RAÍZES DO CÁLCULO NA GRÉCIA ANTIGA

Antonio Carlos Brolezzi
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Ouro Preto/MG

RESUMO

Neste artigo, estudamos o início do desenvolvimento conceitual do Cálculo Diferencial e Integral na Grécia Antiga: os infinitésimos de Demócrito, os paradoxos de Zeno, o método de exaustão de Eudoxo e o cálculo da área sob a parábola por Arquimedes. Também sugerimos uma aplicação desse estudo ao ensino do Cálculo.

Palavras-chave: *Cálculo - História - Grécia Antiga - Ensino*

ABSTRACT

In this paper we study the beginning of the conceptual development of the Differential and Integral Calculus in Ancient Greece: Democrito's infinitesimals, Zeno's paradoxes, Eudoxo's method of exhaustion and the calculus of the area under the parabola by Archimedes. We also suggest an application of such study to the teaching of the Calculus.

Keywords: *Calculus - History - Ancient Greece - Teaching*

O Cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos matemáticos gregos na sua tentativa de expressar suas idéias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como contínuas, em termos de números, que consideravam discretos.

Boyer[1]

Iremos encontrar a origem das idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral na história da Matemática grega. Segundo a História, os gregos possuíam, já na época em que Euclides escrevia "*Os Elementos*", quase todos os fundamentos para desenvolver o Cálculo, mas ficaram presos por algumas concepções restritivas.

Foram os gregos os primeiros a procurar a compreensão dos fenômenos ligados ao infinito, ao contínuo, ao infinitésimo, em busca de uma explicação para o movimento e as transformações dos seres. Da idéia de movimento virão os primeiros conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.

Após a crise dos incomensuráveis, que pode ser situada no seio da nascente escola pitagórica, irá surgir outra grande polêmica muito fértil entre os filósofos pré-socráticos. Ao que tudo indica, o problema da incomensurabilidade entre magnitudes gerou algumas concepções polêmicas acerca da natureza do mundo físico, como a *doutrina atomística*, defendida por Demócrito, que propunha a existência do *infinitamente pequeno* compondo o ser das coisas[2].

Demócrito, no século quinto a.C., foi o primeiro matemático grego a determinar o volume da pirâmide e do cone. Apesar de os egípcios já saberem encontrar o volume da pirâmide de base quadrada, o mérito de Demócrito está em ter generalizado, bem ao estilo grego, a maneira de determinar o volume para pirâmides de base poligonal qualquer. Para obter o volume do cone, bastava uma inferência natural obtida pelo aumento, repetido indefinidamente, do número de lados do polígono regular formando a base da pirâmide. Foi, assim, o primeiro a falar de *infinitesimais*, pensando em utilizar lâminas circulares infinitamente finas para calcular o volume de cilindros e cones, antecipando-se assim ao teorema de Cavalieri, nesses casos[3].

A teoria dos infinitesimais de Demócrito e seus seguidores foi combatida duramente por outra escola filosófica, nascida em Eléa (Magna Grécia), pelo influxo das idéias de Parmênides. A doutrina eleática chamava a atenção para os paradoxos e contradições existentes na concepção do mundo físico como composto por partículas infinitamente pequenas e indivisíveis. Propunha, em substituição, considerar a imutabilidade e unidade essencial do mundo físico.

Um aluno de Parmênides, Zeno de Eléa, entrará para a História com seus famoso dons dialéticos[4]. Zeno dizia que a idéia de infinitésimos é totalmente absurda, pois se possuem algum comprimento, então uma quantidade infinita deles irá compor uma reta de comprimento infinito; e se não têm nenhum comprimento, então uma quantidade infinita deles tampouco terá comprimento algum. Além disso, dirá também: aquilo que acrescentado a outro não o faz maior, e subtraído de outro não o faz menor, é simplesmente *nada*.

Mais famosos ainda que esses argumentos são seus quatro *paradoxos sobre a impossibilidade do movimento*. A questão por trás dos paradoxos está em se considerar tempo contínuo e espaço discreto, ou vice versa. Os paradoxos de Zeno recolhem a sensação de certo desamparo intuitivo, pois relatam uma situação de perplexidade comum frente à continuidade e ao infinito. Por exemplo, no caso do *Paradoxo da Dicotomia*, Zeno nos coloca frente à aparente impossibilidade de percorrermos um número infinito de distâncias num tempo finito. No *Paradoxo da Flecha,* Zeno vai contra a noção de espaço e tempo constituído por partes indivisíveis. Os paradoxos de Zeno ilustram a perplexidade da mente ante os fenômenos do movimento e da velocidade, trazendo à tona controvérsias intrínsecas que, em geral, tendem a passar despercebidas.

