes podem ser encontrados na coleção

[3] Antônio Marmo de Oliveira, Agostinho Silva; *Biblioteca da Matemática Moderna*, 4^a ed., Lisa 1971

Um dos livros mais completos da história do cálculo é o clássico

[4] Carl B. Boyer; *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover 1959

Há também o mais recente

[5] C. H. Edwards, Jr.; *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag 1979

O artigo abaixo é bastante interessante e informativo:

[6] Judith V. Grabiner; *The Changing Concept of Change: the Derivative from Fermat to Weierstrass*, **Mathematics Magazine**, vol.56, no.4, September 1983

As idéias de Moles usadas aqui estão no livro

[7] Abraham A. Moles; *A Criação Científica*, Editora Perspectiva 1971

As idéias de Lakatos usadas aqui estão no seu clássico

[8] I. Lakatos; *Provas e Refutações—A Lógica da Descoberta Matemática*, Zahar Editores 1978