Como conseqüência da perplexidade ante esses fenômenos, os gregos desenvolveram o que se chamou de *Horror ao Infinito*, que na Matemática teve conseqüências muito importantes. Segundo Boyer, a Matemática adquiriu outra configuração após Zeno:

> *As grandezas não são associadas a números ou pedras, mas a segmentos de reta. Em* Os Elementos *os próprios inteiros são representados por segmentos. O reino dos números continuava a ser discreto, mas o mundo das grandezas contínuas (e esse continha a maior parte da Matemática pré-helênica e pitagórica) era algo à parte dos números e devia ser tratado por métodos geométricos.*[5]

De início, a atitude se concretizou numa separação quase completa entre a Teoria dos Números e a Geometria. Pode-se dizer que o "horror ao infinito" gerou, ou ao menos contribuiu significativamente, para o desenvolvimento da *Álgebra Geométrica*, que consistia na resolução de problemas aritméticos ou algébricos lidando diretamente com grandezas contínuas. A álgebra geométrica ficou registrada principalmente no Livro II de *Os Elementos* de Euclides, obra cujos treze volumes foram publicados entre 330 e 320 aC.

A obra de Euclides representa o início da busca que resultará no Cálculo Diferencial e Integral. Euclides reúne toda a elaboração grega dos séculos anteriores, e registra o momento em que os pesquisadores começam a se voltar para a possibilidade da exploração da continuidade e da geometria em termos de análise algébrica, interessando-se mais por métodos de redução como o método de exaustão de Eudoxo. Não é por acaso que Arquimedes, bem como todos os criadores do Cálculo no século dezessete, irão se voltar para Euclides e tentar buscar aí as idéias do Cálculo.

Para verificarmos de que forma os gregos estavam próximos do Cálculo, é preciso explicar antes o *Método de Exaustão* de Eudoxo e a utilização que dele fez Arquimedes.

Eudoxo desenvolve o seu *Método da Exaustão* baseado em um princípio que acabará por ficar conhecido como *Postulado de Arquimedes*, embora o mesmo o atribua a Eudoxo[6]. O enunciado desse axioma é dado por Euclides X, 1, dizendo que, dadas duas grandezas diferentes (ambas não nulas),

> *se da maior subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, e do que restou subtrairmos uma grandeza maior que a sua metade, repetindo esse processo continuamente, restará uma grandeza que será menor que a menor grandeza dada.[7]*

O que há de fantástico nesta definição é que exclui o *infinitesimal* de todas as demonstrações geométricas dos gregos. Além disso, permite raciocinar sem ultrapassar a compreensão intuitiva clara, pois Eudoxo não propõe ir até o infinito para de fato atingir o limite, mas apenas afirma que se pode chegar a uma grandeza tão pequena quanto qualquer outra dada.

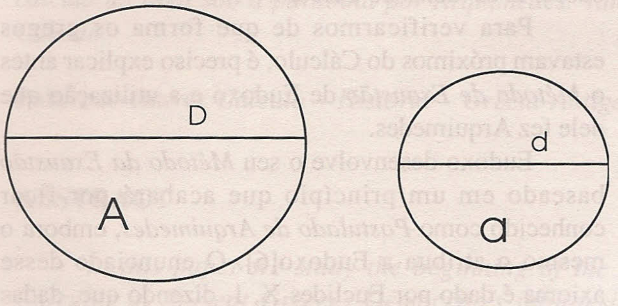
A diferença entre o *método de exaustão* e o *limite* do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa *passagem ao infinito*, pois não tinham noção de um *continuum* aritmético. Mas o tipo de argumentação é o mesmo, tanto no caso do atual *limite* quanto no *método de exaustão* geométrico. Pode-se talvez dizer que a noção de limite tivesse sido vislumbrada pelos gregos, como se poderia inferir do fragmento de Aristóteles:

> *Minha teoria não tira nada às considerações dos matemáticos, ao suprimir o infinito que existiria em ato segundo o acréscimo infinito, que não se poderia recorrer: pois os matemáticos não necessitam realmente do infinito e não o utilizam; só necessitam de uma magnitude finita que escolhem tão grande quanto queiram.*[8]

Vejamos com um exemplo como é possível a comparação entre o *método de exaustão* e o *uso do* *conceito de limite[9]*. A proposição 2 de Euclides XII, de que as áreas de círculos estão na mesma razão que as áreas dos quadrados de lado igual aos seus diâmetros, é demonstrada da seguinte forma:

Se A e a são as áreas dos círculos de diâmetros D e d respectivamente, então temos que provar que

$$a : A = d^2 : D^2.$$



[Figura 1]

Supondo, por absurdo, que não seja assim. Então haverá uma outra área a' de modo que a' : A = $d^2 : D^2$. Se a' for *menor* que a, então no círculo de área a podemos inscrever um polígono de área p tal que p seja *maior* que a' e *menor* que a. Isso é sempre possível, pelo *princípio da exaustão* (Proposição de Euclides X, 1), que diz que se de uma grandeza (como, no caso, a diferença entre a e a'), retirarmos mais do que sua metade, e da diferença mais do que a metade, e assim por diante, a diferença pode ser feita *menor* que qualquer grandeza dada. Se P é a área de um polígono semelhante inscrito no círculo de área A, então sabemos que p : P = $d^2 : D^2$ =a' : A. Mas como p > a', então P > A, o que é absurdo, uma vez que o polígono está inscrito no círculo. De um modo similar pode ser demonstrado que a suposição a' > a leva igualmente a uma contradição, e a verdade da proposição fica estabelecida.

Note-se que o *método da exaustão* não exige que o polígono inscrito chegue a *coincidir* com o círculo, mas apenas lida com o fato de a diferença poder ser tão pequena quanto desejarmos. Daí que ele seja similar em temos de *raciocínio* com o uso de limites.

Por exemplo, se considerarmos a seqüência infinita $P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ...$ como sendo as áreas dos polígonos inscritos, teríamos um limite C tal que, dado qualquer número positivo ε, podemos encontrar um outro inteiro positivo N, tal que para n > N pode ser demonstrado que

$$|C - P_n| < \varepsilon .$$

Essa é uma formulação, em termos de limites, do raciocínio de Eudoxo. Só que na linguagem dos limites não se faz uso de noções intuitivas de área, nem de tentativas de imagens sensoriais que ilustrem o que está acontecendo em cada passo. Os limites simplesmente lidam com símbolos pré-definidos, sem se preocupar com qualquer visualização mental, mas apenas com as possibilidades fornecidas pelas definições adotadas[10] . Essa expressão formalizada da noção de limite data do século XIX. Mas as idéias já estavam no mundo grego, embora não tenham se desenvolvido mais devido ao fato de que

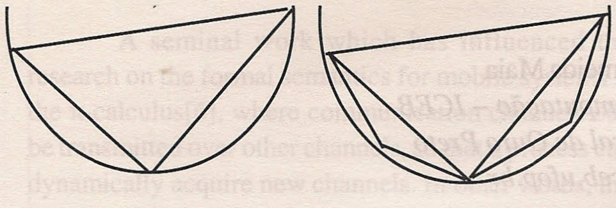
> *a Matemática grega não incluía um conceito geral de número e, conseqüentemente, nenhuma noção de uma variável contínua algébrica sobre a qual tais teorias pudessem ser logicamente baseadas.[11]*

Mas o surgimento do Cálculo no século dezessete está em plena conexão com a busca de meios de simplificar os métodos gregos, como o *método da exaustão.* Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta verificar que Arquimedes (287-212 aC) realizou o *Cálculo da área sob a parábola[12]* antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral.

Em sua obra *O Método[13]*, Arquimedes chega ao resultado de que um segmento parabólico é 4/3 do triângulo de mesma base e vértice (o vértice do segmento é o ponto a partir do qual a perpendicular à base é maior). Após obter um resultado pelo seu *método mecânico,* demonstrava-o pelo *método da exaustão.*

Para *provar* o resultado obtido para a área sob a curva da parábola, Arquimedes inscreve no segmento parabólico um triângulo de área A, tendo a mesma base e vértice que o segmento, e mostra que a área do segmento parabólico tem área $\frac{4}{3}A$. Dentro de cada um dos segmentos menores tendo os lados do triângulo como base, ele inscreve triângulos similares. Prosseguindo da mesma forma, ele obtém uma série de polígonos com um número crescente de lados.

Arquimedes então demonstra que a área do n-ésimo polígono é dada pela soma de uma série. Arquimedes não achou o limite da série, apenas encontrou a soma dos n termos e acrescentou o restante, que pode ser feito *tão pequeno quanto se quisermos.* Mas é importante frisar que Arquimedes não usa a noção de *limite* e sim o princípio da exaustão, o qual permite considerar que a área do segmento parabólico não podia ser nem maior nem menor que o valor obtido, que é $\frac{4}{3}A$.



[Figura 2]

Para definir $\frac{4}{3}A$ como a *soma de uma série infinita*, Arquimedes precisaria valer-se de um conceito geral de *número real*, o qual não estava disponível em sua época. Segundo Edwards[14], faltava a Arquimedes a noção de *passagem ao limite*, pois ele partilhava com os gregos do chamado *horror ao infinito*.

Vemos assim que as idéias iniciais do Cálculo tiveram sua origem nas tentativas de compreensão da relação entre o discreto e o contínuo, já desde a visão estática grega, quebrada em parte pela descoberta pitagórica dos incomensuráveis, que deram a largada na corrida em busca de definições satisfatórias de número e infinito. A distinção entre o Repouso e o Movimento fará parte dessa busca. A consideração do movimento, fonte de inquietação no tempo de Zeno, acabou por abrir caminho a uma nova forma de abordar a relação entre o discreto e o contínuo, permitindo a criação do Cálculo Diferencial e Integral. Leibniz, com suas mônadas e infinitésimos, chegou ao Teorema Fundamental do Cálculo pela via do *discreto*. Newton, praticamente ao mesmo tempo, com seus fluxões, pela via do *contínuo*.

Muitos alunos esbarram nas dificuldades representadas pela *linguagem matemática* do Cálculo, e não pelas *idéias* em si. Afinal, como já falamos, os gregos estiveram a um passo da construção do Cálculo dois séculos antes de Cristo, sem ter ainda sequer uma linguagem algébrica simbólica. As idéias fundamentais do Cálculo podem ser assim construídas, desde que se leve em consideração a distinção entre a lógica da Matemática pronta e a lógica da Matemática em construção. A maneira de ensinar deve seguir muito mais a lógica da Matemática em construção, e não a lógica da Matemática pronta e formalizada.[15]

[1] BOYER, Carl Benjamin. *The History of Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover, 1959. 346 p., p. 4

[2] BOYER, 1959, p. 21

[3] BOYER, 1959, p. 22

[4] BOYER, 1959, p. 23

[5] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974, 488 p., p. 87

[6] Cf. HEATH, Thomas Litle. *A History of Greek Mathematics*. New York, Dover, 1981. Vol. I, pp. 327-28

[7] EUCLIDES. *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Trad. e com. por Thomas Little Heath. 2ª ed. New York: Dover, 1956. 13 vols. em 3 vols. Vol. III, p. 14

[8] ARISTÓTELES, *Física*, 207 b 28. Cf. DESANTI, Jean T. *Una Crisis de Desarrollo Ejemplar: El "Descubrimiento" de los Numeros Irracionales*. Apud: PIAGET, Jean (Org.) *Tratado de Lógica y Conocimiento Cientifico*. Volumen III: *Epistemologia de la Matemática*. Buenos Aires, Paidos, 1979., 523 p., p. 57

[9] Cf. EUCLIDES. Op. cit., pp. 371-78

[10] Cf. BOYER, 1959, p. 36

[11] BOYER, 1959, p. 29

[12] YOUNG, Robert M. *Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete*. Dolciani Mathematical Expositions, N. 13. New York: The Mathematical Association of America, 1992. 417 p., p. 310-2

[13] Cf. Trad. de HEATH em *The Method of Archimedes*. Cambridge: University Press, 1912. 51 p., p. 17

[14] Cf. EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979. 351 p., p. 75

[15] Trecho adaptado da Tese de Doutoramento do Autor: BROLEZZI, Antonio Carlos. *A Tensão entre o Discreto e o Contínuo na História da Matemática e no Ensino de Matemática*. São Paulo: Faculdade de Educação da USP, 1996